F20T1A1 geg: K Körper, $V = M_{2,K}$

$A, B \in M_{2,K}$, $\Phi \in \mathrm{End}_K(V)$ definiert durch $\Phi(X) = AXB \quad \forall X \in V$

zu (b) z.zg: $tr(\Phi) = tr(A)\, tr(B)$

Schreibe A, B in der Form $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, mit $a_{ij}, b_{ij} \in K$ für $1 \leq i, j \leq 2$. $\Rightarrow tr(A) = a_{11} + a_{22}$ und $tr(B) = b_{11} + b_{22}$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow t$

$= a_{11}$

$= tr($

$b_{11} + b_{22}$

Lt. Vl. ist $\mathcal{B} = (B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22})$ eine geordnete Basis von V, mit $B_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Berechnung der Darstellungsmatrix $M_{\mathcal{B}}(\Phi)$:

Berechne die Bilder $\Phi(B_{ij})$ der Basiselemente und schreibe diese als Linearkombination von $\mathcal{B}$.

$$\Phi(B_{11}) = A B_{11} B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}(b_{11}+b_{22}) + a_{22}(b_{11}+b_{22}) = (a_{11}+a_{22})\cdot(b_{11}+b_{22})$$

$$= tr(A)\cdot tr(B) \qquad \square$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{pmatrix}$$

$$= \underline{a_{11}b_{11}}\, B_{11} + \underline{a_{11}b_{12}}\, B_{12} + \underline{a_{21}b_{11}}\, B_{21} + \underline{a_{21}b_{12}}\, B_{22}$$

$$\Phi(B_{12}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{11} \\ 0 & a_{21} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Phi(B_{21}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & 0 \\ a_{22} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \end{pmatrix}$$

$$\Phi(B_{22}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Hinweis bzgl. Übungsaufgaben zu F23T2A1:
Von F18T2A1 passt nur Teil (d) inhaltlich

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\Phi) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{21} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{21} \\ a_{11}b_{12} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{12} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{21} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{21} \\ a_{21}b_{12} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{12} & a_{22}b_{22} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{tr}(\Phi) = \operatorname{tr} \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\Phi) = a_{11}b_{11} + a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} + a_{22}b_{22}$$

$$= a_{11}(b_{11} + b_{22}) + a_{22}(b_{11} + b_{22}) = (a_{11} + a_{22}) \cdot (b_{11} + b_{22})$$

$$= \operatorname{tr}(A) \cdot \operatorname{tr}(B) \qquad \square$$

Übung: H22T3A1 (a), (b)
H22T3A4 (verwendet Körpertheorie)

Erinnerung: Grundbegriffe aus der Lin. Alg.

(i) V K-Vektorraum, $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$

$\lambda \in K$, $v \in V$

v ist **Eigenvektor** von ϕ zum Eigenwert λ $\Leftrightarrow$ $v \neq 0_V$ und $\phi(v) = \lambda v$

λ **Eigenwert** von ϕ $\Leftrightarrow$ Es gibt einen Eigenvektor von ϕ zum Eigenwert λ.

(ii) char. Polynom einer Matrix $A \in M_{n,K}$

$$\chi_A = \det(xE - A) \in K[x]$$

(Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen des char. Polynoms.)

(iii) Eigenraum von A zum Wert λ

$$\mathrm{Eig}(A,\lambda) = \{v \in K^n \mid Av = \lambda v\} = \ker(A - \lambda E)$$

geometr. Vielfachheit $\mu_g(A,\lambda) = \dim \mathrm{Eig}(A,\lambda)$

(iv) algebr. Vielfachheit eines Eigenwerts λ von A = Vielfachheit von λ als Nullstelle von χ_A (wichtige Regel: $1 \leq \mu_g(A,\lambda) \leq \mu_a(A,\lambda)$ falls λ Eigenwert von A)

(v) Minimalpolynom von A = eindeutig bestimmtes normiertes Polynom minimalen Grades μ_A mit $\mu_A(A) = 0_{M_{n,K}}$

($f = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in K[x] \Rightarrow f(A) = a_n A^n + \ldots + a_1 A + a_0 E$)

(E

be

H2

Es

Linke

$\forall X$

(a)

(b)

(c)

zu (a)

zu (b)

bestehe

Bem: Char. Polynom und Minimalpolynom sind auch für Endomorphismen definiert.
Sei V ein endl.-dim. K-Vektorraum und $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$.

- Das char. Polynom χ_ϕ ist definiert durch $\chi_\phi = \chi_A$, wobei $A = M_B(\phi)$ für eine bel. geordnete Basis B von V.
- Das Min-pol. μ_ϕ ist das eind. bestimmte normierte Pol. minimalen Grades mit $\mu_\phi(\phi) = 0$. (wobei: $f = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ $\Rightarrow f(\phi) = a_n \phi^n + \dots + a_1 \phi + a_0 \, \mathrm{id}_V$ mit $\phi^k = \underbrace{\phi \circ \dots \circ \phi}_{k\text{-mal}} \quad \forall k \in \mathbb{N}$)

(Es gilt $\mu_\phi = \mu_A$, falls $A = M_{\underline{B}}(\phi)$ für eine bel. geordnete Basis $\underline{B}$ von V.)

<u>H20T1A3</u> Sei $V = M_{2,\mathbb{Q}}$ und $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Es sei $\phi : V \to V$ die Abbildung geg. durch Linksmultiplikation mit A, d.h. $\phi(X) = AX$ $\forall X \in V$.

(a) Zeigen Sie, dass ϕ eine $\mathbb{Q}$-lin. Abb. ist.

(b) Bestimmen Sie das char. Pol. χ_ϕ.

(c) Bestimmen Sie das Min-pol. μ_ϕ.

<u>zu (a)</u> Übung

<u>zu (b)</u> Sei $\underline{B} = (B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22})$ die Basis von V bestehend aus den Basismatrizen.

die

$(A-\lambda E)$

$g(A,\lambda))$

ets λ

lstelle

$\lambda) \le \mu_a(A,\lambda))$

ntig be-

malen Grades

$A^n + .. + a_1A + a_0E)$

Berechnung der Darstellungsmatrix $M_{\mathcal{B}}(\phi)$:

$$\phi(B_{11}) = A B_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{0} \cdot B_{11} + \underline{0}\, B_{12} + \underline{1} \cdot B_{21} + \underline{0} \cdot B_{22}$$

$$\phi(B_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot B_{11} + 0 \cdot B_{12} + 0\, B_{21} + 1 \cdot B_{22}$$

$$\phi(B_{21}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot B_{11} + 0 \cdot B_{12} + 0\, B_{21} + 0 \cdot B_{22}$$

$$\phi(B_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot B_{11} + 1 \cdot B_{12} + 0\, B_{21} + 0 \cdot B_{22}$$

$$\Rightarrow M_B(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lt. Vl. gilt $\chi_\phi = \chi_A$ mit $A = M_B(\phi)$.

$$\Rightarrow \chi_\phi = \det(x \cdot E - A) = \det\begin{pmatrix} x & 0 & -1 & 0 \\ 0 & x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & x & 0 \\ 0 & -1 & 0 & x \end{pmatrix} \underset{\text{Entwicklung zur ersten Zeile}}{=}$$

$$= x \cdot \det\begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ 0 & x & 0 \\ -1 & 0 & x \end{pmatrix} + (-1) \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & x & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{Sarrus}}{=} x \cdot (x^3 - x) + (-1) \cdot \left((-1) + x^2\right) = x^4 - x^2 - x^2 + 1$$

$$= x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2$$

<u>zu (c)</u> An der Darstellungsmatrix $M_B(\phi)$ erkennt man, dass ϕ die Basisvektoren B_{11} und B_{21} lediglich vertauscht, ebenso die Basisvektoren B_{12} und B_{22} $\Rightarrow \phi^2 = id_V$

$\Rightarrow \phi^2 - 1 \cdot id_V = 0_{End_{\mathbb{Q}}(V)} \Rightarrow \phi$ ist Nullstelle des Polynoms $f = x^2 - 1 \in \mathbb{Q}[x]$. Ang.: f ist nicht das Minipol. μ_ϕ.

Dann wäre μ_ϕ normiert vom Grad 1, d.h. $\mu_\phi = x - a$ für ein $a \in \mathbb{Q}$. $\mu_\phi(\phi) = 0 \Rightarrow \phi - a \cdot id_V = 0 \Rightarrow \phi = a\, id_V \Rightarrow$

$M_B(\phi) = a \cdot E$ ↯ also: $\mu_\phi = f = x^2 - 1$. $\square$

Erinnerung:

(i) Die Eigenwerte eines Endomorphismus ϕ (oder einer Matrix A) sind genau die Nullstellen von μ_ϕ (bzw. μ_A).

(ii) Ist $f \in K[x]$ mit $f(\phi) = 0$ (bzw. $f(A) = 0$), dann ist μ_ϕ ein Teiler von f. (Notation: $\mu_\phi \mid f$)

(iii) Satz von Cayley-Hamilton: Für jeden End. ϕ und jede Matrix A gilt jeweils $\chi_\phi(\phi) = 0_{\mathrm{End}_K(V)}$ bzw $\chi_A(A) = 0_{\mathcal{M}_{n,K}}$. Wegen (ii) gilt also immer $\mu_\phi \mid \chi_\phi$ bzw. $\mu_A \mid \chi_A$.

<u>F25T3A1</u> Sei K ein Körper und seien $m, n \in \mathbb{N}$.

(a) Sei $A \in \mathcal{M}_{m,K}$, $B \in \mathcal{M}_{n,K}$, und es sei $C \in \mathcal{M}_{m+n,K}$ die Blockmatrix $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.
Zeigen Sie: $\mu_C = \mathrm{kgV}(\mu_A, \mu_B)$

(b) Gibt es eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{6,\mathbb{R}}$ mit $\chi_A = x^6 + x^4$ und $\mathrm{grad}(\mu_A) = 5$?

(i

(ii

zu

den

als

Nac

C^m

$f =$

$f(C)$

=

d

es

$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$

mit

$= 5$?

zu (a) Nach Def. des kgV muss gezeigt werden

(i) $\mu_A \mid \mu_C$, $\mu_B \mid \mu_C$.

(ii) Ist $f \in \mathbb{Q}[x]$ mit $\mu_A \mid f$ und $\mu_B \mid f$, dann folgt $\mu_C \mid f$.

zu (i) Es genügt z.zg., dass $\mu_C(A) = 0$ gilt, denn das Min.-pol. μ_A teilt alle Polynome, die A als Nullstelle haben.

Nach den Rechenregeln für Blockmatrizen gilt $C^m = \begin{pmatrix} A^m & 0 \\ 0 & B^m \end{pmatrix}$ $\forall m \in \mathbb{N}$. Für jedes $f \in K[x]$, $f = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ mit $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \dots, a_n \in K$ folgt

$$f(C) = \sum_{k=1}^{n} a_k C^k + a_0 E_{m+n} = \sum_{k=1}^{n} a_k \begin{pmatrix} A^k & 0 \\ 0 & B^k \end{pmatrix} + a_0 \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{m} a_k A^k + a_0 E_m & 0 \\ 0 & \sum_{k=1}^{m} a_k B^k + a_0 E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(A) & 0 \\ 0 & f(B) \end{pmatrix}$$

also: $\mu_C(C) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \mu_C(A) & 0 \\ 0 & \mu_C(B) \end{pmatrix} \overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \mu_C(A) = 0$

An $(*)$ kann auch $\mu_C(B) = 0$ abgelesen werden, also gilt auch $\mu_B \mid \mu_C$.