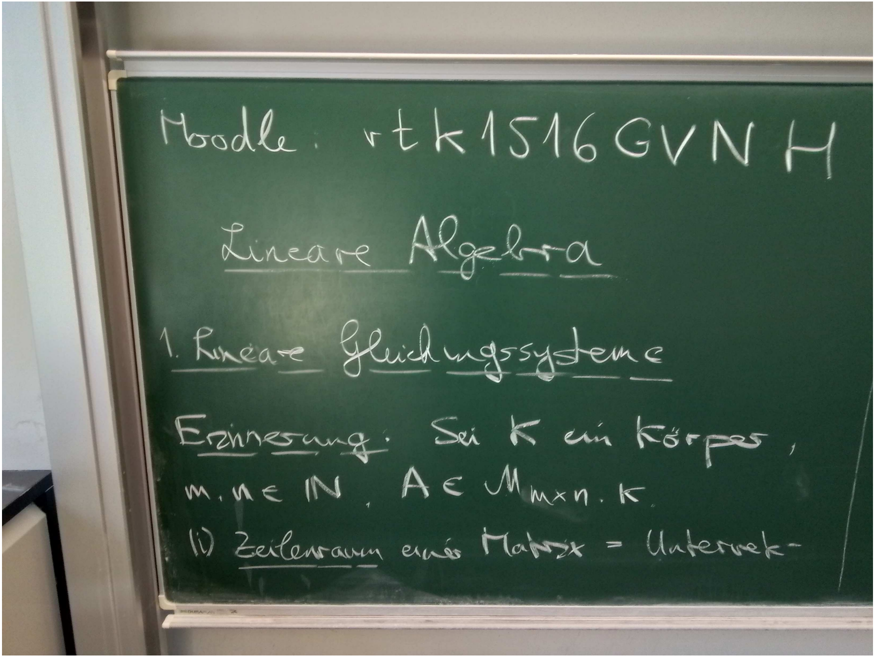
Moodle: rtk1516GVNH
Lineare Algebra
1. Lineare Gleichungssysteme
Erinnerung: Sei K ein Körper,
m, n ∈ ℕ, A ∈ M_{m×n}.K.
(i) Zeilenraum einer Matrix = Untervek-

torraum des K^n, der durch die Zeilen von A aufgespannt wird

(ii) <u>Zeilenrang</u> von A = Dimension des Zeilenraums von A

(iii) entsprechend: Spaltenraum, Spaltenrang einer Matrix A

(iv) <u>Rangsatz</u>: Für jede Matrix A gilt Zeilenrang = Spaltenrang (obwohl im Allgem. Zeilenraum $\neq$ Spaltenraum).
Diese Zahl wird der <u>Rang</u> rg(A) der Matrix A genannt.

- Ist $rg(A) < rg(\tilde{A})$, dann ist $\mathcal{L} = \emptyset$
- Ansonsten ist $\mathcal{L}$ ein affiner Unterraum des K^n

<u>Satz</u> (Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen (LGS))

(i) Geg. sei ein <u>homogenes</u> LGS mit Koeffizientenmatrix $A \in M_{m\times n, K}$. (d.h.: Das System hat die Form $Ax = 0_{K^m}$ und besteht aus m Gleichungen in n Unbekannten.) Dann ist die Lösungsmenge $\mathcal{L} \subseteq K^n$ des LGS ein Untervektorraum der Dimension $n - rg(A)$

(ii) Sei nun $Ax = b$ ein <u>inhomogenes</u> LGS (mit $A \in M_{m\times n, K}$ und $b \in K^m$). Sei $\tilde{A} = (A, b)$

$\in M_{m\times(n+1),K}$ die erweiterte Koeffizientenmatrix des LGS. Sei $\mathcal{L} \subseteq K^n$ die Lösungsmenge.

- Ist $rg(A) < rg(\tilde{A})$, dann ist $\mathcal{L} = \emptyset$
- Ansonsten ist $\mathcal{L}$ ein affiner Unterraum des K^n der Dimension $n - rg(A)$, d.h. es gibt einen Untervektorraum U_0 (der Lösungsraum von $Ax = 0_{K^m}$) und ein $v \in K^n$ mit $\mathcal{L} = v + U_0$, $\dim U_0 = n - rg(A)$.
- Insb. ist das LGS eindeutig lösbar genau dann, wenn $rg(A) = n$ ist.

,

-k-

F23T2A1

(b) Für welche Werte ~~von~~ $r \in \mathbb{R}$ hat das folgende LGS (i) keine (ii) genau eine (iii) unendlich viele Lösungen?

$$\begin{aligned} rx + y + z &= 1 \\ x + ry + z &= 1 \\ x + y + rz &= 1 \end{aligned}$$

Koeffizientenmatrix des LGS:

$$\begin{pmatrix} r & 1 & 1 \\ 1 & r & 1 \\ 1 & 1 & r \end{pmatrix} =: A_r$$

Die erweiterte Koeff.-matrix erhält man

An

$\mapsto$

Vertausch

Die

Rang

Dasse

sich de

nicht a

also kl

Matrix.

durch Hinzunahme der Spalte $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Sarrus-Regel $\Rightarrow \det(A_r) = r^3 + 1 + 1 - r - r - r = r^3 - 3r + 2$.

Offenbar ist 1 Nullstelle dieses Polynoms in r. Polynomdivision, p-q-Formel

$\Rightarrow \det(A_r) = (r-1)^2(r+2)$.

Für alle $r \in \mathbb{R} \setminus \{1,-2\}$ gilt $\det(A_r) \neq 0$ und $rg(A_r) = n$. Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass ein LGS $Ax = b$ genau dann eindeutig lösbar ist, wenn $rg(A)$ gleich der Spaltenzahl von A ist. Also ist das LGS eindeutig lösbar für alle $r \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$.

Koeff.-matrix und erweiterte Koeff.matrix im Fall $r = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Spaltenraum beider Matrizen ist gleich $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$, also von Dimension 1. $\Rightarrow$ Der Lösungsraum ist für $r = 1$ ein affiner Unterraum des $\mathbb{R}^3$ der Dimension $3 - \mathrm{rg}(A_1) = 3 - 1 = 2$. $\Rightarrow$ Das LGS hat für $r = 1$ unendlich viele Lösungen.

Koeff.matrix und erw. Koeff.-matrix für $r = -2$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

R hat

reele

= 1

= 1

= 1

GS:

erhält man

Anwendung des Gaußalgorithmus:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

addiere 2. und 3. Zeile zur ersten

subtrahiere 3. Zeile von der zweiten

$$\xrightarrow{\text{Vertauschungen}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$ (Zeilenstufenform)

Die Gesamtmatrix am Ende der Rechnung hat Rang 3, die linke 3×3-Teilmatrix nur Rang 2. Dasselbe gilt für die Ursprungsmatrizen, weil sich der Rang durch die Zeilenumformungen nicht ändert. Der Rang der Koeff.-matrix ist also kleiner als der Rang der erweiterten Koeff.-matrix. $\Rightarrow$ Das LGS hat keine Lsg. für $r = -2$. $\square$

Übung: F18T2A1, H22T2A1, H23T2A4

Def.: geg. K-Vektorräume V, W der endlichen Dimension $n = \dim V$ bzw. $m = \dim W$.
Sei $\phi: V \to W$ eine lineare Abbildung.
Sei $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ eine geordnete Basis von V und $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_m)$ eine geordnete Basis von W.
Dann wird die eindeutig bestimmte Matrix $A = (a_{ij})$ mit

$$\phi(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \quad (1 \le j \le n)$$

die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi)$ von ϕ bzgl. $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ genannt.

F20T1A1 Sei $n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper. Die Spur einer Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,K}$ ist definiert durch $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Ist V ein endl.-dim. K-Vektorraum und ϕ ein Endomorphismus von V (d.h. eine lineare Abb. $\phi : V \to V$), dann ist $tr(\phi)$ die Spur einer beliebigen Darstellungsmatrix von ϕ.

Sei nun $V = M_{2,K}$, der K-Vektorraum der 2×2-Matrizen über K, und seien $A, B \in M_{2,K}$.
Wir betrachten die Abbildung

$$\Phi : V \to V,\ X \mapsto AXB$$

Zeigen Sie: (a) $\Phi \in \mathrm{End}_K(V)$ (b) $\mathrm{tr}(\Phi) = \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B)$

zu (a) Seien $X, Y \in V$ und $\lambda \in K$. Auf Grund der bekannten Rechenregeln für Matrizen gilt

$$\Phi(X+Y) = A(X+Y)B = (AX + AY)B$$
$$= AXB + AYB = \Phi(X) + \Phi(Y)$$

$$\Phi(\lambda x) = A(\lambda x)B = (\lambda(Ax)) \cdot B = \lambda \cdot (AxB)$$
$$= \lambda \Phi(x)$$