# Definition der Koordinatenabbildungen

## Folgerung (4.3)

Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $V$ ein $n$-dimensionaler $K$-Vektorraum und $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ eine geordnete Basis von $V$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$\Phi_{\mathcal{B}} : V \to K^n$$

mit $\Phi_{\mathcal{B}}(v_j) = e_j$ für $1 \leq j \leq n$ (wobei $e_j$ jeweils den $j$-ten Einheitsvektor bezeichnet). Wir nennen sie die Koordinatenabbildung zur geordneten Basis $\mathcal{B}$. Es handelt sich dabei um einen Isomorphismus von $K$-Vektorräumen.

## Folgerung (4.4)

Zwischen zwei beliebigen $K$-Vektorräumen derselben endlichen Dimension existiert ein Isomorphismus.

Erinnerung: $V$ $n$-dim. $K$-Vektorraum ($n \in \mathbb{N}$)

$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ geordnete Basis, $v \in V$

Definition der $\mathcal{B}$-Koordinaten von $v$:

Schreibe $v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$.

Dann ist $\Phi_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$

Spezialfall: Koordinaten von $v_k$ ($k \in \{1, \dots, n\}$)

$$v_k = \sum_{j=1}^{n} \delta_{kj} v_j \Rightarrow \Phi_{\mathcal{B}}(v_k) = \begin{pmatrix} \delta_{k1} \\ \vdots \\ \delta_{kn} \end{pmatrix} = e_k$$

# Die lineare Abbildung $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(A)$ zu einer Matrix

## Definition (4.5)

Seien $V, W$ endlich-dimensionale $K$-Vektorräume und $\mathcal{A} = (v_1, ..., v_n)$, $\mathcal{B} = (w_1, ..., w_m)$ geordnete Basen von $V$ bzw. $W$. Ferner sei $A = (a_{ij})$ eine Matrix aus $\mathcal{M}_{m \times n, K}$, mit $n = \dim V$ und $m = \dim W$. Dann gibt es nach Satz 4.2 eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$\phi : V \longrightarrow W \qquad \text{mit} \qquad \phi(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \quad \text{für} \quad 1 \leq j \leq n.$$

Wir bezeichnen diese Abbildung $\phi$ mit $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(A)$ und nennen sie die lineare Abbildung zur Matrix $A$ bezüglich der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

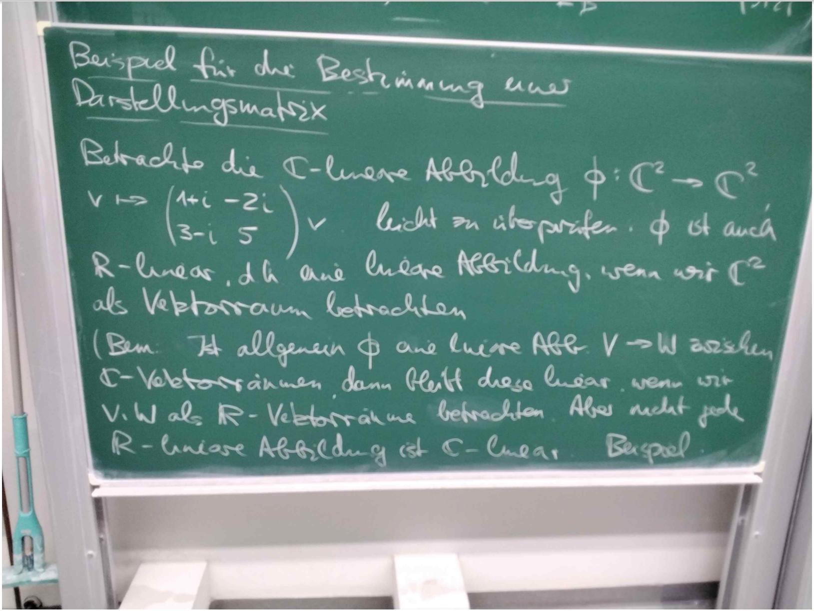
# Die Darstellungsatrix $\mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi)$ einer linearen Abbildung

## Definition (4.6)

Seien $V, W$ endlich-dimensionale $K$-Vektorräume und $\mathcal{A} = (v_1, ..., v_n)$, $\mathcal{B} = (w_1, ..., w_m)$ geordnete Basen von $V$ bzw. $W$. Sei $\phi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Für jedes $j \in \{1, ..., n\}$ stellen wir $\phi(v_j)$ als Linearkombination von $\mathcal{B}$ dar; es gilt

$$\phi(v_j) \quad = \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \qquad 1 \le j \le n$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $a_{ij} \in K$. Wir nennen $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n, K}$ die Darstellungsmatrix von $\phi$ bezüglich der Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ und bezeichnen sie mit $\mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi)$.




Korrektur: Am Ende des ersten Absatzes muss es heißen „…, wenn wir $\mathbb{C}^2$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum betrachten.“

komplexe Konjugation $\iota : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$z = a + ib \mapsto \bar{z} = a - ib$

ist verträglich mit der Addition und mit skalarer Multiplikation, wenn man $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum betrachtet, denn:

$\iota(\lambda \cdot (a+ib)) = \iota(\lambda a + i(\lambda b)) =$

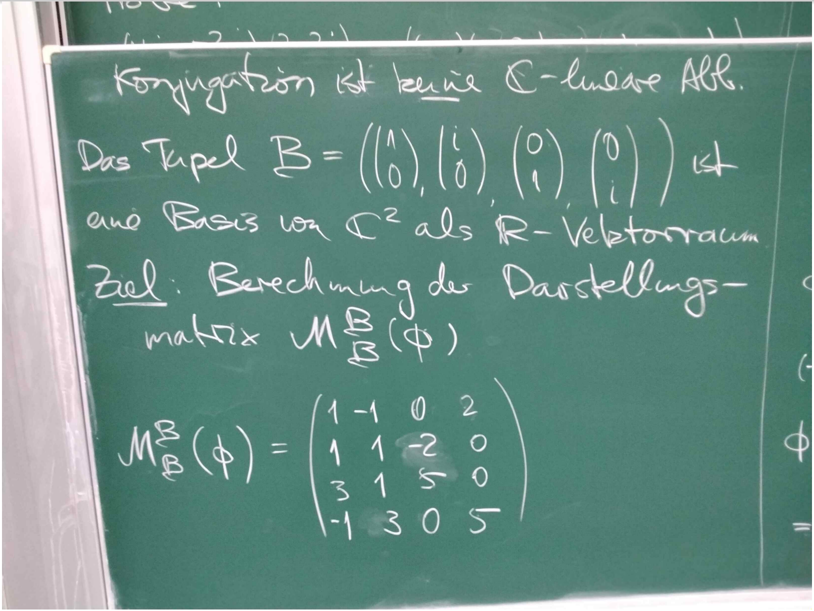
$\lambda a - i \lambda b = \lambda(a - ib) = \lambda\, \iota(a+ib)$

für alle $\lambda, a, b \in \mathbb{R}$

<u>aber</u>: $\iota(i \cdot 1) = \iota(i) = -i$

$i\,\iota(1) = i\,1 = i$

$\Rightarrow \iota(i \cdot 1) \neq i\,\iota(1) \Rightarrow$ Die komplexe




Die vier Spalten von $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi)$ ergeben sich durch folgende Rechnung.

$$\phi\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+i & -2i\\ 3-i & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+i\\3-i\end{pmatrix} =$$

$$1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}$$

$$\phi\begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+i & -2i\\ 3-i & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1+i\\1+3i\end{pmatrix}$$

$$(-1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}$$

$$\phi\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+i & -2i\\ 3-i & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2i\\5\end{pmatrix}$$

$$= 0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}$$

$$\phi\begin{pmatrix}0\\ i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+i & -2i\\ 3-i & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\ 5i\end{pmatrix}$$

$$= 2\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}i\\ 0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}0\\ i\end{pmatrix}$$

# Wirkung der Darstellungsmatrix auf Koordinatenvektoren

**Satz (4.7)**

Seien die Bezeichungen wie in der Definition gewählt. Dann gilt

$$\Phi_{\mathcal{B}}(\phi(v)) \quad = \quad \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\phi)\Phi_{\mathcal{A}}(v) \qquad \text{für alle} \quad v \in V.$$

Beweis von Satz 4.7

geg. endl.-dim $K$-Vektorräume $V, W$ mit geordneten Basen $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$, $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_m)$

$\phi : V \to W$ lineare Abbildung, $v \in V$

Beh.: $\Phi_{\mathcal{B}}(\phi(v)) = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi)\, \Phi_{\mathcal{A}}(v)$

zu überprüfen: $\Phi_{\mathcal{B}} \circ \phi$ und $\phi_{M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi)} \circ \Phi_{\mathcal{A}}$ stimmen als lineare Abbildungen $V \to K^m$ überein

Eindeutigkeitssatz 4.2: Es genügt zu überprüfen, dass die Bilder von $v_1, \dots, v_n$ gleich sind

Sei $j \in \{1, \dots, n\}$ $\phi(v_j) \in W$, ist also Lin. komb. der Basis $\mathcal{B}$ $\Rightarrow \exists a_{ij} \in K \ (1 \le i \le m)$, so dass $\phi(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$ Diese Zahlen bilden die $j$-te Spalte von $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi)$.

$$(\Phi_{\mathcal{B}} \circ \phi)(v_j) = \Phi_{\mathcal{B}}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i\right) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = j\text{-te Spalte von } M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi)$$

$$(\phi_{M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi)} \circ \Phi_{\mathcal{A}})(v_j) = \phi_{M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi)}(e_j) = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi) \cdot e_j$$

$$= j\text{-te Spalte von } M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi)$$

$\square$

Anwendungsbeispiel zu Satz 4.7:

$V = W = \mathbb{C}^2$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum

$\phi : V \to W$, $v \mapsto \begin{pmatrix} 1+i & -2i \\ 3-i & 5 \end{pmatrix} v$

Berechne $\phi\begin{pmatrix} 7-2i \\ 3+2i \end{pmatrix}$ über die Darstellungsmatrix.

$$\Phi_{\mathcal{B}}\begin{pmatrix} 7-2i \\ 3+2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

da $\begin{pmatrix} 7-2i \\ 3+2i \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$

Satz 4.7 $\Rightarrow$ $\Phi_{\mathcal{B}}(\phi(v)) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\phi)\, \Phi_{\mathcal{B}}(v)$, wobei $v = \begin{pmatrix} 7-2i \\ 3+2i \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \Phi_{\mathcal{B}}(\phi(v)) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -1 \\ 34 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= 13\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} + 34\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-3)\begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13-i \\ 34-3i \end{pmatrix}.$$

Probe:

$$\begin{pmatrix} 1+i & -2i \\ 3-i & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7-2i \\ 3+2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+i)(7-2i) + (-2i)(3+2i) \\ (3-i)(7-2i) + 5(3+2i) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9+5i+4-6i \\ 19-13i+15+10i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13-i \\ 34-3i \end{pmatrix}$$

# Darstellungsmatrix bezüglich der Einheitsbasen

Sei $\mathcal{E}_n = (e_1^{(n)}, ..., e_n^{(n)})$ die geordnete Einheitsbasis des $K^n$ (bestehend aus Einheitsvektoren) und $\mathcal{E}_m = (e_1^{(m)}, ..., e_m^{(m)})$ die geordnete Einheitsbasis des $K^m$.

**Proposition (4.8)**

Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_{m \times n, K}$ und $\phi_A : K^n \to K^m$ die lineare Abbildung gegeben durch $\phi_A(v) = Av$ für alle $v \in K^n$. Dann gilt

$$\mathcal{M}^{\mathcal{E}_n}_{\mathcal{E}_m}(\phi_A) \quad = \quad A.$$

Beweis von Prop 4.8

geg. $A \in \mathcal{M}_{m \times n, K}$, $\phi_A : K^n \to K^m$, $v \mapsto Av$

__Beh__: $\mathcal{M}^{\mathcal{E}_n}_{\mathcal{E}_m}(\phi_A) = A$, wobei $\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_m$ Einheitsbasen

Sei $j \in \{1, \dots, n\}$. Zeige, dass die $j$-te Spalte von $\mathcal{M}^{\mathcal{E}_n}_{\mathcal{E}_m}(\phi_A)$ genau die $j$-te Spalte von $A$ ist

$j$-te Spalte von $\mathcal{M}^{\mathcal{E}_n}_{\mathcal{E}_m}(A) = \mathcal{M}^{\mathcal{E}_n}_{\mathcal{E}_m}(A)\, e_j$

$= \mathcal{M}^{\mathcal{E}_n}_{\mathcal{E}_m}(A)\, \Phi_{\mathcal{E}_n}(e_j) \overset{\text{Satz 4.7}}{=} \Phi_{\mathcal{E}_m}(\phi_A(e_j))$

$= \phi_A(e_j) = A e_j =$ $j$-te Spalte von $A$. $\square$

# 1-zu-1-Korrespondenz Matrizen vs. lineare Abbildungen

## Satz (4.9)

Seien $V, W$ endlich-dimensionale $K$-Vektorräume und $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ geordnete Basen von $V$ bzw. $W$. Dann sind durch die beiden Abbildungen

$$\mathcal{M}_{m\times n,K} \to \mathrm{Hom}_K(V,W)\ ,\ A \mapsto \mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(A)$$

und

$$\mathrm{Hom}_K(V,W) \to \mathcal{M}_{m\times n,K}\ ,\ \phi \mapsto \mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi)$$

zueinander inverse Isomorphismen von $K$-Vektorräumen definiert.

## Folgerung (4.10)

Seien $V, W$ endlich-dimensionale $K$-Vektorräume. Dann gilt

$$\dim\ \mathrm{Hom}_K(V,W) \quad = \quad (\dim V)(\dim W).$$

Beweis von Satz 4.9:

geg. endlich-dim. $K$-Vektorräume $V, W$ mit geordneten Basen $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$, $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_m)$

zu überprüfen: (1) $\mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ ist eine <u>lineare</u> Abb. $M_{m\times n,K} \to \mathrm{Hom}_K(V,W)$

(2) $\mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} \circ \mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} = \mathrm{id}_{M_{m\times n,K}}$

(3) $\mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} \circ \mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_K(V,W)}$

<u>zu (1)</u> Seien $A, B \in M_{m\times n,K}$ und $\lambda \in K$

nachzurechnen: $\mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(A+B) = \mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(A) + \mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(B)$

$\mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\lambda A) = \lambda\, \mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(A)$

Auf Grund von Satz 4.2 reicht es, die Übereinstimmung der linearen Abb. links und rechts auf den Elementen der Basis $\mathcal{A}$ zu überprüfen. Sei also $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(A+B)(v_j) = \sum_{i=1}^{m} (a_{ij}+b_{ij}) w_i =$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i + \sum_{i=1}^{m} b_{ij} w_i =$$

$$\mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(A)(v_j) + \mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(B)(v_j)$$

$$= (\mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(A) + \mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(B))(v_j)$$

Sei

$= M$

der Da

Spalte

Nach D

$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$

dass

ist.

zu (3)

$$\mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\lambda A)(v_j) = \sum_{i=1}^{m} (\lambda a_{ij}) w_i$$

$$= \lambda \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i = \lambda \cdot \mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(A)(v_j)$$

$$= \left(\lambda \mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(A)\right)(v_j)$$

<u>zu (2)</u> Sei $A \in M_{m\times n, K}$ z.zg:

$$(\mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} \circ \mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}})(A) = A$$

Sei $j \in \{1, \dots, n\}$. Überprüfe, dass die $j$-te Spalte von $(\mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} \circ \mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}})(A)$ genau die $j$-te Spalte von $A$ ist.

Sei $\phi = \mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(A) \Rightarrow (\mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} \circ \mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}})(A)$
$= \mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi)$. z.zg. also: Die $j$-te Spalte
der Darstellungsmatrix von $\phi$ ist die $j$-te
Spalte von $A$

Nach Def. von $\mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(A)$ gilt $\phi(v_j) =$
$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$. Diese Gleichung zeigt,
dass $a_{\cdot j}$ die $j$-te Spalte von $\mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi)$
ist. $\square$

zu <u>(3)</u> siehe Skript