

Ralf Gerkmann
Mathematisches Institut
Ludwig-Maximilians-Universität München

Funktionentheorie, Lebesguetheorie und Gewöhnliche Differentialgleichungen

(Mathematik IV für Lehramt Gymnasium)

(Version 14. Juli 2018)

Inhaltsverzeichnis

§ 1. Fortsetzung der Integrationstheorie	3
§ 2. Funktionentheorie	56
§ 3. Gewöhnliche Differentialgleichungen	106
Literaturverzeichnis	141

Ausführliches Inhaltsverzeichnis

§ 1. Fortsetzung der Integrationstheorie	3
1.1 Die mehrdimensionale Substitutionsregel	3
1.2 Kurven- und Flächenintegrale	21
1.3 Vektoranalysis	28
1.4 Das Lebesgue-Integral	43
§ 2. Funktionentheorie	56
2.1 Reelle und komplexe Differenzierbarkeit	56
2.2 Komplexe Potenzreihen	63
2.3 Komplexe Kurvenintegrale und Cauchyscher Integralsatz	66
2.4 Die Cauchysche Integralformel	75
2.5 Anwendungen der Cauchyschen Integralformel	79
2.6 Isolierte Singularitäten	86
2.7 Der Residuensatz	94
§ 3. Gewöhnliche Differentialgleichungen	106
3.1 Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche DGL	106
3.2 Elementare Lösungsmethoden	115
3.3 Systeme linearer Differentialgleichungen	119
3.4 Exakte Differentialgleichungen und autonome Systeme	135
Literaturverzeichnis	141

§ 1. Fortsetzung der Integrationstheorie

1.1 Die mehrdimensionale Substitutionsregel

Inhaltsübersicht

- ☆ Wiederholung der Integrationstheorie aus dem vorherigen Semester:
Definition des Riemann-Integrals, Satz von Fubini, Jordan-Messbarkeit und Nullmengen,
Cavalierisches Prinzip und Integration über Normalbereiche
- ☆ Erhaltung von Jordanschen Nullmengen unter Lipschitz-stetigen Abbildungen
- ☆ heuristische Herleitung der mehrdimensionalen Substitutionsregel
- ☆ Anwendung: Integration über rotationssymmetrische Bereiche
- ☆ formaler Beweis der Substitutionsregel

Wir beginnen mit der Wiederholung der *Definition des Riemann-Integrals*. Aus Gründen der Übersichtlichkeit geben wir die Definitionen und Sätze nicht vollständig ausformuliert wieder. Die Kapitelangaben in Klammern ermöglichen es aber, die genaue Fassung im Skript des Wintersemesters nachzulesen.

- (i) Ein **kompakter Quader** im \mathbb{R}^n ist eine Teilmenge der Form $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ mit $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ und $a_k < b_k$ für $1 \leq k \leq n$. Stehen in der Definition an Stelle von der abgeschlossenen offenen Intervalle der Form $]a_k, b_k[$, dann nennt man ihr kartesisches Produkt einen **offenen Quader** (siehe Abschnitt 4.1).
- (ii) Eine **Zerlegung** eines kompakten Quaders Q wie unter (i) ist ein Tupel $\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}_1, \dots, \mathcal{Z}_n)$, wobei \mathcal{Z}_k für $1 \leq k \leq n$ jeweils eine endliche Teilmenge von $]a_k, b_k[$ bezeichnet. Jedem solchen \mathcal{Z} kann eine Menge $\mathcal{Q}(\mathcal{Z})$ kompakter Teilquader zugeordnet werden, deren Vereinigung Q ergibt, und die sich paarweise höchstens in den Seitenflächen schneiden, also keine gemeinsamen inneren Punkte besitzen (siehe Def. (4.1) und nachfolgender Text).
- (iii) Für eine beschränkte Funktion $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ hatten wir die **Unter-** bzw. **Obersumme** definiert durch

$$\mathcal{S}_f^-(\mathcal{Z}) = \sum_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})} c_{K,f}^- v(K) \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{S}_f^+(\mathcal{Z}) = \sum_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})} c_{K,f}^+ v(K)$$

wobei $c_{K,f}^- = \inf\{f(x) \mid x \in K\}$ und $c_{K,f}^+ = \sup\{f(x) \mid x \in K\}$ war (Def. (4.2)). Das Supremum über alle Untersummen hatten wir das **Unterintegral** genannt und das Infimum über alle Obersummen als **Oberintegral** bezeichnet (Def. (4.5)).

- (iv) Eine Funktion f wie unter (iii) ist **Riemann-integrierbar**, wenn ihr Unter- und Oberintegral übereinstimmen. Letzteres hatten wir in diesem Fall das **Riemann-Integral** genannt und mit dem Ausdruck $\int_Q f(x) dx$ bezeichnet (Def. (4.5)).

Für die *Berechnung des Riemann-Integrals* auf quaderförmigen Integrationsbereichen haben wir die folgenden Hilfsmittel zur Verfügung.

- (i) Das Riemann-Integral eindimensionaler Funktionen lässt sich mit dem *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung* ausrechnen (Mathe I, (7.18)): Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und F eine Stammfunktion von f , dann gilt $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.
- (ii) Die Bestimmung eindimensionaler Integrale wird außerdem durch die *Substitutionsregel* und die Regel zur *partiellen Integration* erleichtert. Es gilt

$$\int_a^b (f \circ u)(t) u'(t) dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x) dx \quad \text{und} \quad \int_a^b f(x) g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

Im Fall Substitutionsregel bezeichnet $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem offenen Intervall I mit $[a, b] \subseteq I$ und $u : J \rightarrow I$ eine stetig differenzierbare Funktion. Bei der partiellen Integration sind $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen, auch hier auf einem offenen Intervall I mit $[a, b] \subseteq I$ (siehe Mathe I, (7.19) und (7.20)).

- (iii) Die Berechnung mehrdimensionaler Riemann-Integrale kann mit dem *Satz von Fubini* auf den eindimensionalen Fall zurückgeführt werden (Satz (4.9)). Sind $P \subseteq \mathbb{R}^m$ und $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakte Quader und ist $f : P \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, dann gilt

$$\int_{P \times Q} f(x, y) d(x, y) = \int_P \left(\int_Q f(x, y) dy \right) dx.$$

Aufbauend auf dem Begriff des Riemann-Integrals haben wir das Jordan-Volumen für gewisse beschränkte Teilmengen des \mathbb{R}^n definiert.

- (i) Sind $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge und $A \subseteq D$, dann ist die *charakteristische Funktion* $\chi_A : D \rightarrow \{0, 1\}$ definiert durch $\chi_A(x) = 1$ für alle $x \in A$ und $\chi_A(x) = 0$ für alle $x \in D \setminus A$ (Def. (4.16)).
- (ii) Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ wird *Jordan-messbar* genannt, wenn ein kompakter Quader Q mit $Q^\circ \supseteq A$ existiert und die charakteristische Funktion $\chi_A : Q \rightarrow \{0, 1\}$ Riemann-integrierbar ist (wobei Q° das Innere des Quaders Q bezeichnet). Auf Grund der Bedingung $A \subseteq Q^\circ$ sind Jordan-messbare Mengen immer beschränkt (Def. (4.16)).
- (iii) Im Falle der Jordan-Messbarkeit nennt man $v(A) = v_n(A) = \int_Q \chi_A(x) dx$ das *Jordan-Volumen* von A (Def. (4.16)).
- (iv) Sind $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar mit $A \subseteq B$, dann gilt $v(A) \leq v(B)$. Für beliebige Jordan-messbare Teilmengen gelten die Rechenregeln $v(A \cup B) = v(A) + v(B) - v(A \cap B)$ außerdem $v(u + A) = v(A)$ und $v(rA) = r^n v(A)$ für alle $u \in \mathbb{R}^n$ und $r \in \mathbb{R}^+$ (Sätze (4.23) und (4.29)).

- (v) Eine Jordan-messbare Menge A mit $v(A) = 0$ wird **Jordansche Nullmenge** genannt (Def. (4.10) und Satz (4.28)). Eine Teilmenge $N \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt (**Lebesguesche**) **Nullmenge**, wenn für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ eine Folge $(Q_m)_{m \in \mathbb{N}}$ von Quadern mit $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} Q_m \supseteq N$ und $\sum_{m=1}^{\infty} v(Q_m) < \varepsilon$ existiert (Def. (4.10)).
- (vi) Jede Jordansche Nullmenge ist eine Nullmenge, aber die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch. Allerdings sind kompakte Nullmengen auch Jordansche Nullmengen (Prop. (4.13)).
- (vii) Im Gegensatz zu den Jordanschen Nullmengen können Nullmengen auch unbeschränkt sein. Zum Beispiel sind abzählbare unbeschränkte Teilmengen, etwa $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$, zwar Nullmengen, aber keine Jordanschen Nullmengen (Prop. (4.11)(ii)).
- (viii) Eine anschauliche Interpretation der Messbarkeit liefert folgendes Kriterium: Genau dann ist eine beschränkte Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar, wenn ihr Rand ∂A eine Nullmenge ist (Folgerung (4.21)).

Mit dem Konzept der Jordan-Messbarkeit konnten wir dann auch Riemann-integrierbare Funktionen auf allgemeineren Definitionsbereichen betrachten.

- (i) Eine beschränkte Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer Jordan-messbaren Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ wird Riemann-integrierbar genannt, wenn die **Nullfortsetzung** $f_Q : Q \rightarrow \mathbb{R}$ von f auf einen kompakten Quader Q mit $Q^\circ \supseteq A$ Riemann-integrierbar ist. Diese ist definiert durch $f_Q(x) = f(x)$ für alle $x \in A$ und $f_Q(x) = 0$ für alle $x \in Q \setminus A$. Das Riemann-Integral ist in diesem Fall definiert durch

$$\int_A f(x) dx = \int_Q f_Q(x) dx.$$

- (ii) Sind $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und ist $f : A \cup B \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft, dass die Einschränkungen $f|_A$ und $f|_B$ Riemann-integrierbar sind, dann ist f auch auf $A \cup B$ und $A \cap B$ Riemann-integrierbar, und nach (4.31) gilt

$$\int_{A \cup B} f(x) dx = \int_A f(x) dx + \int_B f(x) dx - \int_{A \cap B} f(x) dx.$$

- (iii) Eine beschränkte Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer Jordan-messbaren Menge ist genau Riemann-integrierbar, wenn die Menge der Unstetigkeitsstellen von f eine Nullmenge ist. Das ist das **Lebesguesche Integrierbarkeitskriterium** (Sätze (4.15) und (4.25)).
- (iv) Jordansche Nullmengen können bei der Riemannschen Integration vernachlässigt werden. Dies bedeutet, dass beliebige Änderungen einer Funktion auf einer Jordanschen Nullmenge weder an der Riemann-Integrierbarkeit noch am Wert des Riemann-Integrals etwas ändern (Satz (4.32)).

- (v) Die **Ordinatenmenge** einer nicht-negativen Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ auf einer beliebigen Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist definiert durch $\Lambda(f) = \{(x, y) \in A \times \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq f(x)\}$. Ist A Jordan-messbar und f Riemann-integrierbar, dann besteht der wichtige Zusammenhang

$$v_{n+1}(\Lambda(f)) = \int_A f(x) dx$$

zwischen Riemann-integral und $(n + 1)$ -dimensionalem Jordan-Volumen (Satz (4.35)).

Außerdem hatten wir noch die Integration von Funktionen über **Normalbereiche** diskutiert. Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ wurde Normalbereich bezüglich der x -Achse genannt, wenn stetige Funktionen $\psi_1, \psi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ existieren, so dass $\psi_1 \leq \psi_2$ und $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \psi_1(x) \leq y \leq \psi_2(x)\}$ erfüllt sind. Das Riemann-Integral einer stetigen Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ kann dann durch die Formel

$$\int_A f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \left(\int_{\psi_1}^{\psi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

berechnet werden. Eine Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt Normalbereich bezüglich der xy -Ebene, wenn eine kompakte Jordan-messbare Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ und stetige Funktionen $\psi_1, \psi_2 : A \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\psi_1 \leq \psi_2$ existieren, so dass $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \psi_1(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)\}$ gilt. Das Riemann-Integral einer stetigen Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ erhält man in diesem Fall durch

$$\int_B f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_A \left(\int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) d(x, y).$$

Auf naheliegende Weise lassen sich auch Normalbereiche bezüglich der y -Achse bzw. der xz - oder der yz -Ebene definieren, und es gelten dann entsprechende, durch Vertauschung der Koordinaten modifizierte Integrationsregeln.

Unser Ziel in diesem Kapitel besteht nun darin, die Substitutionsregel aus dem ersten Semester auf höhere Dimension zu verallgemeinern. Dies wird sich vor allem bei der Integration von Funktionen als nützlich erweisen, die anhand krummliniger Koordinatensysteme definiert sind, etwa die häufig in der Physik verwendeten Polar-, Zylinder und Kugelkoordinaten. Um dies vorzubereiten, benötigen wir einen neuen Stetigkeitsbegriff. Im letzten Semester war die Stetigkeit und auch die gleichmäßige Stetigkeit für Abbildungen zwischen metrischen Räumen definiert worden. Wir definieren nun einen weiteren, noch stärkeren Stetigkeitsbegriff.

(1.1) Definition Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **Lipschitz-stetig**, wenn eine Konstante $L \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass

$$d_Y(f(p), f(q)) \leq L d_X(p, q) \quad \text{für alle } p, q \in X \text{ erfüllt ist.}$$

Dabei bezeichnet man L als eine **Lipschitz-Konstante** von f . Gibt es für jeden Punkt $p \in X$ jeweils eine Umgebung U mit der Eigenschaft, dass die Einschränkung $f|_U$ Lipschitz-stetig ist, dann spricht man von einer **lokal** Lipschitz-stetigen Abbildung.

Jede Lipschitz-stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist auch gleichmäßig stetig, und damit erst recht stetig. Sei nämlich $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben und $L \in \mathbb{R}^+$ eine Lipschitz-Konstante von f . Setzen wir $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$, dann gilt für alle $x, y \in X$ mit $d_X(p, q) < \delta$ jeweils

$$d_Y(f(p), f(q)) \leq L d_X(p, q) < L \delta = L \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon,$$

womit die gleichmäßige Stetigkeit nachgewiesen ist.

(1.2) Satz Jede stetig differenzierbare Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist lokal Lipschitz-stetig.

Beweis: Hier ist das wesentliche Hilfsmittel der Mittelwertsatz für Richtungsableitungen (Mathe III, Satz (3.5)), den wir auf die Komponentenfunktionen $f_k : U \rightarrow \mathbb{R}$ ($1 \leq k \leq m$) der Abbildung f und ihre totalen Ableitungen $f'_k(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ anwenden. Sei $c \in U$ beliebig vorgegeben und $K \subseteq U$ eine kompakte, konvexe Umgebung von c , zum Beispiel eine abgeschlossene Kreisscheibe. Außerdem sei $\|\cdot\|$ die Operatornorm auf $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, wobei wir auf \mathbb{R}^n die Maximums-Norm $\|\cdot\|_\infty$ zu Grunde legen. Da die Funktionen $x \mapsto \|f'_k(x)\|$ auf Grund der stetigen Differenzierbarkeit von f auf K stetig sind, existiert nach dem Maximumsprinzip eine Konstante $\gamma \in \mathbb{R}^+$ mit $\|f'_k(x)\| \leq \gamma$ für alle $x \in U$ und $1 \leq k \leq m$.

Seien nun $a, b \in K$ vorgegeben. Auf Grund der Konvexität ist die Verbindungsstrecke $[a, b]$ ganz in K enthalten. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein für $1 \leq k \leq m$ jeweils ein $p_k \in]a, b[$ mit $f'_k(p_k)(v) = \partial_v f_k(p_k) = f_k(b) - f_k(a)$, wobei $v = b - a$ ist. Es folgt $|f_k(b) - f_k(a)| = |f'_k(p_k)(v)| \leq \|f'_k(p_k)\| \|v\|_\infty \leq \gamma \|b - a\|_\infty$. Nehmen wir das Maximum über $1 \leq k \leq m$, so erhalten wir $\|f(b) - f(a)\|_\infty \leq \gamma \|b - a\|_\infty$. Also ist $L = \gamma$ eine Lipschitz-Konstante von $f|_K$. Damit ist die lokale Lipschitz-Stetigkeit nachgewiesen. \square

Wir werden nun zeigen, dass Jordansche Nullmengen unter Lipschitz-stetigen Abbildungen erhalten bleiben. Dazu müssen wir noch einige Vorbereitungen treffen. Einen kompakten Quader $Q = \prod_{k=1}^n [a_k, b_k]$ im \mathbb{R}^n bezeichnen wir als **Würfel**, wenn sämtliche Kantenlängen gleich sind, also $b_1 - a_1 = b_2 - a_2 = \dots = b_n - a_n$ erfüllt ist.

(1.3) Lemma Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein kompakter Quader. Dann gibt es für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ eine endliche Familie W_1, \dots, W_m von Würfeln, die Q überdecken, mit $\sum_{s=1}^m v(W_s) < v(Q) + \varepsilon$.

Beweis: Sei $Q = \prod_{k=1}^n [a_k, b_k]$ und $\ell = \min\{b_k - a_k \mid 1 \leq k \leq n\}$ die minimale Kantenlänge von Q . Die naheliegende Idee besteht darin, für eine beliebig vorgegebene natürliche Zahl N den Quader Q durch eine möglichst geringe Anzahl von Würfeln der Kantenlänge $\frac{\ell}{N}$ zu überdecken, wobei der „erste“ Quader in den Eckpunkt (a_1, \dots, a_n) von Q gesetzt wird. Für beliebig vorgegebenes $N \in \mathbb{N}$ und $1 \leq k \leq n$ definieren wir dazu $r_{k,N} = \lceil \frac{N(b_k - a_k)}{\ell} \rceil$. Wie wir sehen werden, ist dies die Anzahl der Würfel, die in Richtung der k -ten Koordinatenachse aneinandergesetzt werden müssen, um Q vollständig abzudecken. Diese Würfel können dann durch $S_N = \{s \in \mathbb{Z}^n \mid 0 \leq s_k < r_{k,N} \text{ für } 1 \leq k \leq n\}$ indiziert werden, indem wir jedem $s \in S_N$ den Würfel

$$W_s = \left[a_1 + s_1 \frac{\ell}{N}, a_1 + (s_1 + 1) \frac{\ell}{N} \right] \times \dots \times \left[a_n + s_n \frac{\ell}{N}, a_n + (s_n + 1) \frac{\ell}{N} \right] \quad \text{zuordnen.}$$

Zunächst überprüfen wir, dass diese Würfel tatsächlich unseren Quader Q überdecken. Sei dazu ein $x \in Q$ vorgegeben und $s_k = \left\lfloor \frac{N(x_k - a_k)}{\ell} \right\rfloor$ und für $1 \leq k \leq n$. Wegen $x_k \geq a_k$ gilt einerseits $s_k \geq 0$, aus $x_k \leq b_k$ folgt andererseits $s_k \leq \frac{N(b_k - a_k)}{\ell} \leq r_{k,N}$, jeweils für $1 \leq k \leq n$. Dies zeigt, dass s in S_N enthalten ist. Nach Definition der unteren Gaußklammer gilt außerdem

$$s_k \leq \frac{N(x_k - a_k)}{\ell} < s_k + 1 \quad \Rightarrow \quad s_k \frac{\ell}{N} \leq x_k - a_k < (s_k + 1) \frac{\ell}{N} \quad \Rightarrow \quad a_k + s_k \frac{\ell}{N} \leq x_k < a_k + (s_k + 1) \frac{\ell}{N}$$

für $1 \leq k \leq n$. Also ist x im Würfel W_s enthalten. Nun schätzen wir noch das Gesamtvolumen der Würfel nach oben ab. In der k -ten Komponente addieren wir die Kantenlängen der $r_{k,N}$ Würfel zu einer Gesamtlänge von

$$r_{k,N} \cdot \frac{\ell}{N} \leq \left(\frac{N(b_k - a_k)}{\ell} + 1 \right) \cdot \frac{\ell}{N} = b_k - a_k + \frac{\ell}{N}.$$

Für $N \rightarrow \infty$ läuft diese Zahl offenbar gegen den Wert $b_k - a_k$. Der von den $|S_N|$ Würfeln gebildete Quader hat also ein Gesamtvolumen von $\prod_{k=1}^n (b_k - a_k + \frac{\ell}{N})$, das für $N \rightarrow \infty$ gegen $\prod_{k=1}^n (b_k - a_k) = v(Q)$ läuft. Wählen wir für vorgegebenes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ unser $N \in \mathbb{N}$ also hinreichend groß, so kann immer erreicht werden, dass $\sum_{s \in S_N} v(W_s) < v(Q) + \varepsilon$ erfüllt ist. \square

(1.4) Satz Sei $N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Jordansche Nullmenge und $g : N \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Lipschitz-stetige Abbildung, wobei $m \geq n$ ist. Dann ist $g(N)$ eine Jordansche Nullmenge in \mathbb{R}^m .

Beweis: Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben und $L \in \mathbb{R}^+$ eine Lipschitz-Konstante von g bezüglich der Maximumsnormen $\|\cdot\|_\infty$ auf \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{R}^m . Nach Definition der Jordanschen Nullmengen gibt es eine endliche Familie Q_1, \dots, Q_r von Quadern im \mathbb{R}^n mit $\bigcup_{k=1}^r Q_k \supseteq N$ und $\sum_{k=1}^r v(Q_k) < \varepsilon$. Auf Grund von (1.3) können die Quader durch eine endliche Familie W_1, \dots, W_s von Würfeln ersetzt werden, so dass $\bigcup_{\ell=1}^s W_\ell \supseteq N$ und $\sum_{\ell=1}^s v(W_\ell) < 2\varepsilon$ erfüllt ist. An diesen Abschätzungen ändert sich auch nichts, wenn wir alle Würfel W_ℓ mit $N \cap W_\ell = \emptyset$ aus der Familie entfernen.

Für jedes $\ell \in \{1, \dots, s\}$ sei nun p_ℓ ein festgewählter Punkt in $N \cap W_\ell$ und s_ℓ die Kantenlänge des Würfels. Nach eventuellem Übergang zu kleineren Würfeln können wir $s_\ell < 1$ voraussetzen. Es gilt jeweils $v(W_\ell) = s_\ell^n$, und für jeden weiteren Punkt $q \in N \cap W_\ell$ ist der Abstand $\|q - p_\ell\|_\infty$ durch den Wert s_ℓ beschränkt. Es folgt $\|g(q) - g(p_\ell)\|_\infty \leq L\|q - p_\ell\|_\infty \leq Ls_\ell$ für alle $q \in N \cap W_\ell$. Dies zeigt, dass $g(N \cap W_\ell)$ in einer $\|\cdot\|_\infty$ -Kugel vom Radius Ls_ℓ enthalten ist; dies ist ein m -dimensionaler Würfel der Kantenlänge $2Ls_\ell$ und dem Volumen $2^m L^m s_\ell^m$. Die Menge $g(N)$ kann also durch Würfel mit einem Gesamtvolumen von

$$\sum_{\ell=1}^s 2^m L^m s_\ell^m \leq 2^m L^m \sum_{\ell=1}^s s_\ell^n = 2^m L^m \sum_{\ell=1}^s v(W_\ell) < 2^{m+1} L^m \varepsilon$$

überdeckt werden. Weil L und m Konstanten sind und ε beliebig klein gewählt werden kann, zeigt dies, dass es sich bei $g(N)$ um eine Jordansche Nullmenge handelt. \square

Ohne die Voraussetzung $m \geq n$ funktioniert der Beweis nicht, weil die Abschätzung $s_\ell^m \leq s_\ell^n$ im letzten Beweisschritt dann nicht gilt. Die Aussage des Satzes wird für $m < n$ auch falsch: Beispielsweise überprüft man leicht, dass $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x$ eine Lipschitz-stetige Abbildung mit Lipschitz-Konstante $L = 1$ ist, wenn wir auf \mathbb{R}^2 die $\|\cdot\|_\infty$ -Norm zu Grunde legen. Die Menge $N = [0, 1] \times \{0\}$ ist eine Jordansche Nullmenge in \mathbb{R}^2 , aber $\pi(N) = [0, 1]$ ist keine Jordansche Nullmenge in \mathbb{R} . Statt dessen gilt $v(\pi(N)) = 1$.

(1.5) Folgerung Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar, wobei $m \geq n$ ist. Ist $N \subseteq U$ eine kompakte Jordansche Nullmenge, dann ist $g(N)$ eine kompakte Jordansche Nullmenge in \mathbb{R}^m .

Beweis: Wir wissen bereits, dass das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung kompakt ist (Mathe III, Satz (2.81)). Außerdem wissen wir aus (1.2), dass g zumindest lokal Lipschitz-stetig ist. Zu jedem Punkt $x \in N$ gibt es also eine offene Umgebung U_x , so dass $g|_{U_x}$ Lipschitz-stetig mit einer Konstanten L_x ist, bezüglich beliebig gewählter Normen auf \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^m . Da N kompakt ist, finden wir eine endliche Familie x_1, \dots, x_r von Punkten, so dass N bereits von U_{x_1}, \dots, U_{x_r} überdeckt wird. Wegen (1.4) ist mit $N \cap U_{x_k}$ auch $g(N \cap U_{x_k})$ eine Jordansche Nullmenge ist, für $1 \leq k \leq r$. Also ist auch die endliche Vereinigung $g(N) = \bigcup_{k=1}^r g(N \cap U_{x_k})$ eine Jordansche Nullmenge. \square

Unser Ziel in diesem Abschnitt besteht nun darin, die aus der Mathe III bekannte Substitutionsregel für die Integration eindimensionaler Funktionen

$$\int_a^b (f \circ \varphi)(x) \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt$$

auf höhere Dimension zu übertragen. Bei dieser Verallgemeinerung wird die Determinante linearer Abbildungen eine wichtige Rolle spielen. Erinnern wir uns zunächst daran, wie in der Linearen Algebra die Definition der Determinantenfunktion $\det : \mathcal{M}_{n, \mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ motiviert wurde. Gesucht war eine Funktion, die jeder Matrix $A \in \mathcal{M}_{n, \mathbb{R}}$ das Volumen des Parallelotops

$$P(A) = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k a_{\bullet k} \mid \lambda_k \in [0, 1] \text{ für } 1 \leq k \leq n \right\}$$

zuordnet, das von den Spaltenvektoren $a_{\bullet 1}, \dots, a_{\bullet n} \in \mathbb{R}^n$ der Matrix aufgespannt wird, zuzüglich eines Vorzeichens, das von der Reihenfolge der Vektoren abhing. Betrachten wir nun zur Matrix A die lineare Abbildung

$$\phi_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad v \mapsto Av$$

und wenden wir diese auf den Einheitswürfel $Q = [0, 1]^n$ an, dann erhalten wir $\phi_A(Q) = P(A)$ als Bildmenge, wie man mit Hilfe der Linearität von ϕ_A unmittelbar überprüft. Unter der Voraussetzung, dass $|\det(A)|$ tatsächlich mit dem Jordanschen Volumen von $P(A)$ übereinstimmt, gilt also

$$v(\phi_A(Q)) = v(P(A)) = |\det(A)| = |\det(\phi_A)|v(Q). \quad (1.1)$$

Aus der mehrdimensionalen Substitutionsregel wird sich ergeben, dass $v(\phi(B)) = |\det(\phi)|v(B)$ für beliebige lineare Endomorphismen ϕ von \mathbb{R}^n und Jordan-messbare Teilmengen $B \subseteq \mathbb{R}^n$ gültig ist. Hier aber gehen wir zunächst umgekehrt vor und setzen diese Gleichung voraus, um durch heuristische Überlegungen eine naheliegende, mehrdimensionale Verallgemeinerung der Substitutionsregel zu finden.

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und D eine Jordan-messbare Teilmenge von \mathbb{R}^n mit $D \subseteq G$. Außerdem sei $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion. Diese Funktion wird die Rolle der Substitutionsfunktion von oben übernehmen. Unser Ziel besteht darin, einen einfachen Ausdruck für das Integral einer Funktion f integriert über die Bildmenge $\varphi(D)$ zu finden. Der Einfachheit halber gehen wir zunächst davon aus, dass D ein kompakter Quader ist. Für jede Zerlegung \mathcal{Z} von D schneiden sich die Quader $K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})$ nur in einer Jordanschen Nullmenge, und wegen (1.5) gilt dasselbe für die Mengen $\varphi(K)$ in der Vereinigung

$$\varphi(D) = \bigcup_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})} \varphi(K).$$

Bezeichnet wir für jedes $K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})$ mit a_K einen beliebig gewählten Punkt aus K . Wird die Zerlegung \mathcal{Z} sehr fein gewählt, dann können wir davon ausgehen, dass die Funktion f in der Nähe des Punktes $\varphi(a_K)$ nahezu konstant ist, also auf der gesamten Bildmenge $\varphi(K)$ fast genau den Wert $(f \circ \varphi)(a_K)$ annimmt. Dies liefert uns die Näherung

$$\int_{\varphi(D)} f(x) dx = \sum_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})} \int_{\varphi(K)} f(x) dx \approx \sum_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})} (f \circ \varphi)(a_K) v(\varphi(K)). \quad (1.2)$$

Versuchen wir nun, das Volumen von $\varphi(K)$ zu approximieren. Weil φ (stetig) differenzierbar ist, kann es in einer Umgebung von a_K durch eine affin-lineare Funktion angenähert werden: Für alle $t \in \mathbb{R}^n$ mit hinreichend kleiner Norm $\|t\|_\infty$ gilt $\varphi(a_K + t) \approx \varphi(a_K) + \varphi'(a_K)(t)$. Ist der Quader $K^{(0)} \subseteq \mathbb{R}^n$ so gewählt, dass $a_K + K^{(0)} = K$ gilt, dann haben bei hinreichend fein gewählter Zerlegung alle Punkte $t \in K^{(0)}$ eine kleine Norm, und wir erhalten

$$\begin{aligned} v(\varphi(K)) &\approx v(\varphi(a_K) + \varphi'(a_K)(K^{(0)})) = v(\varphi'(a_K)(K^{(0)})) \\ &= |\det \varphi'(a_K)| v(K^{(0)}) = |\det \varphi'(a_K)| v(K), \end{aligned}$$

wobei im zweiten Schritt die Translationsinvarianz des Jordan-Volumens und im dritten Schritt (1.1) verwendet wurde. Setzen wir dies nun in (1.2) ein, so erhalten wir

$$\int_{\varphi(D)} f(x) dx \approx \sum_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})} (f \circ \varphi)(a_K) |\det \varphi'(a_K)| v(K) \approx \int_D (f \circ \varphi)(t) |\det \varphi'(t)| dt.$$

Dies ist die gesuchte mehrdimensionale Verallgemeinerung der eindimensionalen Substitutionsregel. Da jede Jordan-messbare Teilmenge durch disjunkte Vereinigungen kompakter Quader beliebig angenähert werden kann, ist zu erwarten, dass auch in der Gleichung der kompakte Quader D durch eine beliebige kompakte Jordan-messbare Menge ersetzt werden kann.

(1.6) Satz (mehrdimensionale Substitutionsregel)

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und sei $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine injektive, stetig differenzierbare Abbildung, wobei wir voraussetzen, dass $\det \varphi'(t)$ entweder für alle $t \in G$ positiv oder für alle $t \in G$ negativ ist. Sei $T \subseteq G$ eine Jordan-messbare, kompakte Teilmenge und $f : \varphi(T) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Dann gilt

- (i) Die Bildmenge $\varphi(T) \subseteq \mathbb{R}^n$ ist Jordan-messbar.
- (ii) Die Funktion f ist auf $\varphi(T)$, die Funktion $f \circ \varphi$ auf T Riemann-integrierbar.
- (iii) Es gilt
$$\int_{\varphi(T)} f(x) dx = \int_T (f \circ \varphi)(t) |\det \varphi'(t)| dt. \quad (S)$$

Zusatz: Die Substitutionsregel ist auch dann noch gültig, wenn eine Jordansche Nullmenge $N \subseteq T$ existiert, auf der die Funktion $t \mapsto \det \varphi'(t)$ möglicherweise Null wird. Ebenso genügt es, dass φ auf $T \setminus N$ injektiv ist. Die Funktion $t \mapsto \det \varphi'(t)$ darf aber weiterhin auf G nicht zugleich positive und negative Werte annehmen.

In der speziellen Situation, dass $n = 1$, $G \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes und $T \subseteq G$ ein kompaktes Intervall ist, folgt dieser Satz direkt aus der eindimensionalen Substitutionsregel der Mathe I-Vorlesung. In diesem Fall gilt $\det \varphi'(t) = \varphi'(t)$ für alle $t \in G$. Sei $T = [a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$, und setzen wir zunächst voraus, dass $\varphi'(t) > 0$ für alle $t \in G$ gilt. Dann ist die Funktion φ auf ihrem gesamten Definitionsbereich streng monoton wachsend, insbesondere gilt $\varphi(a) < \varphi(b)$ und $\varphi(T) = [\varphi(a), \varphi(b)]$. Mit Hilfe der eindimensionalen Substitutionsregel erhalten wir

$$\int_T (f \circ \varphi)(t) |\det \varphi'(t)| dt = \int_a^b (f \circ \varphi)(t) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_{\varphi(T)} f(x) dx.$$

Im anderen Fall gilt $\varphi'(t) < 0$ für alle $t \in G$. Dann ist φ überall streng monoton fallend, es gilt $\varphi(a) > \varphi(b)$ und $\varphi(T) = [\varphi(b), \varphi(a)]$. Auch diesmal erhalten wir, wenn auch auf einem leicht veränderten Rechenweg, wegen $|\det \varphi'(t)| = |\varphi'(t)| = -\varphi'(t)$ das Resultat

$$\begin{aligned} \int_T (f \circ \varphi)(t) |\det \varphi'(t)| dt &= - \int_a^b (f \circ \varphi)(t) \varphi'(t) dt = - \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx \\ &= \int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(x) dx = \int_{\varphi(T)} f(x) dx. \end{aligned}$$

Der Ausdruck $\det \varphi'(t)$ unter dem Integralzeichen in der Gleichung (S) wird die **Funktionaldeterminante** von φ genannt. Wendet man die Gleichung auf die konstante Funktion $f(x) = 1$ an, so erhält man unter den angegebenen Voraussetzungen an G , φ und T die Gleichung

$$v(\varphi(T)) = \int_T |\det \varphi'(t)| dt.$$

Ist φ darüber hinaus eine bijektive, lineare Abbildung, dann gilt $\varphi'(t) = \varphi$ für alle $t \in T$, und wir erhalten die Gleichung $v(\varphi(T)) = |\det \varphi| v(T)$ zurück, die oben der Ausgangspunkt unserer Überlegungen gewesen war. Auch im Fall $\det \varphi = 0$ ist die Gleichung noch gültig, weil $\varphi(T)$ in diesem Fall in einer Hyperebene von \mathbb{R}^n liegt und damit eine Nullmenge ist (was wir uns im letzten Semester zumindest für die Hyperebene $\mathbb{R} \times \{0\}$ im \mathbb{R}^2 klargemacht haben).

Der Beweis von Satz (1.6) ist sehr aufwändig und wird an das Ende dieses Kapitels verschoben. Hier schauen wir uns vorher noch einige Beispiele für häufig verwendet Transformationsfunktionen φ an, die in der Geometrie und der Physik eine wichtige Rolle spielen.

Integration in Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten

Im letzten Semester wurde die **Polarkoordinaten-Abbildung** $\rho_{\text{pol}} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\rho_{\text{pol}}(r, \varphi) = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$$

eingeführt. Die Ableitung dieser Funktion in einem beliebigen Punkt ist gegeben durch

$$\rho'_{\text{pol}}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

mit der Funktionaldeterminante $\det \rho'_{\text{pol}}(r, \varphi) = r$. Die Abbildung ρ_{pol} ist als Funktion auf ihrem Definitionsbereich $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ nicht injektiv, und erfüllt in den Punkten $(0, \varphi)$ mit $\varphi \in \mathbb{R}$ auch nicht die Bedingung $\det \rho'_{\text{pol}}(0, t) \neq 0$. Schränkt man die Abbildung jedoch auf den die offene Teilmenge $U = \mathbb{R}^+ \times]0, 2\pi[$ ein, so erhält man eine injektive Abbildung mit $\det \rho'_{\text{pol}}(r, \varphi) \neq 0$ für alle $(r, \varphi) \in U$. Definieren wir nun

$$N = (\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi]) \setminus U = \{0\} \times [0, 2\pi] \cup \mathbb{R}_+ \times \{0, 2\pi\} \quad ,$$

dann ist $N \cap T$ für jede kompakte, Jordan-messbare Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Jordansche Nullmenge in \mathbb{R}^2 . Auf Grund des Zusatzes zu (1.6) gilt für jede solche Menge $T \subseteq \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi]$ und jede rellwertige und stetige Funktion auf $\rho_{\text{pol}}(T)$ somit

$$\int_{\rho_{\text{pol}}(T)} f(x, y) d(x, y) = \int_T (f \circ \rho_{\text{pol}})(r, \varphi) \cdot r d(r, \varphi). \quad (1.3)$$

Als einfache Anwendungsbeispiele für diese Formel berechnen wir ein weiteres Mal das **Kegel-** und das **Halbkugelvolumen**. Für beliebige $s, h \in \mathbb{R}^+$ definieren wir

$$\begin{aligned} K_{s,h} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x, y)\|_2 \leq s, 0 \leq z \leq s - \frac{h}{s} \|(x, y)\|_2\} \\ H_s &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x, y, z)\|_2 \leq s, z \geq 0\}. \end{aligned}$$

Bei $K_{s,h}$ handelt es sich um den Kegel der Höhe h über der Grundfläche $B_s = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\|_2 \leq s\}$, dem Kreis vom Radius s um den Mittelpunkt $(0, 0)$, und H_s ist die obere Hälfte der Kugel vom Radius s um den Ursprung $(0, 0, 0)$. Definieren wir Funktionen $f, g : B_s \rightarrow \mathbb{R}_+$ durch

$$f(x, y) = h - \frac{h}{s} \|(x, y)\|_2 \quad \text{und} \quad g(x, y) = \sqrt{s^2 - \|(x, y)\|_2^2} \quad ,$$

dann sind $K_{s,h}$ und H_s die Ordinatenmengen der Funktionen f und g , d.h. es gilt $K_{s,h} = \Lambda(f)$ und $H_s = \Lambda(g)$. Für den Kegel erhält man die Gleichung durch die Äquivalenzumformung

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in K_{s,h} &\Leftrightarrow \|(x, y)\|_2 \leq s \quad \text{und} \quad 0 \leq z \leq s - \frac{h}{s} \|(x, y)\|_2 \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in B_s \quad \text{und} \quad 0 \leq z \leq f(x, y) \quad \Leftrightarrow (x, y, z) \in \Lambda(f). \end{aligned}$$

Der entsprechende Beweis für die Halbkugel ist eine ebenso einfache Übungsaufgabe. Nach Satz (4.35) der Mathe III-Vorlesung erhält man die Volumina von $K_{s,h}$ und H_s als Integrale von f und g über B_s , es gilt also

$$v_3(K_{s,h}) = \int_{B_s} f(x, y) d(x, y) \quad \text{und} \quad v_3(H_s) = \int_{B_s} g(x, y) d(x, y).$$

Auf Grund der Wurzelausdrücke ist aber besonders die Auswertung des ersten Integrals in kartesischen Koordinaten eine recht unangenehme Angelegenheit. Wir werden jetzt sehen, dass die Berechnung in Polarkoordinaten bedeutend einfacher ist. Ist allgemein $(x, y) \in B_s$ und $(r, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ mit $\rho_{\text{pol}}(r, \varphi) = (x, y)$, dann gilt wegen $x = r \cos(\varphi)$ und $y = r \sin(\varphi)$ jeweils

$$\|(x, y)\|_2 = \sqrt{(r \cos(\varphi))^2 + (r \sin(\varphi))^2} = \sqrt{r^2(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi))} = \sqrt{r^2} = r$$

und somit $(f \circ \rho_{\text{pol}})(r, \varphi) = f(x, y) = h - \frac{h}{s}\|(x, y)\|_2 = h - \frac{h}{s}r$. Setzen wir nun $T = [0, s] \times [0, 2\pi]$, dann erhalten wir mit (1.3) das Kegelvolumen

$$\begin{aligned} \int_{B_s} f(x, y) d(x, y) &= \int_{\rho_{\text{pol}}(T)} f(x, y) d(x, y) = \int_T (f \circ \rho_{\text{pol}})(r, \varphi) r d(r, \varphi) = \\ \int_T (h - \frac{h}{s}r) r d(r, \varphi) &= \int_0^s \left(\int_0^{2\pi} (h - \frac{h}{s}r) d\varphi \right) r dr = \int_0^s [(h - \frac{h}{s}r)\varphi]_0^{2\pi} r dr = \\ \int_0^s 2\pi(hr - \frac{h}{s}r^2) dr &= 2\pi h \left[\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{3s}r^3 \right]_0^s = 2\pi h \left(\frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{3}s^2 \right) = 2\pi h \cdot \frac{1}{6}s^2 = \frac{1}{3}h\pi s^2 \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit der bekannten Regel „Volumen des Halbkugels = $\frac{1}{3}$ mal Grundfläche mal Höhe“. Für die Halbkugel gilt entsprechend $(g \circ \rho_{\text{pol}})(r, \varphi) = \sqrt{s^2 - r^2}$. Wie beim Kegel erhalten wir für das Halbkugelvolumen

$$\begin{aligned} \int_{B_s} g(x, y) d(x, y) &= \int_{\rho_{\text{pol}}(T)} g(x, y) d(x, y) = \int_T (g \circ \rho_{\text{pol}})(r, \varphi) r d(r, \varphi) = \\ \int_T \sqrt{s^2 - r^2} r d(r, \varphi) &= \int_0^s \left(\int_0^{2\pi} r \sqrt{s^2 - r^2} d\varphi \right) dr = \int_0^s [r \sqrt{s^2 - r^2}]_0^{2\pi} dr = \\ 2\pi \int_0^s r \sqrt{s^2 - r^2} dr &= \pi \int_0^s (2r) \sqrt{s^2 - r^2} dr \stackrel{(*)}{=} \pi \int_0^{s^2} \sqrt{s^2 - t} dt = \\ (-\pi) \int_0^{s^2} (-1) \sqrt{s^2 - t} dt &\stackrel{(*)}{=} (-\pi) \int_{s^2}^0 t^{1/2} dt = \pi \int_0^{s^2} t^{1/2} dt = \pi \left[\frac{2}{3} t^{3/2} \right]_0^{s^2} \\ &= \frac{2}{3} \pi (s^2)^{3/2} = \frac{2}{3} \pi s^3 \end{aligned}$$

wobei an den mit (*) gekennzeichneten Stellen die eindimensionale Substitutionsregel angewendet wurde. Es fällt auf, dass im Gegensatz zu der Berechnung des Kugelvolumens, die wir in der Mathe III-Vorlesung durchgeführt haben, hier die Integralformel $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2}\pi$ nicht benötigt wurde. Dies kann als Hinweis gewertet werden, dass die Verwendung der Polarkoordinaten tatsächlich eine substantielle Vereinfachung darstellt.

In Analogie zu den Polarkoordinaten verwendet man zur Berechnung dreidimensionaler Integrale die aus der Mathe III-Vorlesung ebenfalls bekannten **Zylinderkoordinaten**

$$\rho_{\text{zyl}} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (r, h, \varphi) \mapsto (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), h)$$

und die **Kugelkoordinaten** gegeben durch

$$\rho_{\text{kug}} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (r, \vartheta, \varphi) \mapsto (r \cos(\vartheta) \cos(\varphi), r \cos(\vartheta) \sin(\varphi), r \sin(\vartheta))$$

deren Funktionaldeterminanten durch $\det \rho'_{\text{zyl}}(r, h, \varphi) = r$ bzw. $\det \rho'_{\text{kug}}(r, \vartheta, \varphi) = -r^2 \cos(\vartheta)$ gegeben sind. Für jede kompakte, Jordan-messbare Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times [0, 2\pi]$ gilt hier entsprechend

$$\int_{\rho_{\text{zyl}}(T)} f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_T (f \circ \rho_{\text{zyl}})(r, h, \varphi) \cdot r d(r, h, \varphi).$$

Im Fall der Kugelkoordinaten erhalten wir für jede kompakte, Jordan-messbare Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}_+ \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$ die Gleichung

$$\int_{\rho_{\text{kug}}(T)} f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_T (f \circ \rho_{\text{kug}})(r, \vartheta, \varphi) \cdot r^2 \cos(\vartheta) d(r, \vartheta, \varphi).$$

Hierbei ist zu beachten, dass in die mehrdimensionale Substitutionsregel der **Betrag** der Funktionaldeterminante $\det \rho'_{\text{kug}}(r, \vartheta, \varphi)$ eingeht, und dass $\cos(\vartheta) \geq 0$ und somit $|\det \rho'_{\text{kug}}(r, \vartheta, \varphi)| = |-r^2 \cos(\vartheta)| = r^2 \cos(\vartheta)$ für $\vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ gilt. Anwendungen dieser Gleichungen für Zylinder- und Kugelkoordinaten behandeln wir in den Übungen.

Beweis der mehrdimensionalen Substitutionsregel

Im Wesentlichen erfolgt der Beweis von (1.6) durch vollständige Induktion über die Dimension n . Für den Induktionsschritt benötigen wir einen Satz aus der mehrdimensionalen Differentialrechnung, den wir hier aus Zeitgründen leider nicht beweisen können. Wir erinnern daran, dass eine stetig differenzierbare Abbildung auch als \mathcal{C}^1 -Abbildung bezeichnet wird.

(1.7) Satz (Satz über die lokale Umkehrbarkeit)

Sei $n \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine \mathcal{C}^1 -Abbildung. Dann gibt es für jeden Punkt $a \in U$ mit $\det g'(a) \neq 0$ eine offene Umgebung $W \subseteq U$ und eine Abbildung $h : g(W) \rightarrow W$ derart, dass $g(W) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und die Gleichungen

$$h \circ g|_W = \text{id}_W \quad \text{und} \quad (g|_W) \circ h = \text{id}_{g(W)} \quad \text{erfüllt sind.}$$

(1.8) Folgerung Sei $n \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine \mathcal{C}^1 -Abbildung.

Dann ist auch die Bildmenge $g(U)$ offen.

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass für jedes $a \in U$ eine offene Umgebung von $g(a)$ in $g(U)$ enthalten ist. Tatsächlich gibt es wegen nach (1.7) eine offene Umgebung $W \subseteq U$ von a mit der Eigenschaft, dass $g(W) \subseteq g(U)$ in \mathbb{R}^n ebenfalls offen ist. \square

(1.9) Lemma Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $Q \subseteq U$ ein kompakter Quader. Dann gibt es einen offenen Quader \tilde{Q} mit $Q \subseteq \tilde{Q} \subseteq U$.

Beweis: Sei $Q = \prod_{k=1}^n [a_k, b_k]$ mit $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $a_k < b_k$ für $1 \leq k \leq n$, und nehmen wir an, dass ein Quader \tilde{Q} wie angegeben nicht existiert. Setzen wir für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ jeweils $Q_\varepsilon = \prod_{k=1}^n]a_k - \varepsilon, a_k + \varepsilon[$, dann gilt also

$Q_\varepsilon \not\subseteq U$ für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Insbesondere gibt es eine Folge $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ von Punkten im \mathbb{R}^n mit der Eigenschaft $x_m \in Q_{1/m} \setminus U$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Nun ist die gesamte Folge in der kompakten Menge \bar{Q}_1 enthalten. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass enthält diese Folge eine konvergente Teilfolge. Bezeichnen wir den Grenzwert dieser Teilfolge mit x , dann ist x einerseits in $Q = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} Q_{1/m}$, andererseits auf Grund der Abgeschlossenheit von $\mathbb{R}^n \setminus U$ auch im Komplement von U enthalten. Aber dies steht zu $Q \subseteq U$ im Widerspruch. \square

Für die Ausführung des Induktionsschritts im Beweis von (1.6) ist nun die folgende Aussage entscheidend.

(1.10) Proposition (Zerlegungssatz)

Sei $n \geq 2$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion mit der Eigenschaft, dass $\det \varphi'(x) \neq 0$ für alle $x \in U$ gilt. Dann gibt es für jeden Punkt $a \in U$ nach eventueller Umnummerierung der Koordinaten eine offene Umgebung $W \subseteq U$ und Funktionen $\varrho : W \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\psi : \varrho(W) \rightarrow \mathbb{R}^n$, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind.

- (i) Die Bildmenge $\varrho(W)$ ist offen in \mathbb{R}^n .
- (ii) Die Abbildungen ϱ und ψ sind beide injektiv und stetig differenzierbar.
- (iii) Es gilt $\varphi|_W = \psi \circ \varrho$.
- (iv) Die Abbildung ψ lässt die ersten $n - 1$, die Abbildung ϱ die letzte Koordinate unverändert, d.h. für alle $x \in W$ und $y \in \varrho(W)$ gilt

$$\varrho(x) = (\varrho_1(x), \dots, \varrho_{n-1}(x), x_n) \quad \text{und} \quad \psi(y) = (y_1, \dots, y_{n-1}, \psi_n(y)).$$

Beweis: Wegen $\det \varphi'(a) \neq 0$ ist die Ableitungsmatrix $\varphi'(a)$ vom Rang n . Streichen wir die letzte Zeile, so ist die verbleibende Matrix vom Rang $n - 1$. Mindestens eine Spalte dieser Matrix kann gestrichen werden, ohne dass sich der Rang dadurch weiter verringert. Nach eventueller Umnummerierung der Koordinaten können wir davon ausgehen, dass dies auf die letzte Spalte zutrifft. Die linke obere $(n - 1) \times (n - 1)$ -Teilmatrix von $\varphi'(a)$ ist dann vom Rang $n - 1$ und somit invertierbar.

Sei nun $\tilde{\varrho} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert durch $\tilde{\varrho}(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x), x_n)$ für alle $x \in U$. Dann stimmt die linke obere $(n - 1) \times (n - 1)$ -Teilmatrix von $\tilde{\varrho}'(a)$ mit der von $\varphi'(a)$ überein. Die letzte Zeile und Spalte von $\tilde{\varrho}'(a)$ hat als einzigen Eintrag ungleich Null eine 1 in der letzten Komponente. Insgesamt folgt daraus $\det \tilde{\varrho}'(a) \neq 0$. Wir können somit (1.7) anwenden und erhalten eine offene Umgebung $W \subseteq U$ von a , so dass $V = \varrho(W)$ offen in \mathbb{R}^n (also Bedingung (i) erfüllt) ist und eine Umkehrabbildung $\lambda : V \rightarrow W$ von $\varrho = \tilde{\varrho}|_W$ existiert. Insbesondere gilt $\lambda_j(\varrho(x)) = x_j$ für $1 \leq j \leq n$, für alle $x \in W$.

Nun definieren wir $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ für alle $y \in V$ durch $\psi(y) = (y_1, \dots, y_{n-1}, \varphi_n(\lambda_1(y)), \dots, \varphi_n(\lambda_{n-1}(y)), y_n)$. Offenbar ist auch die Abbildung ψ auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig differenzierbar (da alle ihre Komponentenfunktionen stetig differenzierbar sind). Für alle $x \in W$ gilt

$$\begin{aligned} (\psi \circ \varrho)(x) &= \psi(\varrho_1(x), \dots, \varrho_{n-1}(x), x_n) = (\varrho_1(x), \dots, \varrho_{n-1}(x), \varphi_n(\lambda_1(\varrho(x))), \dots, \varphi_n(\lambda_{n-1}(\varrho(x))), x_n) = \\ &(\varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x), \varphi_n(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x), \varphi_n(x)) = \varphi(x). \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass Bedingung (iii) erfüllt ist, und Bedingung (iv) ist auf Grund der Definition von ϱ und ψ offensichtlich. Auf Grund der Injektivität von $\varphi|_W$ und der Gleichung $\psi \circ \varrho = \varphi|_W$ müssen auch ϱ auf W und ψ auf $\varrho(W)$ injektiv sein. Also ist auch Bedingung (ii) gültig. \square

Der Übersichtlichkeit halber teilen wir den Beweis von (1.6) in eine Reihe von Einzelschritten auf.

- ① Beweis der Teilaussagen (i) und (ii)
- ② Rückführung des Beweises von (S) auf den Fall, dass $G \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \det \varphi'(t)$ beschränkt ist
- ③ Für jeden Quader $Q \supseteq T$ gibt es eine Zerlegung \mathcal{Z} , so dass entweder $K \subseteq G$ oder $K \cap T = \emptyset$ für alle $K \in \mathcal{Z}(\mathcal{Z})$ erfüllt ist.
- ④ Rückführung auf den Fall, dass T ein kompakter Quader und G ein offener Quader ist
- ⑤ Beweis von (S) für Dimension $n = 1$
- ⑥ Beweis von (S) für den Fall, dass die Substitutionsfunktion die spezielle Form $\varphi(t, t_n) = (t, \psi(t, t_n))$ besitzt, mit einer Funktion $\psi : G \rightarrow \mathbb{R}$
- ⑦ Gilt (1.6) in Dimension $n - 1$, dann ist (S) auch in Dimension n gültig (für $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$).
- ⑧ Beweis des Zusatzes

Wir arbeiten diese Einzelschritte nun der Reihe nach ab.

- ① Unter den in (1.6) angegebenen Voraussetzungen gelten die dort genannten Aussagen (i) und (ii).

Beweis: Da T Jordan-messbar ist, handelt es sich bei ∂T um eine Nullmenge. Die Menge T ist nach Voraussetzung kompakt, und als abgeschlossene Teilmenge von T ist damit auch ∂T kompakt. Aus der Mathe III ist bekannt, dass eine kompakte Nullmenge zugleich eine Jordansche Nullmenge ist. Auf Grund der stetigen Differenzierbarkeit von φ ist nach (1.5) auch $\varphi(\partial T)$ eine Jordansche Nullmenge. Da es sich bei φ wegen (1.7) um einen Homöomorphismus von G auf $\varphi(G)$ handelt, gilt außerdem $\varphi(\partial T) = \partial\varphi(T)$. Dies zeigt, dass auch $\partial\varphi(T)$ eine Jordansche Nullmenge und $\varphi(T)$ somit Jordan-messbar ist. Als stetige Funktion auf der Jordan-messbaren Menge $\varphi(T)$ ist f Riemann-integrierbar. Die Abbildung $f \circ \varphi$ ist auf T stetig und somit ebenfalls Riemann-integrierbar.

- ② Ist die Gleichung (S) immer dann erfüllt, wenn die Funktion $t \mapsto \det \varphi'(t)$ auf G beschränkt ist, dann gilt sie auch im allgemeinen Fall.

Beweis: Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ und $r \in \mathbb{R}^+$ bezeichnen wir mit $W_r(x)$ den offenen Ball vom Radius r bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$ -Norm; dabei handelt es sich um einen Würfel der Kantenlänge $2r$. Für jedes $x \in G$ sei $\varepsilon(x) \in \mathbb{R}^+$ so gewählt, dass $W_{\varepsilon(x)}(x) \subseteq G$ gilt. Dann bilden auch die Würfel $W_{\varepsilon(x)/3}(x) \subseteq G$ mit $x \in T$ bereits eine offene Überdeckung von T . Weil T kompakt ist, gibt es eine endliche Menge $x_1, \dots, x_m \in T$, so dass T bereits von den Würfeln $W_k = W_{\varepsilon(x_k)/3}(x_k)$ überdeckt wird. Darüber hinaus gilt

$$T \subseteq \bigcup_{k=1}^m W_k \subseteq \bigcup_{k=1}^m \bar{W}_k \subseteq G \quad ,$$

wobei \bar{W}_k jeweils den Abschluss von W_k bezeichnet. Weil die Menge $V = \bigcup_{k=1}^m \bar{W}_k$ kompakt ist, ist die Abbildung $t \mapsto \det \varphi'(t)$ auf V beschränkt, somit erst recht auf $\tilde{G} = \bigcup_{k=1}^m W_k$. Wegen $T \subseteq \tilde{G} \subseteq G$ können wir in der Gleichung (S) die Funktion φ durch die Einschränkung $\varphi|_{\tilde{G}}$ ersetzen, ohne dass sich die Integrale auf beiden Seiten der Gleichung ändern.

③ Für jeden Quader $Q \supseteq T$ gibt es eine Zerlegung \mathcal{Z} , so dass entweder $K \subseteq G$ oder $K \cap T = \emptyset$ für alle $K \in \mathcal{Z}(\mathcal{Z})$ erfüllt ist.

Beweis: Seien die Würfel $W_k = W_{\varepsilon(x_k)/3}(x)$ wie im Beweis von Schritt ② gewählt und $r_k = \varepsilon(x_k)$ für $1 \leq k \leq m$. Mit V_k bezeichnen wir jeweils den Würfel mit demselben Mittelpunkt $x_k \in T$ wie W_k vom Radius r_k , außerdem setzen wir $r = \min\{r_1, \dots, r_m\}$. Nach Konstruktion gilt

$$T \subseteq \bigcup_{k=1}^m W_k \subseteq \bigcup_{k=1}^m V_k \subseteq G.$$

Wir zeigen nun: Ist W ein kompakter Würfel vom $\|\cdot\|_\infty$ -Radius $\leq \frac{1}{6}r$, der mindestens einen Punkt $x_0 \in T$ enthält, dann folgt $W \subseteq G$. Weil T von den Würfeln W_1, \dots, W_m überdeckt wird, können wir $x_0 \in W_k$ annehmen. Sei nun \tilde{x} der Mittelpunkt von W und $x \in W$ beliebig. Zu zeigen ist $x \in G$. Es gilt

$$\|x - x_k\|_\infty \leq \|x - \tilde{x}\|_\infty + \|\tilde{x} - x_0\|_\infty + \|x_0 - x_k\|_\infty \leq \frac{1}{6}r + \frac{1}{6}r + \frac{1}{3}r_k \leq \frac{2}{3}r_k < r_k,$$

also $x \in V_k$ und somit $x \in G$. Sei nun $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein kompakter Würfel mit $Q \subseteq T$ und \mathcal{Z} eine Zerlegung von Q bestehend aus Würfeln vom $\|\cdot\|_\infty$ -Radius $\leq \frac{1}{6}r$. Wie soeben gezeigt, ist dann jeder Würfel $R \in \mathcal{Z}(\mathcal{Z})$ entweder zu T disjunkt oder vollständig in G enthalten.

④ Setzt man die Gültigkeit von Satz (1.6) in der speziellen Situation voraus, dass G ein offener und T ein kompakter Quader im \mathbb{R}^n ist, dann gilt dieser Satz auch im allgemeinen Fall.

Beweis: Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben und $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein kompakter Quader mit $Q^\circ \supseteq T$. Nach Schritt ③ gibt es eine Zerlegung \mathcal{Z} von Q , so dass für alle $R \in \mathcal{Z}(\mathcal{Z})$ entweder $R \cap T = \emptyset$ oder $R \subseteq G$ gilt. Wir definieren nun die Quadermengen

$$\mathcal{A} = \{R \in \mathcal{Z}(\mathcal{Z}) \mid R \cap \partial T \neq \emptyset\} \quad \text{und} \quad \mathcal{B} = \{R \in \mathcal{Z}(\mathcal{Z}) \mid R \subseteq T^\circ\}$$

und setzen $A = \bigcup_{R \in \mathcal{A}} R$ sowie $B = \bigcup_{R \in \mathcal{B}} R$. Da ∂T auf Grund der Jordan-Messbarkeit von T eine Nullmenge, wegen der Kompaktheit von ∂T sogar eine Jordansche Nullmenge ist, können wir nach eventueller Verfeinerung von \mathcal{Z} voraussetzen, dass $v(A) < \varepsilon$ gilt. Jeder Punkt $x \in T$ ist in einem Quader $R \in \mathcal{Z}(\mathcal{Z})$ enthalten. Dieser liegt entweder im Inneren von T , oder er scheidet ∂T ; somit gilt $x \in A \cup B$. Aus $T \subseteq A \cup B$ folgt $T \setminus B \subseteq A$ und $v(T \setminus B) \leq v(A) < \varepsilon$.

Nach (1.2) ist φ auf jedem Quader $R \in \mathcal{A}$ Lipschitz-stetig, mit Lipschitz-Konstante $L = \sup_{t \in G} \|\varphi'(t)\|$, wobei $\|\cdot\|$ die Operatornorm auf $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ bezüglich der Maximumsnorm auf \mathbb{R}^n bezeichnet. Wie im Beweis von (1.4) folgt daraus $v(\varphi(A)) < \lambda\varepsilon$ mit einer nur von φ abhängigen Konstanten $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Aus $\varphi(T) \subseteq \varphi(A) \cup \varphi(B)$ folgt $\varphi(T) \setminus \varphi(B) \subseteq \varphi(A)$ und $v(\varphi(T) \setminus \varphi(B)) \leq v(\varphi(A)) < \lambda\varepsilon$.

Zur Abkürzung setzen wir $F(t) = (f \circ \varphi)(t) |\det \varphi'(t)|$. Es gilt $\varphi(B) = \bigcup_{R \in \mathcal{B}} \varphi(R)$, und die Mengen $\varphi(R)$ schneiden sich nach (1.4) höchstens in Nullmengen. Für jedes $R \in \mathcal{B}$ gibt es wegen $R \subseteq T^\circ$ nach (1.9) einen offenen Quader $\tilde{R} \supseteq R$, der ebenfalls in T° enthalten ist. Wir können unsere Voraussetzung auf die Quader R, \tilde{R} anwenden und erhalten die Gleichung

$$\int_{\varphi(B)} f(x) dx = \sum_{R \in \mathcal{B}} \int_{\varphi(R)} f(x) dx = \sum_{R \in \mathcal{B}} \int_R F(t) dt = \int_B F(t) dt.$$

Auf Grund der Rechenregeln für das Riemann-Integral aus der Mathe III gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\varphi(T)} f(x) dx - \int_T F(t) dt \right| &= \left| \int_{\varphi(T) \setminus \varphi(B)} f(x) dx + \int_{\varphi(B)} f(x) dx - \int_B F(t) dt - \int_{T \setminus B} F(t) dt \right| \\ &\leq \left| \int_{\varphi(T) \setminus \varphi(B)} f(x) dx \right| + \left| \int_{T \setminus B} F(t) dt \right|. \end{aligned}$$

Sei $\gamma = \sup\{|f(x)| \mid x \in \varphi(T)\} \cup \{|F(t)| \mid t \in T\}$. Dann gilt also

$$\left| \int_{\varphi(T)} f(x) dx - \int_T F(t) dt \right| \leq \gamma v(\varphi(T) \setminus \varphi(B)) + \gamma v(T \setminus B) < \gamma \lambda \varepsilon + \gamma \varepsilon = \gamma \varepsilon (\lambda + 1).$$

Da $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig klein gewählt werden kann, folgt daraus die Behauptung.

⑤ Die mehrdimensionale Substitutionsregel (1.6) gilt für Dimension $n = 1$.

Beweis: Die Aussagen (i) und (ii) wurden bereits in Schritt ① gezeigt. Direkt im Anschluss an die Formulierung von (1.6) haben wir festgestellt, dass auch die Gleichung (S) gültig ist, falls es sich bei \tilde{Q} um ein offenes und bei Q um ein kompaktes (eindimensionales) Intervall handelt. Somit folgt die Behauptung unmittelbar aus Schritt ④.

⑥ Gibt es eine Funktion $\psi : G \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi(t, t_n) = (t, \psi(t, t_n))$ für alle $(t, t_n) \in G$, dann ist (S) erfüllt.

Beweis: Nach Schritt ④ können wir voraussetzen, dass G ein offener und T ein kompakter Quader ist. Es gibt dann einen offenen Quader \tilde{Q} , ein offenes Intervall \tilde{I} , einen kompakten Quader Q und ein kompaktes Intervall $I = [a_n, b_n]$ mit $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $a_n < b_n$, so dass $\tilde{Q} \supseteq Q$, $\tilde{I} \supseteq I$, $G = \tilde{Q} \times \tilde{I}$ und $T = Q \times I$ erfüllt ist. Da G zusammenhängend, die Funktion $G \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, t_n) \mapsto \det \varphi'(t, t_n)$ stetig und $\det \varphi'(t, t_n) \neq 0$ für alle $(t, t_n) \in G$ ist, gilt entweder überall $\det \varphi'(t, t_n) > 0$ oder $\det \varphi'(t, t_n) < 0$. Wir betrachten zunächst den Fall, dass $\det \varphi'(t, t_n)$ überall positiv ist. Wegen $\varphi(t, t_n) = (t, \psi(t, t_n))$ hat die Ableitungsmatrix von φ die Form

$$\varphi'(t, t_n) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & & & 1 \\ \partial_1 \psi(t, t_n) & \cdots & \partial_{n-1} \psi(t, t_n) & \partial_n \psi(t, t_n) & \end{pmatrix}$$

Definiert man für jedes $t \in \tilde{Q}$ eine Funktion $\tau_t : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}$, $t_n \mapsto \psi(t, t_n)$, dann gilt $\tau_t'(t_n) = \partial_n \psi(t, t_n) = \det \varphi'(t, t_n) > 0$. Die Funktion τ_t ist also für jedes $t \in \tilde{Q}$ auf \tilde{I} streng monoton wachsend. Insbesondere gilt

$$\psi(t, a_n) = \tau_t(a_n) \leq \tau_t(t_n) \leq \tau_t(b_n) = \psi(t, b_n)$$

und somit $\tau_t(I) \subseteq [\psi(t, a_n), \psi(t, b_n)]$ für alle $t \in \tilde{Q}$. Auf Grund der Stetigkeit von τ_t folgt aus dem Zwischenwertsatz sogar $\tau_t(I) = [\psi(t, a_n), \psi(t, b_n)]$, somit $\varphi(\{t\} \times I) = \{t\} \times \psi(\{t\} \times I) = \{t\} \times \tau_t(I) = \{t\} \times [\psi(t, a_n), \psi(t, b_n)]$ für alle $t \in \tilde{Q}$ und schließlich

$$\begin{aligned} \varphi(T) &= \varphi(Q \times I) = \bigcup_{t \in Q} \varphi(\{t\} \times I) = \bigcup_{t \in Q} (\{t\} \times [\psi(t, a_n), \psi(t, b_n)]) \\ &= \{(t, v) \in Q \times \mathbb{R} \mid \psi(t, a_n) \leq v \leq \psi(t, b_n)\}. \end{aligned}$$

Die Menge $\varphi(T)$ ist also ein Normalbereich. Wir beweisen nun die Gleichung (S) durch Rückführung auf den Fall $n = 1$, der durch Schritt ⑤ bereits abgedeckt ist. Für jedes $t \in \tilde{Q}$ sei dazu die Funktion $f_t : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f_t(t_n) = f(t, t_n)$ für alle $t_n \in \tilde{I}$. Durch Anwendung der verallgemeinerten Version des Satzes von Fubini (Mathe III, Satz (4.36)) erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(T)} f(x) dx &= \int_Q \left(\int_{\psi(t, a_n)}^{\psi(t, b_n)} f(t, t_n) dt_n \right) dt = \int_Q \left(\int_{\tau_t(I)} f_t(t_n) dt_n \right) dt \stackrel{(*)}{=} \\ &= \int_Q \left(\int_I (f_t \circ \tau_t)(t_n) |\tau_t'(t_n)| dt_n \right) dt = \int_Q \left(\int_I f(t, \psi(t, t_n)) |\tau_t'(t_n)| dt_n \right) dt = \\ &= \int_Q \left(\int_I (f \circ \varphi)(t, t_n) |\det \varphi'(t, t_n)| dt_n \right) dt = \int_{Q \times I} (f \circ \varphi)(t, t_n) |\det \varphi'(t, t_n)| d(t, t_n) \\ &= \int_T (f \circ \varphi)(t, t_n) |\det \varphi'(t, t_n)| d(t, t_n) \end{aligned}$$

wobei an der Stelle (*) die Formel (S) für $n = 1$ angewendet wurde. Nun betrachten wir noch den Fall, dass $\det \varphi'(t, t_n) < 0$ für alle $(t, t_n) \in G$ gilt. In diesem Fall ist $\tau_t'(t_n) < 0$ für alle $(t, t_n) \in \tilde{I}$, die Funktion τ_t ist also für alle $t \in \tilde{Q}$ streng monoton fallend. Wir erhalten

$$\varphi(T) = \{(t, v) \in Q \times \mathbb{R} \mid \psi(t, b_p) \leq v \leq \psi(t, a_p)\}$$

und somit entsprechend

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(T)} f(x) dx &= \int_Q \left(\int_{\psi(t, b_n)}^{\psi(t, a_n)} f(t, t_n) dt_n \right) dt = - \int_Q \left(\int_{\tau_t(I)} f_t(t_n) dt_n \right) dt \\ &= - \int_T (f \circ \varphi)(t, t_n) |\det \varphi'(t, t_n)| d(t, t_n) = \int_T (f \circ \varphi)(t, t_n) |\det \varphi'(t, t_n)| d(t, t_n). \quad \square \end{aligned}$$

⑦ Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$, und setzen wir voraus, dass (1.6) in Dimension $n - 1$ gültig ist. Dann gilt die Gleichung (S) auch in Dimension n .

Beweis: Wiederum können wir nach Schritt ④ annehmen, dass G ein offener Quader und T ein kompakter Quader ist. Wie zuvor schreiben wir $G = \tilde{Q} \times \tilde{I}$ und $T = Q \times I$ mit geeigneten Quadern $Q \subseteq \tilde{Q} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ und geeigneten Intervallen $I \subseteq \tilde{I} \subseteq \mathbb{R}$, wobei \tilde{I}, \tilde{Q} offen und I, Q kompakt sind. Auf Grund des Zerlegungssatzes (1.10) gibt es Funktionen $\varrho : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\psi : \varrho(G) \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Form

$$\varrho(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_{n-1}(t), t_n) \quad \text{und} \quad \psi(t) = (t_1, \dots, t_{n-1}, \psi_n(t))$$

mit $\varphi = \psi \circ \varrho$, wobei $\varrho(G)$ in \mathbb{R}^n offen ist. Für jedes $t_n \in \tilde{I}$ definieren wir eine Funktion $h_{t_n} : \tilde{Q} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ durch $h_{t_n}(t) = (\varphi_1(t, t_n), \dots, \varphi_{n-1}(t, t_n))$. Dann gilt $\varrho(t, t_n) = (h_{t_n}(t), t_n)$ und somit $\det h'_{t_n}(t) = \det \varrho'(t, t_n) \neq 0$ für alle $t \in \tilde{Q}$ und $t_n \in \tilde{I}$. Nach (1.8) ist $h_{t_n}(\tilde{Q})$ jeweils in \mathbb{R}^{n-1} offen. Auf Grund der Injektivität von ϱ ist h_{t_n} injektiv auf \tilde{Q} , für jedes $t_n \in \tilde{I}$. Darüber hinaus gilt für jedes $t_n \in \tilde{I}$ und jede stetige Funktion $F : h_{t_n}(\tilde{Q}) \rightarrow \mathbb{R}$ nach Induktionsvoraussetzung

$$\int_{h_{t_n}(Q)} F(t) dt = \int_Q (F \circ h_{t_n})(t) |\det h'_{t_n}(t)| dt.$$

Definieren wir nun $F : \varrho(G) \rightarrow \mathbb{R}$ durch $F(s) = (f \circ \psi)(s) |\det \psi'(s)|$, dann kann die linke Seite der Gleichung (S) in der Form

$$\int_{\varphi(T)} f(x) dx = \int_{\psi(\varrho(T))} f(x) dx \stackrel{(*)}{=} \int_{\varrho(T)} (f \circ \psi)(s) |\det \psi'(s)| ds = \int_{\varrho(T)} F(s) ds$$

dargestellt werden, wobei an der Stelle (*) das Ergebnis aus Schritt ⑥ verwendet wurde. Für jedes $t_n \in \tilde{I}$ ist $\varrho(T)(t_n) = h_{t_n}(Q)$, denn für alle $u \in \mathbb{R}^{n-1}$ gilt die Äquivalenz

$$\begin{aligned} u \in \varrho(T)(t_n) &\Leftrightarrow (u, t_n) \in \varrho(T) \Leftrightarrow \varrho(t, t_n) = (u, t_n) \text{ für ein } t \in Q \Leftrightarrow \\ &(h_{t_n}(t), t_n) = (u, t_n) \text{ für ein } t \in Q \Leftrightarrow u \in h_{t_n}(Q). \end{aligned}$$

Für alle $(t, t_n) \in \varrho(G)$ sei $F_{t_n}(t) = F(t, t_n)$. Durch Anwendung des verallgemeinerten Satzes von Fubini (Mathe III, Satz (4.36)) erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(T)} f(x) dx &= \int_{\varrho(T)} F(s) ds = \int_I \left(\int_{\varrho(T)(t_n)} F(t, t_n) dt \right) dt_n = \\ &\int_I \left(\int_{h_{t_n}(Q)} F_{t_n}(t) dt \right) dt_n = \int_I \left(\int_Q (F_{t_n} \circ h_{t_n})(t) |\det h'_{t_n}(t)| dt \right) dt_n \\ &= \int_T F(h_{t_n}(t), t_n) |\det h'_{t_n}(t)| d(t, t_n). \end{aligned}$$

Wir betrachten nun die rechte Seite der Gleichung (S). Für alle $(t, t_n) \in Q \times I$ gilt $\det \varphi'(t, t_n) = \det(\psi \circ \varrho)'(t, t_n) = \det \psi'(\varrho(t, t_n)) \cdot \det \varrho'(t, t_n) = \det \psi'(h_{t_n}(t), t_n) \det h'_{t_n}(t)$ und somit

$$\begin{aligned} (f \circ \varphi)(t, t_n) |\det \varphi'(t, t_n)| &= (f \circ \psi \circ \varrho)(t, t_n) |\det \varphi'(t, t_n)| = \\ (f \circ \psi)(h_{t_n}(t), t_n) |\det \psi'(h_{t_n}(t), t_n)| |\det h'_{t_n}(t)| &= F(h_{t_n}(t), t_n) |\det h'_{t_n}(t)|. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\int_T (f \circ \varphi)(t, t_n) |\det \varphi'(t, t_n)| d(t, t_n) = \int_T F(h_{t_n}(t), t_n) |\det h'_{t_n}(t)| d(t, t_n) = \int_{\varphi(T)} f(x) dx. \quad \square$$

Nach diesen Vorbereitungen erhält man nun Satz (1.6) durch vollständige Induktion über n , wobei Schritt ⑤ für den Induktionsanfang und Schritt ⑦ für den Induktionsschritt verwendet wird.

⑧ Beweis des Zusatzes

Sei $N \subseteq T$ eine Jordansche Nullmenge mit der Eigenschaft, dass $t \mapsto \det \varphi'(t)$ auf $T \setminus N$ nicht verschwindet und φ auf $T \setminus N$ injektiv ist. Für beliebig vorgegebenes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ können wir offene Quader Q_1, \dots, Q_m wählen, so dass $\sum_{k=1}^m v(Q_k) < \varepsilon$ ist und N vollständig in der Vereinigungsmenge $R = \bigcup_{j=1}^m Q_j$ liegt. Die Menge $S = T \setminus R$ ist beschränkt und abgeschlossen, also ebenfalls kompakt, und auf Grund des bisher Bewiesenen ist die Substitutionsregel für S an Stelle von R gültig. Es gilt $v(T \setminus S) \leq v(N) < \varepsilon$, und wie im Beweis von Schritt ④ zeigt man, dass $v(\varphi(T \setminus S)) < \lambda \varepsilon$ mit einer nur von φ abhängigen Konstanten $\lambda \in \mathbb{R}^+$ gilt. Genau wie in ④ folgert man nun auch, dass die Gleichung (S) auch für T erfüllt ist.

1.2 Kurven- und Flächenintegrale

Inhaltsübersicht

- ☆ Wegen und Kurven
- ☆ heuristisch Herleitung der Ausdrucks für Kurvenintegrale 1. Art, Definition
- ☆ Normierung und Konkatination von Kurven
- ☆ Vektorfelder und Kurvenintegrale 2. Art
- ☆ Flächenintegrale

Bereits in der Analysis mehrerer Variablen wurde der Begriff des *Weges* in einer Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^n$ definiert. Dabei handelte es sich um eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow T$, wobei a, b reelle Zahlen mit $a < b$ bezeichnen. Man nennt $\gamma(a)$ den *Start-* und $\gamma(b)$ den *Endpunkt* des Weges; fallen diese beiden Punkte zusammen, so spricht man von einem *geschlossenen* Weg. Wir nennen einen Weg eine \mathcal{C}^1 -*Kurve* in T , wenn die Abbildung $\gamma|_{]a,b[}$ stetig differenzierbar ist. Als *Kurve* bezeichnen wir einen Weg, wenn er *stückweise* stetig differenzierbar ist. Dies bedeutet, dass eine Zerlegung $\mathcal{Z} = \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ existiert, so dass $\gamma|_{]x_{k-1}, x_k[}$ für $1 \leq k \leq n$ jeweils stetig differenzierbar ist, wobei wie immer $x_0 = a$ und $x_n = b$ gesetzt wird.

Kommen wir nun zur Definition der Kurvenintegrale. Aus der Analysis einer Variablen ist bekannt, dass das Riemann-Integral $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ durch sog. *Riemannsche Summen* approximiert werden kann. Ist $\mathcal{Z} = \{x_1, \dots, x_n\}$ eine hinreichend feine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ und sind $z_k \in]x_{k-1}, x_k[$ geeignet gewählte Stützstellen, dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n f(z_k) |x_k - x_{k-1}|.$$

Ist nun $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ eine Kurve und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, dann liegt es nahe, ein Kurvenintegral in der Form

$$\int_{\gamma} f ds \approx \sum_{k=1}^n (f \circ \gamma)(z_k) \|\gamma(x_k) - \gamma(x_{k-1})\|$$

anzusetzen, wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm auf dem \mathbb{R}^d bezeichnet. Die Kurve wird also durch den Polygonzug angenähert, der von den Punkten $\gamma(x_k)$ mit $0 \leq k \leq n$ gebildet wird, die jeweils den Abstand $\|\gamma(x_k) - \gamma(x_{k-1})\|$ voneinander haben. Die Gesamtlänge des Polygonzugs beträgt also $\sum_{k=1}^n \|\gamma(x_k) - \gamma(x_{k-1})\|$. Um aus diesem Näherungsausdrücken wieder Integrale zu gewinnen, erinnern wir daran, dass die differenzierbare Abbildung γ in der unmittelbaren Umgebung der Stützstellen z_k durch die affin-lineare Funktion

$$\gamma(t) \approx \gamma(z_k) + (t - z_k)\gamma'(z_k)$$

approximiert wird. Bei hinreichend feiner Zerlegung gilt $\gamma(x_{k-1}) \approx \gamma(z_k) + (x_{k-1} - z_k)\gamma'(z_k)$ und $\gamma(x_k) \approx \gamma(z_k) + (x_k - z_k)\gamma'(z_k)$. Durch Bildung der Differenz erhalten wir also $\gamma(x_k) - \gamma(x_{k-1}) \approx (x_k - x_{k-1})\gamma'(z_k)$ und somit

$$\sum_{k=1}^n (f \circ \gamma)(z_k) \|\gamma'(z_k)\| (x_k - x_{k-1}) \approx \int_a^b (f \circ \gamma)'(t) \|\gamma'(t)\| dt.$$

Für die Kurvenlänge $\mathcal{L}(\gamma)$ erhalten wir den Näherungsausdruck

$$\mathcal{L}(\gamma) \approx \sum_{k=1}^n \|\gamma(x_k) - \gamma(x_{k-1})\| \approx \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Diese Überlegungen motivieren die folgende Definition.

(1.11) Definition Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ eine beliebige Teilmenge, $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ eine Kurve in U und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann bezeichnet man

$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b (f \circ \gamma)(t) \|\gamma'(t)\| dt$$

als das **Kurvenintegral 1. Art** von f über γ . Die Zahl $\mathcal{L}(\gamma) = \int_{\gamma} 1 ds = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$ bezeichnen wir als die **Länge** der Kurve γ .

Wir illustrieren die Definition der Kurvenlänge an einem Beispiel. Die Kurve γ gegeben durch

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (r \cos(t), r \sin(t))$$

durchläuft den Kreis vom Radius r um den Koordinatenursprung in der Ebene, und zwar entgegen dem Uhrzeigersinn. Für alle $t \in]0, 2\pi[$ gilt $\gamma'(t) = (-r \sin(t), r \cos(t))$ und somit $\|\gamma'(t)\|^2 = r^2 \sin^2(t) + r^2 \cos^2(t) = r^2$, also $\|\gamma'(t)\| = r$. Die Kurvenlänge ist also gegeben durch

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.$$

Bekanntlich ist dies laut Schulmathematik der Umfang eines Kreises vom Radius r .

Für Kurven stehen eine Reihe von Rechenoperationen zur Verfügung, die sich in den Anwendungen als hilfreich herausstellen werden. Zunächst kann jede Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ auf natürliche Weise eine Kurve γ_0 mit Definitionsbereich $[0, 1]$ zugeordnet werden. Dazu definiert man $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ durch $u(t) = (1-t)a + tb = a + t(b-a)$ und setzt $\gamma_0 = \gamma \circ u$. Wir bezeichnen den Übergang von γ zu γ_0 als **Normierung** und eine Kurve mit Definitionsbereich $[0, 1]$ als **normiert**. Integrale über γ ändern sich durch die Normierung nicht. Auf Grund der Kettenregel gilt nämlich $\gamma'_0(t) = (\gamma \circ u)'(t) = \gamma'(u(t))u'(t)$ für alle $t \in]a, b[$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_0} f ds &= \int_0^1 (f \circ \gamma_0)(t) \|\gamma'_0(t)\| dt = \int_0^1 (f \circ \gamma \circ u)(t) \|\gamma'(u(t))u'(t)\| dt = \\ &= \int_0^1 (f \circ \gamma \circ u)(t) \|\gamma'(u(t))\| |u'(t)| dt = \int_{u(0)}^{u(1)} (f \circ \gamma)(t) \|\gamma'(t)\| dt = \\ &= \int_a^b (f \circ \gamma)(t) \|\gamma'(t)\| dt = \int_{\gamma} f ds, \end{aligned}$$

wobei im vierten Schritt die Substitutionsregel aus der Analysis einer Variablen angewendet wurde. Außerdem ist zu beachten, dass $u'(t) = b-a > 0$ für alle $t \in]a, b[$ gilt, weshalb die Betragsstriche um $u'(t)$ im dritten Schritt weggelassen werden können. Wir definieren noch zwei weitere Rechenoperationen für Kurven.

(1.12) Definition Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, und seien $\gamma, \delta : [0, 1] \rightarrow U$ zwei normierte Kurven, wobei $\gamma(1) = \delta(0)$ ist. Dies bedeutet, dass der Endpunkt von γ mit dem Startpunkt von δ übereinstimmt. Wir definieren zwei neue Kurven γ^- und $\delta * \gamma$ durch

$$\gamma^-(t) = \gamma(1-t) \quad \text{und} \quad (\delta * \gamma)(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{falls } 0 \leq t \leq 1 \\ \delta(t-1) & \text{falls } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

und bezeichnen γ^- als die **Umkehrung** von γ und $\delta * \gamma$ als die **Konkatenation** der beiden Kurven γ und δ .

Sind γ und δ nicht normiert, dann setzen wir $\delta * \gamma = \delta_0 * \gamma_0$, wobei γ_0, δ_0 die Normierungen von γ, δ bezeichnen. Wir untersuchen, wie sich die Kurvenintegrale unter Umkehrung und Konkatenation verhalten.

(1.13) Proposition Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $\gamma, \delta : [0, 1] \rightarrow U$ zwei normierte Kurven mit $\gamma(1) = \delta(0)$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt

$$\int_{\gamma^-} f ds = \int_{\gamma} f ds \quad \text{und} \quad \int_{\delta * \gamma} f ds = \int_{\gamma} f ds + \int_{\delta} f ds.$$

Beweis: Nach Definition gilt $\gamma^- = \gamma \circ u$ mit $u(t) = 1-t$ und $u'(t) = -1$. Die Anwendung der mehrdimensionalen Kettenregel liefert $(\gamma^-)'(t) = \gamma'(u(t))u'(t)$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_{\gamma^-} f ds &= \int_0^1 (f \circ \gamma^-)(t) \|(\gamma^-)'(t)\| dt = \int_0^1 (f \circ \gamma \circ u)(t) \|\gamma'(u(t))u'(t)\| dt = \\ &= - \int_0^1 (f \circ \gamma \circ u)(t) \|\gamma'(u(t))\| |u'(t)| dt = - \int_{u(0)}^{u(1)} (f \circ \gamma)(t) \|\gamma'(t)\| dt = \\ &= - \int_1^0 (f \circ \gamma)(t) \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^1 (f \circ \gamma)(t) \|\gamma'(t)\| dt = \int_{\gamma} f ds. \end{aligned}$$

Beweisen wir nun die Rechenregel für die Konkatenation. Hier gilt

$$\begin{aligned} \int_{\delta * \gamma} f ds &= \int_0^2 (f \circ (\delta * \gamma))(t) \|(\delta * \gamma)'(t)\| dt = \\ &= \int_0^1 (f \circ (\delta * \gamma))(t) \|(\delta * \gamma)'(t)\| dt + \int_1^2 (f \circ (\delta * \gamma))(t) \|(\delta * \gamma)'(t)\| dt = \\ &= \int_0^1 (f \circ \gamma)(t) \|\gamma'(t)\| dt + \int_1^2 (f \circ \delta)(t-1) \|\delta'(t-1)\| dt = \\ &= \int_0^1 (f \circ \gamma)(t) \|\gamma'(t)\| dt + \int_0^1 (f \circ \delta)(t) \|\delta'(t)\| dt = \int_{\gamma} f ds + \int_{\delta} f ds. \end{aligned}$$

Bei dieser Rechnung wurde im vorletzten Schritt die eindimensionale Substitutionsregel auf die Substitutionsfunktion $t \mapsto t-1$ angewendet. □

Vor allem für Anwendungen in der Physik benötigt man ein weitere Version des Kurvenintegrals, die nicht auf reellwertige Funktionen, sondern auf Vektorfelder angewendet wird.

(1.14) Definition Sei $d \in \mathbb{N}$. Als **Vektorfeld** auf einer Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^d$ bezeichnen wir eine Abbildung $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$.

Man spricht von einem stetigen, differenzierbaren, \mathcal{C}^1 -Vektorfeld usw. wenn die Abbildung f auf D stetig, differenzierbar, stetig differenzierbar usw. ist. In den letzten beiden Fällen setzt man dafür voraus, dass der Definitionsbereich D von f offen im \mathbb{R}^n ist.

(1.15) Definition Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ eine beliebige Teilmenge, $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ eine Kurve in U und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ ein stetiges Vektorfeld. Dann bezeichnet man

$$\int_{\gamma} \langle f, ds \rangle = \int_a^b \langle (f \circ \gamma)(t), \gamma'(t) \rangle dt$$

als das **Kurvenintegral 2. Art** von f über γ , wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Standard-Skalarprodukt auf \mathbb{R}^d bezeichnet.

Für Kurvenintegrale 2. Art gelten die Rechenregeln

$$\int_{\gamma^-} \langle f, ds \rangle = - \int_{\gamma} \langle f, ds \rangle \quad \text{und} \quad \int_{\delta * \gamma} \langle f, ds \rangle = \int_{\gamma} \langle f, ds \rangle + \int_{\delta} \langle f, ds \rangle.$$

Man beachte, dass die zweite Gleichung mit der entsprechenden Regel für Kurvenintegrale 1. Art übereinstimmt, während bei der ersten Gleichung ein Vorzeichenwechsel auftritt. Wir werden diese Rechenregeln hier nicht beweisen. Statt dessen schauen wir uns ein konkretes Beispiel für Kurvenintegrale 2. Art an, wie es es typischerweise in der Physik vorkommt. Bei den Vektorfeldern, die man dort betrachtet, handelt es sich häufig um **Kraftfelder**, die also in jedem Punkt des dreidimensionalen Raums die Richtung und Stärke einer Kraft angeben. Zum Beispiel beschreibt das konstante Vektorfeld

$$F_{\text{grav}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (0, 0, -mg)$$

mit der Erdbeschleunigung g in der dritten Komponente die (nahezu) konstante Schwerkraft in der Nähe der Erdoberfläche, die auf eine Masse m ausgeübt wird. Das Minuszeichen bedeutet, dass die Kraft nach unten gerichtet ist. Beschreibt nun $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ den Weg einer Punktmasse m durch den Raum, dann gibt das Kurvenintegral

$$W = \int_{\gamma} \langle F, ds \rangle$$

die **Arbeit** an, die ein Kraftfeld F entlang des Weges an der Punktmasse verrichtet. Ist W positiv, so bedeutet dies, dass m entlang des Weges γ kinetische Energie aufnimmt; die Punktmasse wird entlang des Weges vom Kraftfeld beschleunigt. Hat W dagegen ein negatives Vorzeichen, so wird der Masse m Energie entzogen, sie wird also von F verlangsamt. Soll die Geschwindigkeit von m entlang des Weges konstant bleiben, so gibt

– W die Arbeit an, die aufgewendet werden muss, um m vom Punkt $\gamma(0)$ nach $\gamma(1)$ zu transportieren. Sei beispielsweise $F = F_{\text{grav}}$ wie oben, seien $p, q \in \mathbb{R}^3$ zwei Punkte mit einem Höhenunterschied von $h = q_3 - p_3$, und sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (1-t)p + tq$ der gradlinige Weg von p nach q . Für alle $t \in [0, 1]$ gilt dann $\langle (F \circ \gamma)(t), \gamma'(t) \rangle = \langle {}^t(0, 0, -mg), {}^t(q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3) \rangle = (-mg)(q_3 - p_3) = (-mg)(q_3 - p_3) = -mgh$. Also muss für die Positionsänderung die Arbeit

$$W = \int_{\gamma} \langle F, ds \rangle = \int_0^1 \langle (F \circ \gamma)(t), \gamma'(t) \rangle dt = \int_0^1 (-mgh) dt = -mgh$$

an der Punktmasse verrichtet werden.

Als nächstes werden wir nun Integrale über Flächen im \mathbb{R}^3 definieren. Hierzu benötigen wird das bereits aus der Schulmathematik bekannte Kreuzprodukt zweier Vektoren.

(1.16) Definition Das *Kreuzprodukt* zweier Vektoren $v = (v_1, v_2, v_3)$ und $w = (w_1, w_2, w_3)$ im \mathbb{R}^3 ist definiert durch

$$v \times w = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}.$$

Wie man unmittelbar nachrechnet, steht $v \times w$ immer senkrecht auf den Vektoren v und w , es gilt also

$$\langle v, v \times w \rangle = 0 \quad \text{und} \quad \langle w, v \times w \rangle = 0.$$

Für die folgende Anwendung des Kreuzprodukts ist auch die Interpretation der Länge $\|v \times w\|$ des Kreuzprodukts interessant. Sei n der Vektor, den man durch Normierung von $v \times w$ erhält, also $n = \|v \times w\|^{-1}(v \times w)$. Sei außerdem $A \in \mathcal{M}_{3, \mathbb{R}}$ die Matrix mit den Spaltenvektoren v, w und n . Dann hat die Matrix tAA die Einträge

$${}^tAA = \begin{pmatrix} \langle v, v \rangle & \langle v, w \rangle & \langle v, n \rangle \\ \langle w, v \rangle & \langle w, w \rangle & \langle w, n \rangle \\ \langle n, v \rangle & \langle n, w \rangle & \langle n, n \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle v, v \rangle & \langle v, w \rangle & 0 \\ \langle w, v \rangle & \langle w, w \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wie wir bereits im letzten Abschnitt wiederholt haben, kann $|\det(A)|$ als das Volumen des von v, w und n aufgespannten Parallelotops interpretiert werden. Weil n Länge 1 hat und senkrecht auf v und w steht, stimmt der Flächeninhalt des von v und w aufgespannten *Parallelogramms* ebenfalls mit $|\det(A)|$ überein. Nun gilt einerseits

$$\begin{aligned} \|v \times w\|^2 &= (v_2 w_3 - v_3 w_2)^2 + (v_3 w_1 - v_1 w_3)^2 + (v_1 w_2 - v_2 w_1)^2 = \\ &= (v_2^2 w_3^2 - 2v_2 v_3 w_2 w_3 + v_3^2 w_2^2) + (v_3^2 w_1^2 - 2v_1 v_3 w_1 w_3 + v_1^2 w_3^2) + (v_1^2 w_2^2 - 2v_1 v_2 w_1 w_2 + v_2^2 w_1^2), \end{aligned}$$

andererseits aber auch

$$\begin{aligned} \det(A)^2 &= \det({}^tAA) = \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2 = (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) \\ &- (v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3)^2 = (v_1^2w_1^2 + v_1^2w_2^2 + v_1^2w_3^2 + v_2^2w_1^2 + v_2^2w_2^2 + v_2^2w_3^2 + v_3^2w_1^2 + v_3^2w_2^2 + v_3^2w_3^2) \\ &- (v_1^2w_1^2 + v_2^2w_2^2 + v_3^2w_3^2 + 2v_1v_2w_1w_2 + 2v_1v_3w_1w_3 + 2v_2v_3w_2w_3) = \\ &(v_2^2w_3^2 - 2v_2v_3w_2w_3 + v_3^2w_2^2) + (v_3^2w_1^2 - 2v_1v_3w_1w_3 + v_1^2w_3^2) + (v_1^2w_2^2 - 2v_1v_2w_1w_2 + v_2^2w_1^2) \end{aligned}$$

woraus $\|v \times w\| = |\det(A)|$ geschlossen werden kann. Die euklidische Länge von $v \times w$ ist also genau der Flächeninhalt des von v und w aufgespannten Parallelogramms.

(1.17) Definition Eine *parametrisierte Fläche* im \mathbb{R}^3 ist ein Paar (B, ϕ) bestehend aus einer kompakten, Jordan-messbaren Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^2$ und einer \mathcal{C}^1 -Abbildung $\phi : G \rightarrow \mathbb{R}^3$, wobei der Definitionsbereich G von ϕ eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^2 mit $G \supseteq B$ ist.

Sei (B, ϕ) eine solche parametrisierte Fläche und $f : \phi(B) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wie bei den Kurven soll f auf naheliegender Weise ein Integral $\int_{(B, \phi)} f \, dA$ zugeordnet werden. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass es sich bei B um einen kompakten Quader handelt, und betrachten eine feine Zerlegung \mathcal{Z} von B . In Analogie zu den Kurven sollte

$$\int_{(B, \phi)} f \, dA \approx \sum_{K \in \mathcal{Z}} (f \circ \phi)(a_K) v_2(\phi(K))$$

gelten, wobei a_K jeweils einen beliebig gewählten Punkt des Teilquaders K und $v_2(\phi(K))$ den Inhalt des Flächenstücks $\phi(K)$ im \mathbb{R}^3 bezeichnet. Weil ϕ stetig differenzierbar ist, und weil stetig differenzierbare Funktionen durch affin-lineare Funktionen approximiert werden können, gilt

$$\phi(a_K + t_1e_1 + t_2e_2) \approx \phi(a_K) + \phi'(a_K)(t_1e_1 + t_2e_2) = \phi(a_K) + t_1\phi'(a_K)(e_1) + t_2\phi'(a_K)(e_2)$$

für betragsmäßig kleine $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Bei geeigneter Wahl von a_K können wir annehmen, dass $K = a_K + [0, u] \times [0, v]$ mit geeigneten $u, v \in \mathbb{R}^+$ ist. Dann ist $\phi(K)$ in guter Näherung das Bild von $[0, u] \times [0, v]$ unter der Abbildung $(t_1, t_2) \mapsto \phi(a_K) + t_1\phi'(a_K)(e_1) + t_2\phi'(a_K)(e_2)$. Dabei handelt es sich um das Parallelogramm aufgespannt von den Vektoren $u\phi'(a_K)(e_1)$ und $v\phi'(a_K)(e_2)$. Weil der Flächeninhalt des Parallelogramms durch die Länge des Kreuzprodukts dieser Vektoren gegeben ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} v_2(\phi(K)) &\approx \|u\phi'(a_K)(e_1) \times v\phi'(a_K)(e_2)\| \\ &= uv\|\phi'(a_K)(e_1) \times \phi'(a_K)(e_2)\| = \|\phi'(a_K)(e_1) \times \phi'(a_K)(e_2)\|v_2(K). \end{aligned}$$

Durch Einsetzen erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{(B, \phi)} f \, dA &\approx \sum_{K \in \mathcal{Z}} (f \circ \phi)(a_K) \|\phi'(a_K)(e_1) \times \phi'(a_K)(e_2)\| v_2(K) \\ &\approx \int_B (f \circ \phi)(x, y) \|\phi'(x, y)(e_1) \times \phi'(x, y)(e_2)\| \, d(x, y). \end{aligned}$$

Dies motiviert die folgende Definition.

(1.18) Definition Sei (B, ϕ) eine parametrisierte Fläche im \mathbb{R}^3 und $f : \phi(B) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist das **Flächenintegral** von f über (B, ϕ) definiert durch

$$\int_{(B, \phi)} f \, dA = \int_B (f \circ \phi)(x, y) \|\phi'(x, y)(e_1) \times \phi'(x, y)(e_2)\| \, d(x, y).$$

Das Integral der konstanten Funktion 1 über (B, ϕ) bezeichnen wir als **Inhalt** der parametrisierten Fläche.

Als Anwendungsbeispiel berechnen wir die Oberfläche der Kugel vom Radius r . Diese wird parametrisiert durch

$$\phi : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (\vartheta, \varphi) \mapsto (r \cos(\vartheta) \cos(\varphi), r \cos(\vartheta) \sin(\varphi), r \sin(\vartheta)).$$

In jedem Punkt (ϑ, φ) des Definitionsbereichs ist die Ableitungsmatrix gegeben durch

$$\phi'(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} -r \sin(\vartheta) \cos(\varphi) & -r \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \\ -r \sin(\vartheta) \sin(\varphi) & r \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \\ r \cos(\vartheta) & 0 \end{pmatrix},$$

die beiden Ableitungsvektoren sind also

$$\phi'(\vartheta, \varphi)(e_1) = \begin{pmatrix} -r \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ -r \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ r \cos(\vartheta) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \phi'(\vartheta, \varphi)(e_2) = \begin{pmatrix} -r \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \\ r \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit dem Kreuzprodukt

$$\phi'(\vartheta, \varphi)(e_1) \times \phi'(\vartheta, \varphi)(e_2) = r^2 \begin{pmatrix} -\cos(\vartheta)^2 \cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta)^2 \sin(\varphi) \\ -\cos(\vartheta) \sin(\vartheta) \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \|\phi'(\vartheta, \varphi)(e_1) \times \phi'(\vartheta, \varphi)(e_2)\|^2 &= \\ r^4 (\cos(\vartheta)^4 \cos(\varphi)^2 + \cos(\vartheta)^4 \sin(\varphi)^2 + \cos(\vartheta)^2 \sin(\vartheta)^2) &= r^4 (\cos(\vartheta)^4 + \cos(\vartheta)^2 \sin(\vartheta)^2) = \\ r^4 \cos(\vartheta)^2 (\cos(\vartheta)^2 + \sin(\vartheta)^2) &= r^4 \cos(\vartheta)^2 \end{aligned}$$

und somit $\|\phi'(\vartheta, \varphi)(e_1) \times \phi'(\vartheta, \varphi)(e_2)\| = r^2 \cos(\vartheta)$. Setzen wir $Q = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi]$, dann ist $\phi(Q)$ die Kugeloberfläche, und wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_{(Q, \phi)} 1 \, dA &= \int_Q \|\phi'(\vartheta, \varphi)(e_1) \times \phi'(\vartheta, \varphi)(e_2)\| \, d(\vartheta, \varphi) = \int_Q r^2 \cos(\vartheta) \, d(\vartheta, \varphi) \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{2\pi} r^2 \cos(\vartheta) \, d\varphi \right) d\vartheta = 2\pi r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\vartheta) \, d\vartheta = 2\pi r^2 [\sin(\vartheta)]_{\vartheta=-\pi/2}^{\vartheta=\pi/2} = 4\pi r^2. \end{aligned}$$

1.3 Vektoranalysis

Inhaltsübersicht

- ☆ Gradient einer Funktion, Divergenz und Rotation eines Vektorfelds
- ☆ Übertragung dieser Operationen auf krummlinige Koordinaten
- ☆ Integralsätze von Green, Stokes und Gauß

Wir betrachten eine Reihe von Operationen auf skalaren Funktion und Vektorfeldern, die häufig in der mathematischen Physik Verwendung finden.

(1.19) Definition Sei $d \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ ein \mathcal{C}^1 -Vektorfeld auf U .

- (i) Das stetige Vektorfeld $\nabla f : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ gegeben durch

$$(\nabla f)(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \vdots \\ \partial_n f(x) \end{pmatrix} \text{ wird } \mathbf{Gradient} \text{ von } f \text{ genannt.}$$

- (ii) Die **Divergenz** von F ist die stetige, reellwertige Funktion $\operatorname{div}(F)$ auf U gegeben durch

$$\operatorname{div}(F)(x) = \langle \nabla, F \rangle(x) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) + \dots + \frac{\partial F_d}{\partial x_d}(x).$$

- (iii) Im Fall $d = 3$ definieren wir die **Rotation** von F als das Vektorfeld $\operatorname{rot}(F) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\operatorname{rot}(F)(x, y, z) = (\nabla \times F)(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y}(x, y, z) - \frac{\partial F_2}{\partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial F_1}{\partial z}(x, y, z) - \frac{\partial F_3}{\partial x}(x, y, z) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y, z) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y, z) \end{pmatrix}.$$

Die Ausdrücke $\langle \nabla, F \rangle$ und $\nabla \times F$ in der Definition sind als Merkgeln für die Divergenz und Rotation eines Vektorfelds zu verstehen. Kürzen wir die Definition von ∇ durch $\nabla = {}^t(\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$ ab, so erhalten wir rein formal für die Divergenz den Ausdruck

$$\langle \nabla, F \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \partial \\ \partial x_1 \\ \vdots \\ \partial \\ \partial x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial x_k}$$

und ebenso für die Rotation

$$\nabla \times F = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Der Gradient $(\nabla f)(x)$ hat eine einfache geometrische Interpretation: Für jeden Punkt $x \in U$ zeigt er in die Richtung des stärksten Anstiegs der Funktion f , und seine euklidische Länge $\|(\nabla f)(x)\|_2$ gibt den Wert des Anstiegs an. Ist nämlich $v \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Vektor mit $\|v\|_2 = 1$, dann ist der Anstieg von f in Richtung v gegeben durch die Richtungsableitung, also durch

$$\partial_v f(x) = f'(x)(v) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) v_k = \langle (\nabla f)(x), v \rangle.$$

Auf Grund der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\|_2 \|w\|_2$ wird dieser Wert maximal, wenn v mit der Normierung $w = \|(\nabla f)(x)\|_2^{-1} (\nabla f)(x)$ von $(\nabla f)(x)$ übereinstimmt, und hat dann den (positiven) Wert $\|(\nabla f)(x)\|_2$.

Die Divergenz $\operatorname{div}(F)(x)$ eines Vektorfeldes F wird als „Quellenstärke“ des Feldes im Punkt x interpretiert. Stellt man sich etwa vor, dass es sich bei $\operatorname{div}(F)$ um das Geschwindigkeitsfeld einer Strömung handelt, und ist $B \subseteq U$ ein kleiner Raumbereich, dann ist das Integral $\int_B \operatorname{div}(F)(x) \, dx$ ein Maß für die Flüssigkeitsmenge, die aus dem Raumbereich B innerhalb eines kurzen Zeitintervalls austritt. Ist das Vorzeichen des Integrals negativ, dann interpretiert man statt dessen als B als „Senke“, die Flüssigkeit aufnimmt. Die Rotation $\operatorname{rot}(F)(x)$ wird als „Wirbelstärke“ von F interpretiert, die angibt, mit welcher Geschwindigkeit die Flüssigkeit um ein kleines Flächenstück herumströmt. Beide Interpretationen werden wir weiter unten mit Hilfe der Integralsätze genauer formulieren können.

Für konkrete physikalische Anwendungen ist es häufig notwendig, die Operationen Gradient, Rotation und Divergenz statt durch kartesische Koordinaten durch krummlinige Koordinaten auszudrücken. Wir führen dies hier für die Dimension $d = 2$ und die **Polarkoordinaten**

$$\rho_{\text{pol}} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (r, \varphi) \mapsto (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$$

genauer aus, da es sich um wichtige Anwendungen der mehrdimensionalen Kettenregel handelt. Ist $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine \mathbb{R} -wertige Funktion, dann bezeichnen wir $f_{\text{pol}} = f \circ \rho_{\text{pol}}$ als entsprechende Funktion „in Polarkoordinaten“. Sei nun $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein Vektorfeld. Definieren wir die Einheitsvektoren $e_x = {}^t(1, 0)$ und $e_y = {}^t(0, 1)$ und bezeichnen wir die x - bzw. y -Komponente von F mit F_x bzw. F_y , dann gilt

$$F = F_x e_x + F_y e_y.$$

Es wird dann entsprechend $F_{\text{pol}} = F \circ \rho_{\text{pol}}$ das Vektorfeld „in Polarkoordinaten“ genannt. Bei der Zerlegung von F_{pol} in Komponenten ist es nun zweckmässig, das Feld in jedem Punkt $(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$ nicht als

Linearkombination von $e_x(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) = {}^t(1, 0)$ und $e_y(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) = {}^t(0, 1)$, sondern als Linearkombination der Vektoren

$$e_r(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad e_\varphi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

darzustellen. Es handelt sich dabei um die normierten Tangentialvektoren entlang der Koordinatenlinien, die durch eine konstante φ - bzw. r -Koordinate gegeben sind, zeigen in Richtung einer Zunahme von r bzw. φ , und stehen in jedem Punkt senkrecht aufeinander. Die Komponenten können leicht ineinander umgerechnet werden: Für alle $(r, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{pmatrix} (F_{\text{pol}})_x(r, \varphi) \\ (F_{\text{pol}})_y(r, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \\ F_y(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \end{pmatrix} = F(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) = \\ (F_{\text{pol}})_r(r, \varphi)e_r(r, \varphi) + (F_{\text{pol}})_\varphi(r, \varphi)e_\varphi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)(F_{\text{pol}})_r(r, \varphi) - \sin(\varphi)(F_{\text{pol}})_\varphi(r, \varphi) \\ \sin(\varphi)(F_{\text{pol}})_r(r, \varphi) + \cos(\varphi)(F_{\text{pol}})_\varphi(r, \varphi) \end{pmatrix},$$

durch Vergleich der Komponenten erhalten wir also

$$\begin{aligned} (F_{\text{pol}})_x(r, \varphi) &= \cos(\varphi)(F_{\text{pol}})_r(r, \varphi) - \sin(\varphi)(F_{\text{pol}})_\varphi(r, \varphi) \\ (F_{\text{pol}})_y(r, \varphi) &= \sin(\varphi)(F_{\text{pol}})_r(r, \varphi) + \cos(\varphi)(F_{\text{pol}})_\varphi(r, \varphi). \end{aligned}$$

Um den Gradienten einer reellwertigen \mathcal{C}^1 -Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ in Polarkoordinaten darzustellen, benötigen wir die totale Ableitung von ρ_{pol} und ihre Inverse in jedem Punkt, also

$$\rho'_{\text{pol}}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \rho'_{\text{pol}}(r, \varphi)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\frac{1}{r} \sin(\varphi) & \frac{1}{r} \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Zur Abkürzung setzen wir $g = f_{\text{pol}} = f \circ \rho_{\text{pol}}$. Sei außerdem $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und $(r, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ mit $(x, y) = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$. Nach Definition gilt

$$(\nabla f)_{\text{pol}}(r, \varphi) = (\nabla f)(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) = (\nabla f)(x, y) \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = {}^t f'(x, y).$$

Wenden wir die mehrdimensionale Kettenregel auf $f = g \circ \rho_{\text{pol}}^{-1}$ und anschließend die mehrdimensionale Umkehrregel an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} f'(x, y) &= g'(\rho_{\text{pol}}^{-1}(x, y))(\rho_{\text{pol}}^{-1})'(x, y) = g'(r, \varphi)\rho'_{\text{pol}}(r, \varphi)^{-1} = \\ &\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \varphi) & \frac{\partial g}{\partial \varphi}(r, \varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\frac{1}{r} \sin(\varphi) & \frac{1}{r} \cos(\varphi) \end{pmatrix} = \\ &\left(\cos(\varphi) \frac{\partial g}{\partial r}(r, \varphi) - \frac{1}{r} \sin(\varphi) \frac{\partial g}{\partial \varphi}(r, \varphi) \quad \sin(\varphi) \frac{\partial g}{\partial r}(r, \varphi) + \frac{1}{r} \cos(\varphi) \frac{\partial g}{\partial \varphi}(r, \varphi) \right) \end{aligned}$$

Wir erhalten als Ergebnis

$$\begin{aligned} (\nabla f)_{\text{pol}}(r, \varphi) &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \frac{\partial g}{\partial r}(r, \varphi) - \frac{1}{r} \sin(\varphi) \frac{\partial g}{\partial \varphi}(r, \varphi) \\ \sin(\varphi) \frac{\partial g}{\partial r}(r, \varphi) + \frac{1}{r} \cos(\varphi) \frac{\partial g}{\partial \varphi}(r, \varphi) \end{pmatrix} = \\ &\frac{\partial g}{\partial r}(r, \varphi) \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \varphi}(r, \varphi) \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} = \frac{f_{\text{pol}}}{\partial r}(r, \varphi) e_r(r, \varphi) + \frac{1}{r} \frac{f_{\text{pol}}}{\partial \varphi}(r, \varphi) e_\varphi(r, \varphi). \end{aligned}$$

Sei nun $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein \mathcal{C}^1 -Vektorfeld. Um die Divergenz $\operatorname{div}(F)$ in Polarkoordinaten darzustellen, setzen wir $G = F_{\text{pol}} = F \circ \rho_{\text{pol}}$. Wie oben sei $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ beliebig vorgegeben und $(r, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ mit $(x, y) = \rho_{\text{pol}}(r, \varphi) = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$. Nach Definition der Divergenz gilt

$$\operatorname{div}(F)_{\text{pol}}(r, \varphi) = \operatorname{div}(F)(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) = \frac{\partial F_x}{\partial x}(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) + \frac{\partial F_y}{\partial y}(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)).$$

Der erste Summand ist die erste Komponente des Gradienten von F_x , der zweite Summand die zweite Komponente des Gradienten von F_y . Weil wir die Gradienten bereits in Polarkoordinaten ausgerechnet haben, können wir schreiben

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_x}{\partial x}(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) &= \cos(\varphi) \frac{\partial G_x}{\partial r}(r, \varphi) - \frac{1}{r} \sin(\varphi) \frac{\partial G_x}{\partial \varphi}(r, \varphi) \\ \frac{\partial F_y}{\partial y}(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) &= \sin(\varphi) \frac{\partial G_y}{\partial r}(r, \varphi) + \frac{1}{r} \cos(\varphi) \frac{\partial G_y}{\partial \varphi}(r, \varphi) \end{aligned}$$

Wir haben oben gesehen, wie man die kartesischen Komponenten eines Vektorfelds in Polarkomponenten umrechnet. Es gilt

$$\begin{aligned} G_x(r, \varphi) &= \cos(\varphi) G_r(r, \varphi) - \sin(\varphi) G_\varphi(r, \varphi) \\ G_y(r, \varphi) &= \sin(\varphi) G_r(r, \varphi) + \cos(\varphi) G_\varphi(r, \varphi). \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Produktregel erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_x}{\partial r}(r, \varphi) &= \cos(\varphi) \frac{\partial G_r}{\partial r}(r, \varphi) - \sin(\varphi) \frac{\partial G_\varphi}{\partial r}(r, \varphi) \\ \frac{\partial G_x}{\partial \varphi}(r, \varphi) &= -\sin(\varphi) G_r(r, \varphi) + \cos(\varphi) \frac{\partial G_r}{\partial \varphi}(r, \varphi) - \cos(\varphi) G_\varphi(r, \varphi) - \sin(\varphi) \frac{\partial G_\varphi}{\partial \varphi}(r, \varphi) \\ \frac{\partial G_y}{\partial r}(r, \varphi) &= \sin(\varphi) \frac{\partial G_r}{\partial r}(r, \varphi) + \cos(\varphi) \frac{\partial G_\varphi}{\partial r}(r, \varphi) \\ \frac{\partial G_y}{\partial \varphi}(r, \varphi) &= \cos(\varphi) G_r(r, \varphi) + \sin(\varphi) \frac{\partial G_r}{\partial \varphi}(r, \varphi) - \sin(\varphi) G_\varphi(r, \varphi) + \cos(\varphi) \frac{\partial G_\varphi}{\partial \varphi}(r, \varphi). \end{aligned}$$

Setzen wir dies in den Ausdruck von oben ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(F)_{\text{pol}}(r, \varphi) &= \cos(\varphi) \frac{\partial G_x}{\partial r}(r, \varphi) - \frac{1}{r} \sin(\varphi) \frac{\partial G_x}{\partial \varphi}(r, \varphi) + \sin(\varphi) \frac{\partial G_y}{\partial r}(r, \varphi) + \frac{1}{r} \cos(\varphi) \frac{\partial G_y}{\partial \varphi}(r, \varphi) = \\ &= \cos(\varphi) \left(\cos(\varphi) \frac{\partial G_r}{\partial r}(r, \varphi) - \sin(\varphi) \frac{\partial G_\varphi}{\partial r}(r, \varphi) \right) \\ &\quad - \frac{1}{r} \sin(\varphi) \left(-\sin(\varphi) G_r(r, \varphi) + \cos(\varphi) \frac{\partial G_r}{\partial \varphi}(r, \varphi) - \cos(\varphi) G_\varphi(r, \varphi) - \sin(\varphi) \frac{\partial G_\varphi}{\partial \varphi}(r, \varphi) \right) \\ &\quad + \sin(\varphi) \left(\sin(\varphi) \frac{\partial G_r}{\partial r}(r, \varphi) + \cos(\varphi) \frac{\partial G_\varphi}{\partial r}(r, \varphi) \right) \\ &\quad + \frac{1}{r} \cos(\varphi) \left(\cos(\varphi) G_r(r, \varphi) + \sin(\varphi) \frac{\partial G_r}{\partial \varphi}(r, \varphi) - \sin(\varphi) G_\varphi(r, \varphi) + \cos(\varphi) \frac{\partial G_\varphi}{\partial \varphi}(r, \varphi) \right) = \\ &= \cos(\varphi)^2 \frac{\partial G_r}{\partial r}(r, \varphi) - \sin(\varphi) \cos(\varphi) \frac{\partial G_\varphi}{\partial r}(r, \varphi) + \frac{1}{r} \sin(\varphi)^2 G_r(r, \varphi) \\ &\quad - \frac{1}{r} \sin(\varphi) \cos(\varphi) \frac{\partial G_r}{\partial \varphi}(r, \varphi) + \frac{1}{r} \sin(\varphi) \cos(\varphi) G_\varphi(r, \varphi) + \frac{1}{r} \sin(\varphi)^2 \frac{\partial G_\varphi}{\partial \varphi}(r, \varphi) \\ &\quad + \sin(\varphi)^2 \frac{\partial G_r}{\partial r}(r, \varphi) + \sin(\varphi) \cos(\varphi) \frac{\partial G_\varphi}{\partial r}(r, \varphi) + \frac{1}{r} \cos(\varphi)^2 G_r(r, \varphi) \\ &\quad + \frac{1}{r} \sin(\varphi) \cos(\varphi) \frac{\partial G_r}{\partial \varphi}(r, \varphi) - \frac{1}{r} \sin(\varphi) \cos(\varphi) G_\varphi(r, \varphi) + \frac{1}{r} \cos(\varphi)^2 \frac{\partial G_\varphi}{\partial \varphi}(r, \varphi) \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial G_r}{\partial r}(r, \varphi) + \frac{1}{r} G_r(r, \varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial G_\varphi}{\partial \varphi}(r, \varphi) = \frac{1}{r} \frac{\partial(r G_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial G_\varphi}{\partial \varphi}(r, \varphi).$$

Insgesamt lautet der Ausdruck für die Divergenz in Polarkoordinaten also

$$\operatorname{div}(F)_{\text{pol}}(r, \varphi) = \frac{1}{r} \frac{\partial(r(F_{\text{pol}})_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(F_{\text{pol}})_\varphi}{\partial \varphi}(r, \varphi).$$

Unter einem **Normalbereich** im \mathbb{R}^2 verstehen wir im folgenden eine Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^2$, die Normalbereich sowohl bezüglich der x -Achse als auch der y -Achse ist, wobei die Begrenzungsfunktionen für diese Normalbereiche außerdem stückweise stetig differenzierbar sein sollen. Es gibt also $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c < d$ und stückweise \mathcal{C}^1 -Funktionen $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $\psi_1, \psi_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$B = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} \mid \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times [c, d] \mid \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\} \quad \text{gilt.}$$

Eine Kurve $\gamma : [u, v] \rightarrow \mathbb{R}^2$ bezeichnen wir als **Randkurve** von B , wenn sie geschlossen ($\gamma(u) = \gamma(v)$) und auf $]u, v[$ injektiv ist und außerdem $\gamma([u, v]) = \partial B$ gilt, die Kurve γ also genau die Punkte des topologischen Rands ∂B von B durchläuft. Bezeichnet $f : \partial B \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die in allen bis auf endlich vielen Punkten von ∂B definiert ist, dann setzen wir

$$\int_{\partial B} f \, ds = \int_{\gamma} f \, ds.$$

Man kann zeigen, dass diese Definition von der Wahl der Randkurve unabhängig ist, worauf wir aber aus Zeitgründen verzichten (siehe [He], §180, S. 375). Für unsere Anwendungen weiter unten arbeiten wir vor allem mit den beiden speziellen zusammengesetzten Randkurven $\delta^- * \gamma^- * \beta * \alpha$ und $\tilde{\delta}^- * \tilde{\gamma} * \tilde{\beta} * \tilde{\alpha}^-$, deren Teilstücke (bzw. deren Umkehrungen) folgendermaßen definiert sind.

$$\begin{aligned} \alpha & : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t, \varphi_1(t)) \\ \beta & : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (1-t)(b, \varphi_1(b)) + t(b, \varphi_2(b)) \\ \gamma & : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t, \varphi_2(t)) \\ \delta & : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (1-t)(a, \varphi_1(a)) + t(a, \varphi_2(a)) \\ \tilde{\alpha} & : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (\psi_1(t), t) \\ \tilde{\beta} & : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (1-t)(\psi_1(c), c) + t(\psi_2(c), c) \\ \tilde{\gamma} & : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (\psi_2(t), t) \\ \tilde{\delta} & : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (1-t)(\psi_1(d), d) + t(\psi_2(d), d) \end{aligned}$$

Man überprüft leicht, dass das Bild dieser beiden Kurven tatsächlich jeweils der Rand ∂B ist, und dass auch alle übrigen Bedingungen erfüllt sind.

(1.20) Definition Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Normalbereich wie oben angegeben. Ein Punkt $p \in \partial B$ wird **regulärer** Randpunkt genannt, wenn eine offene Umgebung U von p und eine \mathcal{C}^1 -Funktion $q : U \rightarrow \mathbb{R}$ existieren, so dass $U \cap B = \{x \in U \mid q(x) \leq 0\}$ und $q'(p) \neq 0$ erfüllt ist. Ansonsten nennen wir p einen **singulären** Randpunkt.

Offenbar besitzt jeder Normalbereich nur endlich viele singuläre Randpunkte, nämlich die vier „Ecken“ des Normalbereichs gegeben durch $(a, \varphi_1(a))$, $(b, \varphi_1(b))$, $(b, \varphi_2(b))$ und $(a, \varphi_2(a))$ sowie die endlich vielen Punkte $(t, \varphi_1(t))$ bzw. $(t, \varphi_2(t))$, bei denen φ_1 bzw. φ_2 in t nicht stetig differenzierbar ist.

Ist p ein regulärer Randpunkt und $q : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine \mathcal{C}^1 -Funktion wie in der Definition, dann bezeichnet man

$$n(p) = \frac{1}{\|(\nabla q)(p)\|} (\nabla q)(p)$$

als **äußeren Einheitsnormalenvektor** von B im Randpunkt p . Diese Bezeichnung ist gerechtfertigt, da $n(p)$ stets vom Normalbereich B nach außen weist. Der Vektor $-n(p)$ ist entsprechend auf das Innere von B gerichtet. Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Kurve mit $\gamma([a, b]) \subseteq \partial B$, $c \in]a, b[$ und $p = \gamma(c)$, dann gilt stets eine der beiden Gleichungen

$$n(p) = \pm \frac{1}{\|v(p)\|} v(p) \quad \text{mit} \quad v(p) = \begin{pmatrix} \gamma'_2(c) \\ -\gamma'_1(c) \end{pmatrix}.$$

Dabei ist der Vektor $v(p)$ so definiert, dass er relativ zum Tangentialvektor $\gamma'(c) = (\gamma'_1(c), \gamma'_2(c))$ stets orthogonal nach rechts weist. Zum Beweis der Gleichung schränken wir γ auf ein offenes Intervall $I \subseteq [a, b]$ mit $c \in I$ ein, so dass $\gamma(I) \subseteq U$ erfüllt ist. Wegen $\gamma(I) \subseteq \partial B$ gilt dann $(q \circ \gamma)(t) = 0$ und somit nach der Kettelregel auch $q'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$ für alle $t \in I$. Insbesondere gilt $\langle (\nabla q)(p), \gamma'(c) \rangle = \langle (\nabla q)(\gamma(c)), \gamma'(c) \rangle = 0$. Dies zeigt, dass nicht nur $v(p)$, sondern auch $\nabla(q)(p)$ auf $\gamma'(c)$ senkrecht steht; die Vektoren $v(p)$ und $\nabla(q)(p)$ sind also skalare Vielfache voneinander. Folglich sind die normierten Vektoren $v(p)/\|v(p)\|$ und $n(p)$ entweder gleich oder entgegengesetzt.

(1.21) Definition Man bezeichnet eine Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ von B mit $\gamma([a, b]) \subseteq \partial B$ als **positiv orientiert**, wenn für alle bis auf endlich viele $t \in]a, b[$ die Gleichung

$$n(\gamma(t)) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \begin{pmatrix} \gamma'_2(t) \\ -\gamma'_1(t) \end{pmatrix} \quad \text{erfüllt ist,}$$

wenn also der Einheitsnormalenvektor $n(\gamma(t))$ stets vom Tangentialvektor $\gamma'(t)$ aus orthogonal nach rechts zeigt.

Ist γ positiv orientiert, dann ist die entgegengesetzte Kurven γ^- offenbar negativ orientiert, denn die Tangentialvektoren $\gamma'(t)$ und $(\gamma^-)'(t)$ sind entgegengesetzt.

Die oben definierte untere Randkurve $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ unseres Normalbereichs ist positiv orientiert. Sei nämlich $t \in]a, b[$ und $q : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $q(x, y) = \varphi_1(x) - y$. Für eine hinreichend kleine Umgebung U von $\alpha(t) = (t, \varphi_1(t))$ hat dann $q(x, y)$ für (x, y) im Inneren von B wegen $y > \varphi_1(x)$ einen negativen und für $(x, y) \notin B$ einen positiven Wert, es gilt also $U \cap B = \{(x, y) \in B \mid q(x, y) \leq 0\}$. Die Vektoren $(\nabla q)(t, \varphi_1(t)) = (\varphi'_1(t), -1)$ und $(\alpha'_2(t), -\alpha'_1(t)) = (\varphi'_1(t), -1)$ stimmen überein, also gilt dasselbe auch für die normierten Vektoren.

Ebenso ist die rechte Randkurve $\beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ von B positiv orientiert. Zum Beweis sei $t \in]0, 1[$ und $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $q(x, y) = x - b$. Wählt man eine Umgebung U von $p = \beta(t) = (1 - t)(b, \varphi_1(b)) + t(b, \varphi_2(b))$ hinreichend klein, dann gilt für alle $(x, y) \in U$ die Äquivalenz

$$(x, y) \in B \Leftrightarrow x \leq b \Leftrightarrow q(x, y) \leq 0 \quad ,$$

also ist $U \cap B = \{(x, y) \in B \mid q(x, y) \leq 0\}$. Die Vektoren $(\nabla q)(p) = (1, 0)$ und $(\beta'_2(t), -\beta'_1(t)) = (\varphi_2(b) - \varphi_1(b), 0)$ unterscheiden sich nur um ein positives Vielfaches, also stimmen auch hier die entsprechenden normierten Vektoren überein. Genauso zeigt man, dass auch die Kurven $\gamma^-, \delta^-, \tilde{\alpha}^-, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$ und $\tilde{\delta}^-$ positiv orientiert sind. Insgesamt handelt es sich also bei den beiden oben angegebenen Randkurven von B um positiv orientierte Kurven.

Wir kommen nun zum ersten wichtigen Satz der Vektoranalysis.

(1.22) Satz (Greenscher Integralsatz)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein \mathcal{C}^1 -Vektorfeld und $B \subseteq U$ ein Normalbereich wie oben angegeben. Dann gilt

$$\int_B \operatorname{div}(f)(x, y) \, d(x, y) = \int_{\partial B} \langle f, n \rangle \, ds \quad ,$$

wobei n das in allen regulären Randpunkten definierte äußere Einheitsnormalenfeld von B bezeichnet.

Beweis: Wie bereits erwähnt, können wir für die Berechnung des Integrals über ∂B die beiden oben definierten speziellen Randkurven verwenden. Die dort eingeführten Bezeichnungen $\alpha, \beta, \dots, \tilde{\delta}$ behalten wir bei. Für jede dieser Teilkurven ρ sei $I_\rho \subseteq \mathbb{R}$ jeweils das Intervall, auf dem ρ definiert ist, beispielsweise $I_\alpha = [a, b]$ und $I_\beta = [0, 1]$. Nach Definition gilt

$$\int_B \operatorname{div}(f)(x, y) \, d(x, y) = \int_B \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) \, d(x, y) + \int_B \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \, d(x, y)$$

und $\int_{\partial B} \langle f, n \rangle \, ds = \int_{\partial B} f_1 n_1 \, ds + \int_{\partial B} f_2 n_2 \, ds$, wobei n_1, n_2 die beiden Komponenten der \mathbb{R}^2 -wertigen Funktion n bezeichnen. Unser Ziel ist der Beweis der beiden Gleichungen

$$\int_B \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) \, d(x, y) = \int_{\partial B} f_1 n_1 \, ds \quad \text{und} \quad \int_B \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \, d(x, y) = \int_{\partial B} f_2 n_2 \, ds.$$

Auf Grund der Rechenregeln (1.13) für Kurvenintegrale ist $\int_{\partial B} f_2 n_2 \, ds$ die Summe der Integrale über die Kurven α, β, γ^- und δ^- . Für jedes $\rho \in \{\alpha, \beta, \gamma^-, \delta^-\}$ erhalten wir wegen $n(\rho(t)) = \|\rho'(t)\|^{-1}(\rho'_2(t), -\rho'_1(t))$ die Gleichung

$$\int_\rho f_2 n_2 \, ds = \int_{a_\rho}^{b_\rho} (f_2 \circ \rho)(t) (n_2 \circ \rho)(t) \|\rho'(t)\| \, dt = - \int_{a_\rho}^{b_\rho} (f_2 \circ \rho)(t) \rho'_1(t) \, dt.$$

Ersetzt man ρ durch die negativ orientierte Kurve ρ^- , dann erhält man auf Grund der veränderten Gleichung $n(\rho(t)) = \|\rho'(t)\|^{-1}(-\rho'_2(t), \rho'_1(t))$ entsprechend $\int_{\rho} f_2 n_2 ds = \int_{a_\rho}^{b_\rho} (f_2 \circ \rho)(t) \rho'_1(t) dt$. Es gilt nun

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} f_2 n_2 ds + \int_{\gamma^-} f_2 n_2 ds &= \int_{\alpha} f_2 n_2 ds + \int_{\gamma} f_2 n_2 ds = \int_a^b (f_2 \circ \gamma)(t) \gamma'_1(t) dt - \int_a^b (f_2 \circ \alpha)(t) \alpha'_1(t) dt \\ &= \int_a^b f_2(t, \varphi_2(t)) \cdot 1 dt - \int_a^b f_2(t, \varphi_1(t)) \cdot 1 dt = \int_a^b (f_2(x, \varphi_2(x)) - f_2(x, \varphi_1(x))) dx \\ &= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) dy \right) dx = \int_B \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) d(x, y) \quad , \end{aligned}$$

wobei im vorletzten Schritt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung angewendet wurde, und

$$\begin{aligned} \int_{\beta} f_2 n_2 ds + \int_{\delta^-} f_2 n_2 ds &= \int_{\beta} f_2 n_2 ds + \int_{\delta} f_2 n_2 ds = \int_0^1 (f_2 \circ \delta)(t) \delta'_1(t) dt - \int_0^1 (f_2 \circ \beta)(t) \beta'_1(t) dt \\ &= \int_0^1 (f_2 \circ \delta)(t) \cdot 0 dt - \int_0^1 (f_2 \circ \beta)(t) \cdot 0 dt = 0 \quad , \end{aligned}$$

insgesamt also $\int_{\partial B} f_2 n_2 ds = \int_B \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) d(x, y)$.

Kommen wir nun zum Beweis der ersten Gleichung. Das Kurvenintegral $\int_{\partial B} f_1 n_1 ds$ ist die Summe über die vier positiv orientierten Kurven $\tilde{\alpha}^-$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$ und $\tilde{\delta}^-$. Bezeichnet $\tilde{\rho}$ einen dieser Wege, dann erhalten wir, wiederum auf Grund der Gleichung $n(\rho(t)) = \|\rho'(t)\|^{-1}(\rho'_2(t), -\rho'_1(t))$ für den Einheitsnormalenvektor, jeweils

$$\int_{\tilde{\rho}} f_1 n_1 ds = \int_{a_\rho}^{b_\rho} (f_1 \circ \tilde{\rho})(t) (n_1 \circ \tilde{\rho})(t) \|\tilde{\rho}'(t)\| dt = \int_{a_\rho}^{b_\rho} (f_1 \circ \tilde{\rho})(t) \tilde{\rho}'_2(t) dt$$

und für den negativ orientierten Weg entsprechend $\int_{\tilde{\rho}^-} f_1 n_1 ds = - \int_{a_\rho}^{b_\rho} (f_1 \circ \tilde{\rho})(t) \tilde{\rho}'_2(t) dt$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\alpha}^-} f_1 n_1 ds + \int_{\tilde{\gamma}} f_1 n_1 ds &= \int_{\tilde{\alpha}} f_1 n_1 ds + \int_{\tilde{\gamma}} f_1 n_1 ds = \int_c^d (f_1 \circ \tilde{\gamma})(t) \tilde{\gamma}'_2(t) dt - \int_c^d (f_1 \circ \tilde{\alpha})(t) \tilde{\alpha}'_2(t) dt \\ &= \int_c^d f_1(\psi_2(t), t) \cdot 1 dt - \int_c^d f_1(\psi_1(t), t) \cdot 1 dt = \int_c^d (f_1(\psi_2(y), y) - f_1(\psi_1(y), y)) dy \\ &= \int_c^d \left(\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) dx \right) dy = \int_b \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) d(x, y) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\beta}} f_1 n_1 ds + \int_{\tilde{\delta}^-} f_1 n_1 ds &= \int_{\tilde{\beta}} f_1 n_1 ds + \int_{\tilde{\delta}} f_1 n_1 ds = \int_0^1 (f_1 \circ \tilde{\beta})(t) \tilde{\beta}'_2(t) dt - \int_0^1 (f_1 \circ \tilde{\delta})(t) \tilde{\delta}'_2(t) dt \\ &= \int_0^1 (f_1 \circ \tilde{\beta})(t) \cdot 0 dt - \int_0^1 (f_1 \circ \tilde{\delta})(t) \cdot 0 dt = 0. \end{aligned}$$

Insgesamt gilt also $\int_{\partial B} f_1 n_1 ds = \int_B \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) d(x, y)$. □

Die Gleichung im Greenschen Integralsatz kann auch ohne Verwendung des Einheitsnormalenfelds n dargestellt werden, wenn man statt dessen mit dem Konzept der Orientierung arbeitet: Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine positiv orientierte Kurve, die ∂B durchläuft, dann gilt wegen $(n \circ \gamma)(t) = 1/\|\gamma'(t)\| \cdot (\gamma'_2(t), -\gamma'_1(t))$ die Gleichung

$$\int_B \operatorname{div}(f)(x, y) d(x, y) = \int_{\partial B} \langle f, n \rangle ds = \int_a^b ((f_1 \circ \gamma)(t)\gamma'_2(t) - (f_2 \circ \gamma)(t)\gamma'_1(t)) dt. \quad (1.4)$$

Dies wird beim Beweis des Stokeschen Integralsatzes weiter unten eine wichtige Rolle spielen. Der Greensche Satz ermöglicht die folgende geometrische Interpretation der Divergenz.

(1.23) Folgerung Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein \mathcal{C}^1 -Vektorfeld, und $p \in U$. Für jedes $r \in \mathbb{R}^+$ sei $B_r(p)$ die offene Kreisscheibe vom Radius r um den Punkt p bezüglich der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$. Dann gilt

$$\operatorname{div}(f)(p) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{\partial B_r(p)} \langle f, n \rangle ds$$

wobei das Vektorfeld $n : \mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ durch $n(q) = \|q - p\|_2^{-1}(q - p)$ gegeben ist.

Beweis: Sei $r \in \mathbb{R}^+$ so klein gewählt, dass die abgeschlossene Kreisscheibe $\bar{B}_r(p)$ in U enthalten ist, außerdem $m_-(r) = \min\{\operatorname{div}(f)(q) \mid q \in \bar{B}_r(p)\}$ und $m_+(r) = \max\{\operatorname{div}(f)(q) \mid q \in \bar{B}_r(p)\}$. Aus $m_-(r) \leq \operatorname{div}(f)(p) \leq m_+(r)$ folgen durch Integration über die Menge $\bar{B}_r(p)$ mit dem Flächeninhalt πr^2 die Ungleichungen

$$m_-(r)\pi r^2 \leq \int_{\bar{B}_r(p)} \operatorname{div}(f)(x, y) d(x, y) \leq m_+(r)\pi r^2.$$

Offenbar ist n das äußere Einheitsnormalenfeld der Kurve $\partial B_r(p)$, denn für jeden Randpunkt $q \in \partial B_r(p)$ ist $n(q) = \|q - p\|_2^{-1}(q - p)$ der eindeutig bestimmte, von der Kreislinie aus nach außen weisende, normierte Vektor. Mit dem Greenschen Integralsatz erhalten wir also

$$m_-(r) \leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{\partial B_r(p)} \langle f, n \rangle ds \leq m_+(r).$$

Auf Grund der Stetigkeit von $\operatorname{div}(f)$ laufen $m_-(r)$ und $m_+(r)$ für $r \rightarrow 0$ gegen $\operatorname{div}(f)(p)$. □

Interpretiert man f als Geschwindigkeitsfeld einer zweidimensionalen „Strömung“, dann ist für jeden Randpunkt $q \in \partial B_r(p)$ der Wert $\langle f(q), n(q) \rangle$ ein Maß für die am Punkt q aus $B_r(p)$ ausströmende Flüssigkeitsmenge. Sie hat den größten positiven Wert, wenn die Vektoren $f(q)$ und $n(q)$ gleichgerichtet sind. Die soeben bewiesene Folgerung zeigt, dass die Interpretation der Divergenz als „Quellenstärke“ eines Strömungsfelds gerechtfertigt ist.

(1.24) Definition Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve. Ein Vektorfeld $\tau : \gamma([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}^n$ wird *Einheitstangentienfeld* von γ genannt, wenn für alle bis auf endlich viele $t \in]a, b[$ die Gleichung

$$(\tau \circ \gamma)(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \gamma'(t) \quad \text{erfüllt ist.}$$

(1.25) Definition Sei (B, ϕ) eine parametrisierte Fläche im \mathbb{R}^3 . Ein Vektorfeld $\nu : \phi(B) \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißt *Einheitsnormalenfeld* von (B, ϕ) , wenn für alle $(u, v) \in B$ die Gleichung

$$(\nu \circ \phi)(u, v) = \frac{1}{\|\phi'(u, v)(e_1) \times \phi'(u, v)(e_2)\|} \phi'(u, v)(e_1) \times \phi'(u, v)(e_2) \quad \text{gilt.}$$

Bevor wir den Stokeschen Integralsatz formulieren und beweisen, führen wir noch zwei Vereinfachungen ein. Ist (B, ϕ) eine parametrisierte Fläche, dann verwenden wir für die Integration die abkürzende Notation

$$\begin{aligned} dy \wedge dz &= (\partial_1 \phi_2(u, v) \cdot \partial_2 \phi_3(u, v) - \partial_1 \phi_3(u, v) \cdot \partial_2 \phi_2(u, v)) d(u, v) \\ dz \wedge dx &= (\partial_1 \phi_3(u, v) \cdot \partial_2 \phi_1(u, v) - \partial_1 \phi_1(u, v) \cdot \partial_2 \phi_3(u, v)) d(u, v) \\ dx \wedge dy &= (\partial_1 \phi_1(u, v) \cdot \partial_2 \phi_2(u, v) - \partial_1 \phi_2(u, v) \cdot \partial_2 \phi_1(u, v)) d(u, v). \end{aligned}$$

Für uns sind $dy \wedge dz$ usw. rein formale Ausdrücke, die ebenso wie $d(u, v)$ für sich allein stehend keine Bedeutung haben. Sie besitzen eine mathematische Interpretation als sog. *Differentialformen* auf der Fläche (B, ϕ) , deren Einführung allerdings über den Rahmen dieser Vorlesung hinausgehen würde.

(1.26) Satz (*Stokescher Integralsatz*)

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $\phi : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine \mathcal{C}^2 -Abbildung und $B \subseteq G$ ein Normalbereich. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen mit $U \supseteq \phi(B)$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein \mathcal{C}^1 -Vektorfeld. Schließlich sei γ eine positiv orientierte Kurve, die ∂B durchläuft, τ ein Einheitsstangentenfeld der Kurve $\phi \circ \gamma$ im \mathbb{R}^3 und ν ein Einheitsnormalenfeld der parametrisierten Fläche (B, ϕ) . Dann gilt

$$\int_{\phi \circ \gamma} \langle f, \tau \rangle ds = \int_{(B, \phi)} \langle \text{rot}(f), \nu \rangle dA.$$

Beweis: Zunächst betrachten wir die rechte Seite der Gleichung. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{(B, \phi)} \langle \text{rot}(f), \nu \rangle dA &= \int_B \langle (\text{rot}(f) \circ \phi)(u, v), (\nu \circ \phi)(u, v) \rangle \|\phi'(u, v)(e_1) \times \phi'(u, v)(e_2)\| d(u, v) \\ &= \int_B \langle (\text{rot}(f) \circ \phi)(u, v), \phi'(u, v)(e_1) \times \phi'(u, v)(e_2) \rangle d(u, v). \end{aligned}$$

weil ν ein Einheitsnormalenfeld von (B, ϕ) ist. Für alle $(u, v) \in B$ gilt

$$\begin{aligned} \phi'(u, v)(e_1) \times \phi'(u, v)(e_2) &= \begin{pmatrix} \partial_1 \phi_1(u, v) \\ \partial_1 \phi_2(u, v) \\ \partial_1 \phi_3(u, v) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial_2 \phi_1(u, v) \\ \partial_2 \phi_2(u, v) \\ \partial_2 \phi_3(u, v) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_1 \phi_2(u, v) \cdot \partial_2 \phi_3(u, v) - \partial_1 \phi_3(u, v) \cdot \partial_2 \phi_2(u, v) \\ \partial_1 \phi_3(u, v) \cdot \partial_2 \phi_1(u, v) - \partial_1 \phi_1(u, v) \cdot \partial_2 \phi_3(u, v) \\ \partial_1 \phi_1(u, v) \cdot \partial_2 \phi_2(u, v) - \partial_1 \phi_2(u, v) \cdot \partial_2 \phi_1(u, v) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und Einsetzen sowie ein Ausschreiben des Standard-Skalarprodukts liefert

$$\begin{aligned} \int_{(B,\phi)} \langle \text{rot}(f), \nu \rangle dA &= \int_B (\text{rot}(f) \circ \phi)_1(u, v) dy \wedge dz + \\ &\int_B (\text{rot}(f) \circ \phi)_2(u, v) dz \wedge dx + \int_B (\text{rot}(f) \circ \phi)_3(u, v) dx \wedge dy \end{aligned} \quad (1.5)$$

wobei

$$(\text{rot}(f) \circ \phi)_1(u, v) = ((\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2) \circ \phi)(u, v)$$

$$(\text{rot}(f) \circ \phi)_2(u, v) = ((\partial_3 f_1 - \partial_1 f_3) \circ \phi)(u, v)$$

$$(\text{rot}(f) \circ \phi)_3(u, v) = ((\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1) \circ \phi)(u, v).$$

Wir zeigen nun, dass (1.5) mit der linken Seite der Stokeschen Integralgleichung übereinstimmt. Zur Abkürzung setzen wir $g = f \circ \phi$. Es gilt dann

$$\begin{aligned} \int_{\phi \circ \gamma} \langle f, \tau \rangle ds &= \int_a^b \langle (g \circ \gamma)(t), (\tau \circ \phi \circ \gamma)(t) \rangle \|(\phi \circ \gamma)'(t)\| dt = \int_a^b \langle (g \circ \gamma)(t), (\phi \circ \gamma)'(t) \rangle dt \\ &= \sum_{k=1}^w \int_a^b (g_k \circ \gamma)(t) (\phi_k \circ \gamma)'(t) dt. \end{aligned}$$

Setzen wir für $k = 1, 2, 3$ jeweils

$$F_1^{(k)}(u, v) = g_k(u, v) \phi_k'(u, v)(e_2) = g_k(u, v) \partial_2 \phi_k(u, v)$$

$$F_2^{(k)}(u, v) = -g_k(u, v) \phi_k'(u, v)(e_1) = -g_k(u, v) \partial_1 \phi_k(u, v)$$

so erhalten wir mit Hilfe der Greenschen Integralformel

$$\begin{aligned} \int_a^b (g_k \circ \gamma)(t) (\phi_k \circ \gamma)'(t) dt &= \int_a^b (g_k \circ \gamma)(t) \cdot (\phi_k'(\gamma(t)) \circ \gamma'(t)) dt \\ &= \int_a^b (g_k \circ \gamma)(t) \cdot (\phi_k'(\gamma(t))(e_1) \cdot \gamma_1'(t) + \phi_k'(\gamma(t))(e_2) \cdot \gamma_2'(t)) dt \\ &= \int_a^b \left((F_1^{(k)} \circ \gamma)(t) \cdot \gamma_2'(t) - (F_2^{(k)} \circ \gamma)(t) \gamma_1'(t) \right) dt \\ &= \int_B \left(\text{div}(F)^{(k)} \right)(u, v) d(u, v) = \int_B \left(\partial_1 F_1^{(k)}(u, v) + \partial_2 F_2^{(k)}(u, v) \right) d(u, v). \end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen von $F_1^{(k)}$ und $F_2^{(k)}$ sind gegeben durch

$$\partial_1 F_1^{(k)}(u, v) = \partial_1 g_k(u, v) \cdot \partial_2 \phi_k(u, v) - g_k(u, v) \cdot \partial_{12} \phi_k(u, v)$$

$$\partial_2 F_2^{(k)}(u, v) = -\partial_2 g_k(u, v) \cdot \partial_1 \phi_k(u, v) - g_k(u, v) \cdot \partial_{21} \phi_k(u, v).$$

Weil ϕ nach Voraussetzung zweimal stetig differenzierbar ist, gilt $\partial_{12} \phi_k = \partial_{21} \phi_k$ nach dem Lemma von Schwarz. Daraus folgt

$$\partial_1 F_1^{(k)}(u, v) + \partial_2 F_2^{(k)}(u, v) = \partial_1 g_k(u, v) \partial_2 \phi_k(u, v) - \partial_2 g_k(u, v) \partial_1 \phi_k(u, v).$$

Auf Grund der mehrdimensionalen Kettenregel gilt $g'_k(u, v) = (f_k \circ \phi)'(u, v) = f'_k(\phi(u, v)) \cdot \phi'(u, v)$. Für die partiellen Ableitungen von g_k erhalten wir so die Ausdrücke

$$\begin{aligned}\partial_1 g_k(u, v) &= \partial_1 f_k(\phi(u, v)) \cdot \partial_1 \phi_1(u, v) + \partial_2 f_k(\phi(u, v)) \cdot \partial_1 \phi_2(u, v) + \partial_3 f_k(\phi(u, v)) \cdot \partial_1 \phi_3(u, v) \\ \partial_2 g_k(u, v) &= \partial_1 f_k(\phi(u, v)) \cdot \partial_2 \phi_1(u, v) + \partial_2 f_k(\phi(u, v)) \cdot \partial_2 \phi_2(u, v) + \partial_3 f_k(\phi(u, v)) \cdot \partial_2 \phi_3(u, v)\end{aligned}$$

Daraus folgt nun für $k = 1$ die Gleichung

$$\begin{aligned}\partial_1 F_1^{(1)}(u, v) + \partial_2 F_2^{(1)}(u, v) &= \partial_1 g_1(u, v) \cdot \partial_2 \phi_1(u, v) - \partial_2 g_1(u, v) \cdot \partial_1 \phi_1(u, v) = \\ &= \partial_1 f_1(\phi(u, v)) \cdot \partial_1 \phi_1(u, v) \cdot \partial_2 \phi_1(u, v) + \partial_2 f_1(\phi(u, v)) \cdot \partial_1 \phi_2(u, v) \cdot \partial_2 \phi_1(u, v) \\ &+ \partial_3 f_1(\phi(u, v)) \cdot \partial_1 \phi_3(u, v) \cdot \partial_2 \phi_1(u, v) - \partial_1 f_1(\phi(u, v)) \cdot \partial_2 \phi_1(u, v) \cdot \partial_1 \phi_1(u, v) \\ &- \partial_2 f_1(\phi(u, v)) \cdot \partial_2 \phi_2(u, v) \cdot \partial_1 \phi_1(u, v) - \partial_3 f_1(\phi(u, v)) \cdot \partial_2 \phi_3(u, v) \cdot \partial_1 \phi_1(u, v)] \\ &= \partial_2 f_1(\phi(u, v)) \cdot (\partial_1 \phi_2(u, v) \cdot \partial_2 \phi_1(u, v) - \partial_1 \phi_1(u, v) \partial_2 \phi_2(u, v)) \\ &+ \partial_3 f_1(\phi(u, v)) \cdot (\partial_1 \phi_3(u, v) \cdot \partial_2 \phi_1(u, v) - \partial_2 \phi_3(u, v) \partial_1 \phi_1(u, v)) \\ &= \partial_3 f_1(\phi(u, v)) \cdot dz \wedge dx - \partial_2 f_1(\phi(u, v)) \cdot dx \wedge dy.\end{aligned}$$

Durch analoge Rechnungen erhält man für $k = 2, 3$ entsprechend

$$\begin{aligned}\partial_1 F_1^{(2)}(u, v) + \partial_2 F_2^{(2)}(u, v) &= \partial_1 f_2(\phi(u, v)) \cdot dx \wedge dy - \partial_3 f_2(\phi(u, v)) \cdot dy \wedge dz \\ \partial_1 F_1^{(3)}(u, v) + \partial_2 F_2^{(3)}(u, v) &= \partial_2 f_3(\phi(u, v)) \cdot dy \wedge dz - \partial_1 f_3(\phi(u, v)) \cdot dz \wedge dx.\end{aligned}$$

Setzen wir dies ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{(B, \phi)} \langle \text{rot}(f), \nu \rangle dA &= \sum_{k=1}^3 \int_B \left(\partial_1 F_1^{(k)}(u, v) + \partial_2 F_2^{(k)}(u, v) \right) d(u, v) = \\ &= \int_B ((\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2) \circ \phi)(u, v) dy \wedge dz + \int_B ((\partial_3 f_1 - \partial_1 f_3) \circ \phi)(u, v) dz \wedge dx \\ &+ \int_B ((\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1) \circ \phi)(u, v) dx \wedge dy \\ &= \int_B (\text{rot}(f) \circ \phi)_1(u, v) dy \wedge dz + \int_B (\text{rot}(f) \circ \phi)_2(u, v) dz \wedge dx + \int_B (\text{rot}(f) \circ \phi)_3(u, v) dx \wedge dy, \end{aligned}$$

was mit unserem Ergebnis für die linke Seite übereinstimmt. \square

Der Stokesche Integralsatz ermöglicht die folgende anschauliche Interpretation der Rotation eines Vektorfelds. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein \mathcal{C}^1 -Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^3$ und $p \in U$ ein beliebiger Punkt. Weiter sei $n \in \mathbb{R}^3$ ein normierter Vektor und $E \subseteq \mathbb{R}^3$ die eindeutig bestimmte affine Ebene durch p , die auf dem Vektor n senkrecht steht. Sind $v, w \in \mathbb{R}^3$ normierte, zueinander orthogonale Vektoren mit $p + v, p + w \in E$ und $v \times w = n$, dann gilt $E = \phi(\mathbb{R}^2)$, wobei $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch $\phi(s, t) = p + sv + tw$ definiert ist.

Für jedes $r \in \mathbb{R}^+$ sei $\bar{B}_r \subseteq \mathbb{R}^2$ die abgeschlossene Kreisscheibe vom Radius r um den Koordinatenursprung. Für hinreichend kleines r ist $K_r = \phi(\bar{B}_r)$ der Kreis vom Radius r mit Mittelpunkt p auf der Ebene E . Der Rand ∂B_r wird durch die positiv orientierte Kurve $\gamma_r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (r \cos(t), r \sin(t))$ durchlaufen. Die Kurve $\phi \circ \gamma_r$ besitzt ein Einheitstangentialfeld, das in jedem Punkt $p + r \cos(t)v + r \sin(t)w$ von $\phi(\partial B_r)$ mit $t \in [0, 2\pi]$ durch $\tau_r(p) = -\sin(t)v + \cos(t)w$ gegeben ist. In Analogie zu (1.23) erhalten wir nun die folgende Aussage.

(1.27) Satz Mit den soeben eingeführten Bezeichnungen gilt

$$\langle \operatorname{rot}(f)(p), n \rangle = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{\phi \circ \gamma_r} \langle f, \tau_r \rangle ds.$$

Beweis: Für jedes $r \in \mathbb{R}^+$ mit $\phi(B_r) \subseteq U$ sei $m_-(r)$ das Minimum und $m_+(r)$ das Maximum der Funktion $x \mapsto \langle \operatorname{rot}(f)(x), n \rangle$ auf der Kreisscheibe \bar{B}_r . Man rechnet unmittelbar nach, dass die parametrisierte Fläche (K_r, ϕ) den Flächeninhalt πr^2 besitzt. Auf Grund der Monotonie des Riemann-Integrals folgt daraus die Abschätzung $\pi r^2 m_-(r) \leq \int_{(B_r, \phi)} \langle \operatorname{rot}(f), n \rangle dA \leq \pi r^2 m_+(r)$. Mit dem Stokeschen Integralsatz, angewendet auf das konstante Einheitsnormalenfeld $\nu : E \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch $\nu(x) = n$, folgt

$$\pi r^2 m_-(r) \leq \int_{\phi \circ \gamma_r} \langle f, \tau_r \rangle ds \leq \pi r^2 m_+(r) \quad \Leftrightarrow \quad m_-(r) \leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{\phi \circ \gamma_r} \langle f, \tau_r \rangle ds \leq m_+(r).$$

Auf Grund der stetigen Differenzierbarkeit von f sind $\operatorname{rot}(f)$ und auch die Funktion $x \mapsto \langle \operatorname{rot}(f)(x), n \rangle$ stetig. Daraus folgt $\lim_{r \rightarrow 0} m_-(r) = \lim_{r \rightarrow 0} m_+(r) = \langle \operatorname{rot}(f)(p), n \rangle$. Durch Einsetzen in die Ungleichungen von oben erhalten wir das gewünschte Ergebnis. \square

Der soeben bewiesene Satz ermöglicht es, die Rotation eines Vektorfelds als „Wirbelstärke“ zu interpretieren: Ist das Vektorfeld f in der Nähe des Punktes p mit dem Einheitstangentialfeld τ_r der Kurve $\phi \circ \gamma_r$ gleichgerichtet, dann nimmt die Funktion $x \mapsto \langle f(x), \tau_r(x) \rangle$ und somit auch das Integral hinter dem Limes positive Werte an. Eine positive Rotation von f zeigt also einen „Wirbel“ des Vektorfelds um den Punkt p herum, und zwar gegen den Uhrzeigersinn an, wenn man die Ebene E von derjenigen Seite betrachtet, auf die der Normalenvektor n zeigt. Eine negativer Wert von $\operatorname{rot}(f)$ dagegen bedeutet einen Wirbel im Uhrzeigersinn.

Der Greensche Integralsatz lässt sich auf Normalbereiche im \mathbb{R}^3 und dreidimensionale Vektorfelder übertragen; man bezeichnet diese Aussage dann als **Gaußschen Integralsatz**. Allerdings ist die allgemeine Formulierung hier schon recht kompliziert (siehe [He], §210). Eine einfache und elegante Formulierung erhält man, wenn man Normalbereiche durch sog. **glatt berandete Teilmengen** des \mathbb{R}^n ersetzt, was aber mit einem hohen technischen Aufwand vorbereitet werden muss. Aus diesen Gründen beschränken wir uns darauf, den Gaußschen Integralsatz für Quader herzuleiten.

Seien a, b, c, d, r, s reelle Zahlen mit $a < b, c < d$ und $r < s$, und sei $Q \subseteq \mathbb{R}^3$ der Quader gegeben durch $Q = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$. Die sechs Seitenflächen S_1, \dots, S_6 von Q lassen sich durch folgende Parametrisierungen beschreiben. Für $1 \leq i \leq 6$ definieren wir $\phi_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch

$$\begin{aligned} \phi_1(u, v) &= (a, u, v) & \phi_2(u, v) &= (b, u, v) & \phi_3(u, v) &= (u, c, v) \\ \phi_4(u, v) &= (u, d, v) & \phi_5(u, v) &= (u, v, r) & \phi_6(u, v) &= (u, v, s) \end{aligned}$$

und Teilmengen $B_i \subseteq \mathbb{R}^2$ durch

$$\begin{aligned} B_1 &= [c, d] \times [r, s] & B_2 &= [c, d] \times [r, s] & B_3 &= [a, b] \times [r, s] \\ B_4 &= [a, b] \times [r, s] & B_5 &= [a, b] \times [c, d] & B_6 &= [a, b] \times [c, d] \end{aligned}$$

Für jede Seitenfläche $S_i = \phi(B_i)$ unsere Quaders gibt es einen eindeutig bestimmten normierten Vektor $n_i \in \mathbb{R}^3$, der auf S_i senkrecht steht und aus dem Quader Q herauszeigt, nämlich

$$\begin{aligned} n_1 &= (-1, 0, 0) & n_2 &= (1, 0, 0) & n_3 &= (0, -1, 0) \\ n_4 &= (0, 1, 0) & n_5 &= (0, 0, -1) & n_6 &= (0, 0, 1). \end{aligned}$$

Sei $\nu : \partial Q \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld mit der folgenden Eigenschaft: Für $1 \leq i \leq 6$ gibt es jeweils eine Jordansche Nullmenge $N_i \subseteq B_i$, so dass für alle $(u, v) \in B_i \setminus N_i$ jeweils $(\nu \circ \phi)(u, v) = n_i$ erfüllt ist. Wir bezeichnen ein solches Vektorfeld als **äußeres Einheitsnormalenfeld** auf Q . (Diese Definition ist notwendig, da ∂Q nicht als parametrisierte Fläche dargestellt und Def. (1.25) somit nicht anwendbar ist.) Ist $g : \partial Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, dann setzen wir

$$\int_{\partial Q} g \, dA = \sum_{i=1}^6 \int_{(B_i, \phi_i)} g \, dA.$$

Ein Analogon für (1.22) in drei Dimensionen kann nun folgendermaßen ausgesprochen werden.

(1.28) Satz (Gaußscher Integralsatz)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein \mathcal{C}^1 -Vektorfeld, $Q \subseteq U$ ein Quader wie oben angegeben und $\nu : \partial Q \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Einheitsnormalenfeld. Dann gilt

$$\int_{\partial Q} \langle f, n \rangle \, dA = \int_Q \operatorname{div}(f)(x, y, z) \, d(x, y, z).$$

Beweis: Ähnlich wie beim Greenschen Integralsatz wenden wir den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung an, um die sechs Summanden, aus denen der Term auf der linken Seite gebildet wird, geeignet umzuformen. Für alle $(u, v) \in B_1$ gilt $\phi'_1(u, v)(e_1) = (0, 1, 0)$ und $\phi'_1(u, v)(e_2) = (0, 0, 1)$, also $\phi'_1(u, v)(e_1) \times \phi'_1(u, v)(e_2) = (0, 1, 0) \times (0, 0, 1) = (1, 0, 0)$ und $\|\phi'_1(u, v)(e_1) \times \phi'_1(u, v)(e_2)\| = \|(1, 0, 0)\| = 1$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{(B_1, \phi_1)} \langle f, n \rangle \, dA &= \int_{B_1} \langle (f \circ \phi_1)(u, v), n_1 \rangle \|\phi'_1(u, v)(e_1) \times \phi'_1(u, v)(e_2)\| \, d(u, v) = \\ \int_{B_1} \left\langle \begin{pmatrix} (f_1 \circ \phi_1)(u, v) \\ (f_2 \circ \phi_1)(u, v) \\ (f_3 \circ \phi_1)(u, v) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \, d(u, v) &= - \int_{B_1} (f_1 \circ \phi_1)(u, v) \, d(u, v) = - \int_{B_1} f_1(a, u, v) \, d(u, v). \end{aligned}$$

Ebenso zeigt man $\int_{(B_2, \phi_2)} \langle f, n \rangle dA = \int_{B_2} f_2(b, u, v) d(u, v)$. Insgesamt erhalten wir dann

$$\int_{(B_1, \phi_1)} \langle f, n \rangle dA + \int_{(B_2, \phi_2)} \langle f, n \rangle dA = \int_{B_2} f_2(b, u, v) d(u, v) - \int_{B_1} f_1(a, u, v) d(u, v) =$$

$$\int_{[c, d] \times [r, s]} (f_1(b, u, v) - f_1(a, u, v)) d(u, v) = \int_{[c, d] \times [r, s]} \left(\int_a^b \partial_1 f_1(x, u, v) dx \right) d(u, v) = \int_Q \partial_1 f_1(x, y, z) d(x, y, z)$$

wobei im vorletzten Schritt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und im letzten Schritt der Satz von Fubini angewendet wurde. Genau nach demselben Muster beweist man die beiden Gleichungen

$$\int_{(B_3, \phi_3)} \langle f, n \rangle dA + \int_{(B_4, \phi_4)} \langle f, n \rangle dA = \int_Q \partial_2 f_2(x, y, z) d(x, y, z)$$

$$\int_{(B_5, \phi_5)} \langle f, n \rangle dA + \int_{(B_6, \phi_6)} \langle f, n \rangle dA = \int_Q \partial_3 f_3(x, y, z) d(x, y, z).$$

Addiert man nun diese drei Gleichungen auf, so erhält man

$$\int_{\partial Q} \langle f, n \rangle dA = \sum_{i=1}^6 \int_{(B_i, \phi_i)} \langle f, n \rangle dA =$$

$$\int_Q \partial_1 f_1(x, y, z) d(x, y, z) + \int_Q \partial_2 f_2(x, y, z) d(x, y, z) + \int_Q \partial_3 f_3(x, y, z) d(x, y, z)$$

$$= \int_Q (\operatorname{div}(f))(x, y, z) d(x, y, z)$$

wie gewünscht. □

1.4 Das Lebesgue-Integral

Inhaltsübersicht

- ☆ Unzulänglichkeiten der Riemannschen Integraldefinition
- ☆ Definition des Raums $\tilde{\mathcal{L}}(\mathbb{R}^n)$ der Funktionen mit abzählbarer Obersumme mit der Halbnorm $\|\cdot\|_{\tilde{\mathcal{L}}}$
- ☆ Definition des Raums $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ der Lebesgue-integrierbaren Funktionen und des Lebesgue-Integrals
- ☆ Abgeschlossenheits-Eigenschaften von $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ und elementare Rechenregeln für das Lebesgue-Integral
- ☆ Konvergenzsätze für das Lebesgue-Integral: Satz von Beppo-Levi über monotone und Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz
- ☆ Stetigkeit des Lebesgue-Integrals und Differentiation unter dem Integralzeichen

In diesem Abschnitt werden wir neben einer Erweiterung des Integralbegriffs auch das Verhalten von Funktionen bei Grenzübergängen betrachten. Dabei unterscheidet man grundsätzlich zwei verschiedene Arten von Konvergenz. Für jede Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem metrischen Raum X setzen wir

$$\|f\|_{\infty} = \sup \{|f(x)| \mid x \in X\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

Die Funktion f ist also genau dann beschränkt, wenn $\|f\|_{\infty} \in \mathbb{R}_+$ gilt. Man sagt, eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert *punktweise* gegen eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in X$$

erfüllt ist. Gilt sogar $\lim_n \|f_n - f\|_{\infty} = 0$, dann spricht man von *gleichmäßiger* Konvergenz.

Das Riemann-Integral, das wir bisher betrachtet haben, weist zwei gravierende Mängel auf. Zum einen ist es nur für Funktionen mit beschränktem Definitionsbereich definiert. Dagegen kann einer Funktion wie zum Beispiel $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^2}$ bereits kein Riemann-Integral mehr zugeordnet werden. Für jedes $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ gilt allerdings

$$\int_1^a f(x) dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^a = 1 - \frac{1}{a}$$

so dass im Prinzip nichts dagegen sprechen würde, dieser Funktion das Integral

$$\int_{[1, +\infty[} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a f(x) dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{a} \right) = 1 \quad \text{zuzuordnen.}$$

Allerdings ist diese indirekte Definition über Grenzwerte besonders im Mehrdimensionalen sehr unhandlich. Beispielsweise muss man sicherstellen, dass die vielen verschiedenen Möglichkeiten, einen Grenzübergang durchzuführen, alle denselben Grenzwert liefern.

Ein weiterer Nachteil des Riemann-Integrals besteht darin, dass es nur unter sehr starken Voraussetzungen mit Grenzübergängen vertauschbar ist, die in den Anwendungen nur selten vorliegen. Als Beispiel betrachten wir die Dirichlet-Funktion $\chi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

die, wie wir bereits gesehen haben, nicht Riemann-integrierbar ist. Sei nun $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge, die alle Elemente aus $N = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ durchläuft. Definieren wir eine Funktionenfolge $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \{x_1, \dots, x_n\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

dann konvergiert die Folge $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen χ , außerdem stimmt χ mit allen χ_n außerhalb der Nullmenge N überein. Deshalb wäre es nur natürlich, der Funktion χ das Integral

$$\int_0^1 \chi(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \chi_n(x) dx = 0 \quad \text{zuzuordnen.}$$

Wir werden nun sehen, wie die Klasse der integrierbaren Funktionen auf solche Fälle ausgedehnt werden kann.

Für jede Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnen wir den Abschluss der Menge $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}$ als den **Träger** $\text{supp}(f)$ von f . Die Menge der stetigen Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger bezeichnen wir mit $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$. Für jede Funktion $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ wählen wir einen kompakten Quader Q mit $Q \supseteq \text{supp}(f)$ und setzen

$$I(f) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx := \int_Q f(x) dx.$$

Wie wir bereits in der Analysis mehrerer Variablen gesehen haben, ist der Wert $I(f) \in \mathbb{R}$ unabhängig von der Wahl dieses Quaders. Die Zuordnung $I : \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ ist **linear**, es gilt also

$$I(f + g) = I(f) + I(g) \quad \text{und} \quad I(\lambda f) = \lambda I(f) \quad \text{für alle } f, g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n) \text{ und } \lambda \in \mathbb{R},$$

insbesondere sind mit f und g auch $f + g$ und λf in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ enthalten. Außerdem ist I **monoton**, d.h. aus $f \leq g$ folgt $I(f) \leq I(g)$, für alle $f, g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$. Im weiteren Verlauf werden wir des öfteren verwenden, dass mit $f, g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ auch die Funktionen $|f|$, $f \vee g = \max\{f, g\}$ und $f \wedge g = \min\{f, g\}$ in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ liegen. Die Teilmenge aller Funktionen $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $\mathcal{C}_c^+(\mathbb{R}^n)$.

(1.29) Definition Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \phi_k$ von Funktionen $\phi_k \in \mathcal{C}_c^+(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet man als **Majorante** einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, wenn

$$|f(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} I(\phi_k) < +\infty \quad \text{gilt.}$$

Die Menge aller Funktionen f , die eine Majorante besitzen, bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Eine Summe der Form $\sum_{k=1}^{\infty} I(\phi_k)$ wird dann eine **Obersumme** von f genannt, und wir setzen

$$\|f\|_{\mathcal{L}} = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} I(\phi_k) \mid \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k \text{ ist Majorante von } f \right\}.$$

Wir werden nun zunächst die Eigenschaften des Funktionenraums $\tilde{\mathcal{L}}(\mathbb{R}^n)$ untersuchen.

(1.30) Proposition Sei $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\tilde{\mathcal{L}}(\mathbb{R}^n)$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_{\mathcal{L}} < +\infty$ und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft $|f(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x)|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Dann liegt auch f in $\tilde{\mathcal{L}}(\mathbb{R}^n)$, und es gilt $\|f\|_{\mathcal{L}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_{\mathcal{L}}$.

Beweis: Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Nach Voraussetzung existiert für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Majorante $\sum_{j=1}^{\infty} \phi_j^{(k)}$ mit $\sum_{j=1}^{\infty} I(\phi_j^{(k)}) < \|g_k\|_{\mathcal{L}} + 2^{-k}\varepsilon$. Es gilt dann

$$|f(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j^{(k)}(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Also hat auch die Funktion f eine Majorante, und es folgt $f \in \tilde{\mathcal{L}}(\mathbb{R}^n)$. Außerdem gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} I(\phi_j^{(k)}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (\|g_k\|_{\mathcal{L}} + 2^{-k}\varepsilon) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_{\mathcal{L}} + \varepsilon.$$

Nach Definition von $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ folgt $\|f\|_{\mathcal{L}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_{\mathcal{L}} + \varepsilon$. Da $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig vorgegeben war, erhalten wir $\|f\|_{\mathcal{L}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_{\mathcal{L}}$. \square

(1.31) Definition Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ auf einem \mathbb{R} -Vektorraum V wird **Halbnorm** genannt, wenn $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ und $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ für alle $v, w \in V$.

Für den Nullvektor 0_V gilt bei einer Halbnorm $\|\cdot\|$ weiterhin $\|0_V\| = \|0 \cdot 0_V\| = |0| \|0_V\| = 0$. Die einzige Bedingung, die gegenüber einer Norm im allgemeinen nicht erfüllt ist, ist die Implikation $\|v\| = 0 \Rightarrow v = 0_V$ für alle $v \in V$.

(1.32) Proposition

- (i) Ist $f \in \tilde{\mathcal{L}}(\mathbb{R}^n)$ und $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, dann liegt auch fg in $\tilde{\mathcal{L}}(\mathbb{R}^n)$, und es gilt $\|fg\|_{\mathcal{L}} \leq \|f\|_{\mathcal{L}} \|g\|_{\infty}$.
- (ii) Es ist $\tilde{\mathcal{L}}(\mathbb{R}^n)$ ein \mathbb{R} -Vektorraum, und $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ ist eine Halbnorm auf $\tilde{\mathcal{L}}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis: zu (i) Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Dann gibt es eine Majorante $\sum_{k=1}^{\infty} \phi_k$ von f mit $\sum_{k=1}^{\infty} I(\phi_k) < \|f\|_{\mathcal{L}} + \varepsilon$. Wegen $|fg| \leq \|g\|_{\infty} |f|$ ist dann $\sum_{k=1}^{\infty} \|g\|_{\infty} \phi_k$ eine Majorante von fg , und aus $I(\|g\|_{\infty} \phi_k) = \|g\|_{\infty} I(\phi_k)$ folgt

$$\|fg\|_{\mathcal{L}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} I(\|g\|_{\infty} \phi_k) = \|g\|_{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} I(\phi_k) < \|f\|_{\mathcal{L}} \|g\|_{\infty} + \varepsilon \|g\|_{\infty}.$$

Weil $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig vorgegeben war, erhalten wir $\|fg\|_{\mathcal{L}} \leq \|f\|_{\mathcal{L}} \|g\|_{\infty}$.

zu (ii) Zunächst zeigen wir, dass $\tilde{\mathcal{L}}(\mathbb{R}^n)$ ein Untervektorraum des \mathbb{R} -Vektorraums aller Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist. Sind $f, g \in \tilde{\mathcal{L}}(\mathbb{R}^n)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ vorgegeben und $\sum_{k=1}^{\infty} \phi_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k$ Majoranten von f bzw. g , dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} (\phi_k + \psi_k)$ offenbar eine Majorante von $f + g$ und $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda| \phi_k$ eine Majorante von λf . Also sind $f + g$ und λf in $\tilde{\mathcal{L}}(\mathbb{R}^n)$ enthalten.

Die Dreiecksungleichung $\|f + g\|_{\mathcal{L}} \leq \|f\|_{\mathcal{L}} + \|g\|_{\mathcal{L}}$ ist ein Spezialfall von (1.30), und aus Teil (i) angewendet auf die konstante Funktion $g(x) = \lambda$ folgt $\|\lambda f\|_{\mathcal{L}} \leq |\lambda| \|f\|_{\mathcal{L}}$. Außerdem gilt

$$\|f\|_{\mathcal{L}} = \left\| \frac{1}{\lambda} \cdot \lambda \cdot f \right\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda f\|_{\mathcal{L}}$$

und somit $|\lambda| \|f\|_{\mathcal{L}} \leq \|\lambda f\|_{\mathcal{L}}$. Insgesamt erhalten wir $\|\lambda f\|_{\mathcal{L}} = |\lambda| \cdot \|f\|_{\mathcal{L}}$. □

(1.33) Definition Eine Funktion $f \in \tilde{\mathcal{L}}(\mathbb{R}^n)$ wird *Lebesgue-integrierbar* genannt, wenn eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_{\mathcal{L}} = 0 \quad \text{existiert.}$$

Die Teilmenge der Lebesgue-integrierbaren Funktionen in $\tilde{\mathcal{L}}(\mathbb{R}^n)$ bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Eine Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir als Lebesgue-integrierbar, wenn ihre Nullfortsetzung auf \mathbb{R}^n Lebesgue-integrierbar ist.

Offenbar ist $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ein Untervektorraum des \mathbb{R} -Vektorraums $\tilde{\mathcal{L}}(\mathbb{R}^n)$. Sind nämlich $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ vorgegeben und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Funktionenfolgen wie in der Definition angegeben, dann sind auch $(f_n + g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\lambda f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$. Aus

$$0 \leq \|(f_n + g_n) - (f + g)\|_{\mathcal{L}} \leq \|f_n - f\|_{\mathcal{L}} + \|g_n - g\|_{\mathcal{L}}$$

und $\lim_n \|f_n - f\|_{\mathcal{L}} = \lim_n \|g_n - g\|_{\mathcal{L}} = 0$ folgt $\lim_n \|(f_n + g_n) - (f + g)\|_{\mathcal{L}} = 0$, außerdem gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\lambda f_n - \lambda f\|_{\mathcal{L}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\lambda(f_n - f)\|_{\mathcal{L}} = |\lambda| \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\mathcal{L}} \right) = |\lambda| \cdot 0 = 0.$$

Als nächstes werden wir nun den Lebesgue-integrierbaren Funktionen ein Integral zuordnen. Das Hauptproblem beim Nachweis der Wohldefiniiertheit des Integrals wird die Herleitung der Gleichung $I(|\phi|) = \|\phi\|_{\mathcal{L}}$ für alle Funktionen $\phi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ sein. Wesentliches Hilfsmittel hierfür wiederum ist der Satz von Dini, welcher besagt, dass auf kompakten Räumen *monoton wachsende* punktweise konvergente Folgen stetiger Funktionen auch gleichmäßig konvergieren.

(1.34) Satz (*Satz von Dini*)

Sei X ein kompakter metrischer Raum und $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine punktweise monoton wachsende Folge stetiger Funktionen $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$ (es gelte also $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$ für alle $x \in X$ und $k \in \mathbb{N}$). Sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft, dass $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen f konvergiert. Dann konvergiert $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ auch gleichmäßig gegen f .

Beweis: Für vorgegebenes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und $k \in \mathbb{N}$ sei jeweils $U_k = \{x \in X \mid f(x) - f_k(x) < \varepsilon\}$. Auf Grund der Stetigkeit von f_k und f ist jedes U_k offen. Auf Grund der punktweisen Konvergenz bilden sie außerdem eine Überdeckung von X , denn für jedes $x \in X$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $f(x) - f_k(x) < \varepsilon$, und es folgt dann

$x \in U_k$. Wegen $f(x) - f_{k+1} \leq f(x) - f_k(x)$ gilt jeweils $U_k \subseteq U_{k+1}$. Weil X kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung von $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und wegen $U_k \subseteq U_{k+1}$ für alle k somit ein $\ell \in \mathbb{N}$ mit $U_\ell = X$. Für alle $k \geq \ell$ und $x \in X$ gilt also $f(x) - f_\ell(x) < \varepsilon$. Damit ist die gleichmäßige Konvergenz bewiesen. \square

Nun müssen wir noch sicherstellen, dass gleichmäßige Konvergenz einer Folge $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gegen eine Funktion ϕ in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ auch $\lim_k I(\phi_k) = I(\phi)$ impliziert. Ein Problem hierbei ist, dass wir $I(\cdot)$ nicht auf charakteristische Funktionen von Mengen, sondern nur auf stetige Funktionen anwenden können. Deshalb benötigen wir ein wenig technische Vorbereitung. Für eine beliebige Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ sei die Funktion $d_K : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ definiert durch

$$d_K(x) = \inf \{ \|x - y\|_\infty \mid y \in K \} ,$$

wobei $\|\cdot\|_\infty$ die Maximumsnorm auf \mathbb{R}^n bezeichnet. Diese Funktion gibt also den $\|\cdot\|_\infty$ -Abstand zwischen dem Punkt x und der Menge K an. Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und jede Menge K definieren wir eine Funktion $\chi_{K,\varepsilon} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ durch

$$\chi_{K,\varepsilon}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\varepsilon} d_K(x) & \text{falls } d_K(x) \leq \varepsilon \\ 0 & \text{falls } d_K(x) \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Es ist leicht zu zeigen, dass d_K und damit auch die Funktionen $\chi_{K,\varepsilon}$ stetig sind. Wir haben damit der (in aller Regel unstetigen) charakteristischen Funktion χ_K eine Familie von stetigen Funktionen zugeordnet, die sich von χ_K nur auf einem „kleinen“ Bereich unterscheiden. Ist $K \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt, dann ist $\chi_{K,\varepsilon}$ darüber hinaus in $\mathcal{C}_c^+(\mathbb{R}^n)$ enthalten. Insbesondere ist der Träger von $\chi_{K,\varepsilon}$ nur geringfügig größer als der Träger von χ_K . Ist beispielsweise K ein Quader der Form $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$, dann gilt

$$\text{supp}(\chi_{K,\varepsilon}) = [a_1 - \varepsilon, b_1 + \varepsilon] \times \dots \times [a_n - \varepsilon, b_n + \varepsilon].$$

(1.35) Proposition Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{supp}(\phi_k) \subseteq K$ und $\lim_k \|\phi_k\|_\infty = 0$. Dann folgt $\lim_{k \rightarrow \infty} I(\phi_k) = 0$.

Beweis: Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ gelten jeweils die Ungleichungen

$$-\|\phi_k\|_\infty \cdot \chi_{K,\varepsilon} \leq -\|\phi_k\|_\infty \cdot \chi_K \leq \phi_k \leq \|\phi_k\|_\infty \cdot \chi_K \leq \|\phi_k\|_\infty \cdot \chi_{K,\varepsilon}$$

Auf Grund der Monotonie der Funktion I folgt daraus $-\|\phi_k\|_\infty I(\chi_{K,\varepsilon}) \leq I(\phi_k) \leq \|\phi_k\|_\infty I(\chi_{K,\varepsilon})$. Aus der Voraussetzung $\|\phi_k\|_\infty \rightarrow 0$ folgt also $I(\phi_k) \rightarrow 0$. \square

(1.36) Proposition Für jedes $\phi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ gilt $|I(\phi)| \leq I(|\phi|) = \|\phi\|_{\mathcal{L}}$.

Beweis: Aus $\phi \leq |\phi|$ folgt $I(\phi) \leq I(|\phi|)$, und wegen $I(|\phi|) \geq 0$ erhalten wir $|I(\phi)| \leq I(|\phi|)$. Weil $|\phi|$ eine Majorante von ϕ ist, gilt außerdem $\|\phi\|_{\mathcal{L}} \leq I(|\phi|)$ nach Definition der Halbnorm $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$. Zum Beweis der Ungleichung $I(|\phi|) \leq \|\phi\|_{\mathcal{L}}$ sei $\sum_{k=1}^{\infty} \phi_k$ eine beliebige Majorante von $|\phi|$. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ sei

$$\psi_m = |\phi| \wedge \left(\sum_{k=1}^m \phi_k \right) \in \mathcal{C}_c^+(\mathbb{R}^n).$$

Offenbar gilt $\text{supp}(\psi_m) \subseteq \text{supp} |\phi|$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Außerdem konvergiert $(\psi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ punktweise wegen $|\phi|$, denn auf Grund der Vertauschbarkeit von Minimum und Maximum mit Grenzwerten gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \psi_m(x) = \min \left\{ |\phi(x)|, \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \phi_k(x) \right\} = \min \left\{ |\phi(x)|, \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(x) \right\} = |\phi(x)|.$$

Weil die Träger von $|\phi|$ und ψ_m kompakt sind und die Folge $(\psi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ außerdem monoton wachsend ist, können wir den Satz von Dini anwenden. Demnach konvergiert die Folge $(\psi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $|\phi|$, es gilt also

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\psi_m - |\phi|\|_{\infty} = 0.$$

Nach (1.35) folgt daraus $\lim_m I(\psi_m) = I(|\phi|)$. Außerdem gilt $\psi_m \leq \sum_{k=1}^m \phi_k$ für alle $m \in \mathbb{N}$, damit

$$I(\psi_m) \leq \sum_{k=1}^m I(\phi_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} I(\phi_k)$$

und $|I(\psi_m)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} I(\phi_k)$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Wegen $I(\psi_m) \rightarrow I(|\phi|)$ folgt daraus $|I(\phi)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} I(\phi_k)$. Weil die Majorante beliebig vorgegeben war, erhalten wir $|I(\phi)| \leq \|\phi\|_{\mathcal{L}}$ wie gewünscht. \square

(1.37) Definition Sei $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ und $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\lim_k \|f_k - f\|_{\mathcal{L}} = 0$. Dann ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} I(f_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) dx$$

das *Lebesgue-Integral* der Funktion f . Jede Lebesgue-integrierbare Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ ordnen wir das Lebesgue-Integral der Nullfortsetzung zu.

Um zu zeigen, dass der angegebene Grenzwert existiert, weisen wir nach, dass die Zahlen $I(f_k) = \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) dx$ eine Cauchyfolge bilden. Nach Voraussetzung existiert für beliebig vorgegebenes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\|f_k - f\|_{\mathcal{L}} < \frac{1}{2}\varepsilon$ für alle $k \geq N$ gilt. Nach (1.36) folgt für alle $k, \ell \geq N$ dann

$$|I(f_k) - I(f_\ell)| = |I(f_k - f_\ell)| \leq \|f_k - f_\ell\|_{\mathcal{L}} \leq \|f_k - f\|_{\mathcal{L}} + \|f_\ell - f\|_{\mathcal{L}} < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Wir müssen noch zeigen, dass das Lebesgue-Integral von $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ unabhängig von der Wahl der Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist. Sei $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine weitere Folge mit den in der Definition angegebenen Eigenschaften. Wegen

$$\|f_k - g_k\|_{\mathcal{L}} = \|(f_k - f) + (f - g_k)\|_{\mathcal{L}} \leq \|f_k - f\|_{\mathcal{L}} + \|g_k - f\|_{\mathcal{L}}$$

gilt $\lim_k \|f_k - g_k\|_{\mathcal{L}} = 0$. Nach (1.36) gilt $|I(f_k - g_k)| \leq \|f_k - g_k\|_{\mathcal{L}}$, also folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |I(f_k) - I(g_k)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |I(f_k - g_k)| = 0$$

und somit $\lim_k I(f_k) = \lim_k I(g_k)$.

Ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger, dann kann als Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ die konstante Folge $f_k = f$ gewählt werden. In diesem Fall stimmen Riemann- und Lebesgue-Integral also überein. Die Aussage gilt auch für beliebige Riemann-integrierbare Funktionen, was hier aber nicht gezeigt wird.

(1.38) Proposition Sind $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n}^{\mathcal{L}} (f + g)(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n}^{\mathcal{L}} f(x) dx + \int_{\mathbb{R}^n}^{\mathcal{L}} g(x) dx \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^n}^{\mathcal{L}} (\lambda f)(x) dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^n}^{\mathcal{L}} f(x) dx.$$

Beweis: Wir führen diese Eigenschaften des Lebesgue-Integrals auf $I(\cdot)$ zurück. Nach Voraussetzung gibt es Folgen $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\lim_k \|f_k - f\|_{\mathcal{L}} = 0$ und $\lim_k \|g_k - g\|_{\mathcal{L}} = 0$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\|(f_k + g_k) - (f + g)\|_{\mathcal{L}} \leq \|f_k - f\|_{\mathcal{L}} + \|g_k - g\|_{\mathcal{L}} \quad \text{und} \quad \|(\lambda f_k) - (\lambda f)\|_{\mathcal{L}} = |\lambda| \cdot \|f_k - f\|_{\mathcal{L}}.$$

Daraus folgt $\lim_k \|(f_k + g_k) - (f + g)\|_{\mathcal{L}} = 0$ und $\lim_k \|(\lambda f_k) - (\lambda f)\|_{\mathcal{L}} = 0$. Nach Definition des Lebesgue-Integrals gilt damit

$$\int_{\mathbb{R}^n}^{\mathcal{L}} (f + g)(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} I(f_k + g_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} I(f_k) + \lim_{k \rightarrow \infty} I(g_k) = \int_{\mathbb{R}^n}^{\mathcal{L}} f(x) dx + \int_{\mathbb{R}^n}^{\mathcal{L}} g(x) dx$$

und ebenso $\int_{\mathbb{R}^n}^{\mathcal{L}} (\lambda f)(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} I(\lambda f_k) = \lambda \lim_{k \rightarrow \infty} I(f_k) = \lambda \int_{\mathbb{R}^n}^{\mathcal{L}} f(x) dx. \quad \square$

(1.39) Proposition

- (i) Ist f Lebesgue-integrierbar, dann auch $|f|$.
- (ii) Sind $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, dann auch die Funktionen $f \wedge g$ und $f \vee g$.
- (iii) Sei $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ und $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Ist g zusätzlich stetig oder $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, dann folgt $f g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis: zu (i) Die Funktion $|f|$ ist jedenfalls in $\tilde{\mathcal{L}}(\mathbb{R}^n)$ enthalten, weil mit f auch $|f|$ eine Majorante besitzt. Sei nun $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\lim_k \|f_k - f\|_{\mathcal{L}} = 0$. Wegen $\|f| - |f_k|\| \leq |f - f_k|$ gilt dann auch $\lim_k \||f_k| - |f|\|_{\mathcal{L}} = 0$. Weil die Funktionen $|f_k|$ in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ liegen, folgt daraus die Behauptung.

zu (ii) Dies folgt direkt aus den Gleichungen $f \wedge g = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$ und $f \vee g = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ sowie der Tatsache, dass die Lebesgue-integrierbaren Funktionen einen Untervektorraum von $\tilde{\mathcal{C}}(\mathbb{R}^n)$ bilden.

zu (iii) Sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ wiederum eine Folge in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\lim_k \|f_k - f\|_{\mathcal{L}} = 0$. Nach (1.32) gilt

$$\|f g - f_k g\|_{\mathcal{L}} \leq \|g\|_{\infty} \|f_k - f\|_{\mathcal{L}}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Ist g stetig, dann liegen die Funktionen $f_k g$ alle in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, und aus $\lim_k \|f g - f_k g\|_{\mathcal{L}} = 0$ folgt die Lebesgue-Integrierbarkeit von $f g$. Ist g statt dessen ein Element aus $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, dann wählen wir für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $g_k \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\|g_k - g\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{1}{k \|f_k\|_{\infty}}$$

falls $f_k \neq 0$ und setzen ansonsten $g_k = 0$. Dann folgt $\|f_k g - f_k g_k\|_{\mathcal{L}} \leq \|f_k\|_{\infty} \|g_k - g\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{1}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Zusammen mit der Abschätzung

$$\|f_k g_k - f g\|_{\mathcal{L}} \leq \|f_k g_k - f_k g\|_{\mathcal{L}} + \|f_k g - f g\|_{\mathcal{L}} \leq \|f_k g_k - f_k g\|_{\mathcal{L}} + \|g\|_{\infty} \|f_k - f\|_{\mathcal{L}}$$

erhalten wir $\lim_k \|f_k g_k - f g\|_{\mathcal{L}} = 0$ und somit $f g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. \square

Zur Vereinfachung der Notation lassen wir das „ \mathcal{L} “ über dem Integralzeichen von nun an weg. Sollte einmal das Riemann-Integral an Stelle des Lebesgue-Integrals gemeint sein, wird ausdrücklich darauf hingewiesen.

(1.40) Proposition (Rechenregeln für das Lebesgue-Integral)

- (i) Für alle $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ gilt $\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx = \|f\|_{\mathcal{L}}$.
- (ii) Ist $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ und $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ mit $\lim_k \|f_k - f\|_{\mathcal{L}} = 0$, dann ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx.$$

- (iii) Aus $f \geq 0$ folgt $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \geq 0$.
- (iv) Sei $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ und $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und außerdem stetig oder in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ enthalten. Dann gilt

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x) dx \right| \leq \|g\|_{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx.$$

Beweis: zu (i) Wir führen die Aussage auf die Ungleichungen $|I(f)| \leq I(|f|) = \|f\|_{\mathcal{L}}$ für $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ aus (1.36) zurück. Sei also $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ und $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\lim_k \|f_k - f\|_{\mathcal{L}} = 0$. Nach Definition des Lebesgue-Integrals gilt $\lim_k I(f_k) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$. Wegen $\|f_k| - |f|\| \leq |f_k - f|$ gilt $\| |f_k| - |f| \|_{\mathcal{L}} \leq \|f_k - f\|_{\mathcal{L}}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und damit $\lim_k I(|f_k|) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx$. Nun gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \right| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx - \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) dx \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) dx \right| \\ &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx - \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) dx \right| + \int_{\mathbb{R}^n} |f_k(x)| dx. \end{aligned}$$

Für $k \rightarrow \infty$ läuft der erste Summand auf der rechten Seite gegen Null und der zweite gegen $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx$. Daraus folgt die erste behauptete Ungleichung. Für die Gleichung betrachten wir

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |f_k(x)| dx + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx - \int_{\mathbb{R}^n} |f_k(x)| dx \right) \\ &= \|f_k\|_{\mathcal{L}} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx - \int_{\mathbb{R}^n} |f_k(x)| dx \right). \end{aligned}$$

Für $k \rightarrow \infty$ konvergiert der erste Summand gegen $\|f\|_{\mathcal{L}}$ und der zweite gegen Null.

zu (ii) Dies folgt direkt aus Teil (i), denn für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) dx - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f_k(x) - f(x)| dx \leq \|f - f_k\|_{\mathcal{L}}.$$

Läuft der Ausdruck rechts gegen Null, dann also auch der linke.

zu (iii) Dies erhält man durch $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx = \|f\|_{\mathcal{L}} \geq 0$.

zu (iv) Nach (1.39) ist fg jedenfalls Lebesgue-integrierbar. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x) dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)| dx = \|fg\|_{\mathcal{L}} \\ &\leq \|g\|_{\infty} \cdot \|f\|_{\mathcal{L}} = \|g\|_{\infty} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx. \end{aligned} \quad \square$$

(1.41) Definition Eine Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *Lebesgue-messbar*, wenn die charakteristische Funktion χ_B Lebesgue-integrierbar ist. In diesem Fall nennt man

$$v_{\mathcal{L}}(B) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_B(x) dx \quad \text{das } \textit{Lebesgue-Ma\ss} \text{ von } B.$$

Die Menge B wird *Lebesguesche Nullmenge* genannt, wenn $\|\chi_B\|_{\mathcal{L}} = 0$ gilt.

Unmittelbar aus der Definition folgt, dass jede Teilmenge M einer Lebesgueschen Nullmenge N wiederum eine Lebesguesche Nullmenge ist. Aus $M \subseteq N$ folgt $\chi_M \leq \chi_N$ und damit $0 \leq \|\chi_M\|_{\mathcal{L}} \leq \|\chi_N\|_{\mathcal{L}} = 0$. Man sagt üblicherweise, dass eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Eigenschaft *fast überall* besitzt, wenn die Teilmenge $N \subseteq \mathbb{R}^n$, auf der diese Eigenschaft nicht gilt, eine Lebesguesche Nullmenge ist.

(1.42) Proposition

- (i) Eine Teilmenge $N \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Lebesguesche Nullmenge, wenn sie Lebesgue-messbar ist und $v_{\mathcal{L}}(N) = 0$ gilt.
- (ii) Jede Nullmenge (wie in der Analysis mehrerer Variablen definiert) ist eine Lebesguesche Nullmenge.

Beweis: zu (i) „ \Rightarrow “ Ist $\|\chi_N\|_{\mathcal{L}} = 0$, dann hat die Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ gegeben durch $f_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ die Eigenschaft $\lim_k \|f_k - \chi_N\|_{\mathcal{L}} = 0$. Dies zeigt, dass χ_N Lebesgue-integrierbar ist. Außerdem gilt

$$v_{\mathcal{L}}(N) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_N(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) dx = 0$$

nach Definition des Lebesgue-Integrals.

„ \Leftarrow “ Aus $\chi_N \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \chi_N(x) dx = 0$ folgt $\|\chi_N\|_{\mathcal{L}} = \int_{\mathbb{R}^n} |\chi_N(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_N(x) dx = 0$ nach (1.40).

zu (ii) Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Nach Definition der Nullmengen gibt es eine Familie $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Quadern mit $N \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) < \varepsilon$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ können wir ein $\varepsilon_k \in \mathbb{R}^+$ wählen, so dass $I(\chi_{Q_k, \varepsilon_k}) < v(Q_k) + \varepsilon 2^{-k}$ gilt. Es ist dann $\sum_{k=1}^{\infty} \chi_{Q_k, \varepsilon_k}$ eine Majorante von χ_N , und es gilt

$$\sum_{k=1}^n I(\chi_{Q_k, \varepsilon_k}) \leq \sum_{k=1}^n v(Q_k) + \sum_{k=1}^n \varepsilon 2^{-k} < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Weil ε beliebig vorgegeben war, folgt daraus $\|\chi_N\|_{\mathcal{L}} = 0$. □

Umgekehrt kann man zeigen, dass jede Lebesguesche Nullmenge eine Nullmenge ist, die beiden Begriffe sind also äquivalent. Wir werden dieses Resultat aber nicht verwenden. Genau wie für die Riemann-integrierbaren Funktionen gilt auch hier

(1.43) Proposition Seien $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge und $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $\tilde{f}(x) = f(x)$ für alle $x \notin N$. Dann ist auch \tilde{f} Lebesgue-integrierbar, und die Lebesgue-Integrale von f und \tilde{f} stimmen überein.

Beweis: Nach Voraussetzung gilt $|\tilde{f} - f| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \chi_N$, und wegen $\|\chi_N\|_{\mathcal{L}} = 0$ folgt daraus $\|\tilde{f} - f\|_{\mathcal{L}} = 0$ nach (1.30). Dies zeigt, dass $\tilde{f} - f$ eine Lebesgue-integrierbare Funktion mit Lebesgue-Integral Null ist. Daraus wiederum folgt auch die Lebesgue-Integrierbarkeit von $\tilde{f} = (\tilde{f} - f) + f$ sowie die Gleichheit der Integrale. \square

Für die spätere Anwendung bemerken wir noch, dass (1.30) gültig bleibt, wenn die Ungleichung $|f(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ nur fast überall erfüllt ist. Sei nämlich $N \subseteq \mathbb{R}^n$ die Nullmenge, auf der die Ungleichung nicht gilt und f_N die Funktion gegeben durch $f_N(x) = 0$ für alle $x \in N$ und $f_N(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus N$. Nach (1.30) liegt f_N in $\tilde{\mathcal{L}}(\mathbb{R}^n)$, und es gilt

$$\|f_N\|_{\mathcal{L}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_{\mathcal{L}}.$$

Die Funktion $|f - f_N|$ stimmt fast überall mit der Nullfunktion überein und ist somit nach (1.43) Lebesgue-integrierbar, mit $\|f - f_N\|_{\mathcal{L}} = \int_{\mathbb{R}^n} |f - f_N|(x) dx = 0$. Daraus folgt $\|f\|_{\mathcal{L}} \leq \|f_N\|_{\mathcal{L}} + \|f - f_N\|_{\mathcal{L}} = \|f_N\|_{\mathcal{L}}$.

(1.44) Satz (Satz von Beppo Levi)

Sei (g_k) eine Folge in $\tilde{\mathcal{L}}(\mathbb{R}^n)$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_{\mathcal{L}} < +\infty$. Dann gilt

- (i) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x)|$ konvergiert fast überall.
- (ii) Sei $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft, dass fast überall die Gleichung $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ erfüllt ist. Dann liegt g in $\tilde{\mathcal{L}}(\mathbb{R}^n)$, und es gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| g - \sum_{k=1}^m g_k \right\|_{\mathcal{L}} = 0.$$

- (iii) Gilt $g_k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, dann folgt $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ und

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k(x) dx.$$

Beweis: zu (i) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ die Menge der Punkte, in denen die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x)|$ divergiert. Dann gilt $\chi_D \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} |g_k|$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Nach (1.30) gilt $\|\chi_D\|_{\mathcal{L}} \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \|g_k\|_{\mathcal{L}}$ für alle $m \in \mathbb{N}$, und wegen $\lim_m \sum_{k=m+1}^{\infty} \|g_k\|_{\mathcal{L}} = 0$ folgt daraus $\|\chi_D\|_{\mathcal{L}} = 0$. Also ist D eine Lebesguesche Nullmenge.

zu (ii) Nach Voraussetzung gilt $|g(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x)|$ fast überall. Auf Grund der Vorbemerkung können wir (1.30) auch in dieser Situation anwenden und erhalten $g \in \tilde{\mathcal{L}}(\mathbb{R}^n)$. Wegen $\lim_m \sum_{k=m+1}^{\infty} \|g_k\|_{\mathcal{L}} = 0$ und $\|g - \sum_{k=1}^m g_k\|_{\mathcal{L}} \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \|g_k\|_{\mathcal{L}}$ gilt auch die zweite Aussage.

zu (iii) Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist $\sum_{k=1}^m g_k$ in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ erhalten, es gibt deshalb ein $f_m \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ mit der Eigenschaft $\|\sum_{k=1}^m g_k - f_m\|_{\mathcal{L}} < \frac{1}{m}$. Ist nun $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben, dann können wir $m \in \mathbb{N}$ so wählen, dass sowohl $\frac{1}{m} < \frac{1}{2}\varepsilon$

als auch die Ungleichung $\sum_{k=m+1}^{\infty} \|g_k\|_{\mathcal{L}} < \frac{1}{2}\varepsilon$ gilt. Es folgt dann

$$\|g - f_m\|_{\mathcal{L}} \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \|g_k\|_{\mathcal{L}} + \left\| \sum_{k=1}^m g_k - f_m \right\|_{\mathcal{L}} < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Daraus folgt sowohl die Lebesgue-Integrierbarkeit von g als auch die Gleichung

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_m(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} g_k(x) dx. \quad \square$$

(1.45) Folgerung (Satz über die monotone Konvergenz)

Sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine fast überall monoton wachsende Folge in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ mit der Eigenschaft, dass die Folge der Integrale $\int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) dx$ beschränkt ist. Dann gibt es ein $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, so dass (f_k) fast überall gegen die Funktion f konvergiert mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx.$$

Beweis: Sei die Folge $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ definiert durch $g_1 = f_1$ und $g_k = f_k - f_{k-1}$ für $k \geq 2$ und $c \in \mathbb{R}^+$ eine obere Schranke für die Integrale über f_k . Dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \|g_k\|_{\mathcal{L}} &= \|f_1\|_{\mathcal{L}} + \sum_{k=2}^m \int_{\mathbb{R}^n} (f_k - f_{k-1})(x) dx = \\ &\|f_1\|_{\mathcal{L}} + \int_{\mathbb{R}^n} f_m(x) dx - \int_{\mathbb{R}^n} f_1(x) dx \leq 2\|f_1\|_{\mathcal{L}} + c. \end{aligned}$$

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_{\mathcal{L}}$ ist also konvergent, außerdem gilt $f_m = \sum_{k=1}^m g_k$ für alle $m \in \mathbb{N}$ nach Definition der Folge $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Wir können somit den Satz von Beppo Levi anwenden und erhalten die beiden gewünschten Aussagen. \square

Das Beispiel der Folge $(\chi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vom Anfang dieses Abschnitts zeigt, dass ein entsprechender Satz für Riemann-integrierbare Funktionen falsch ist. Der Satz über die monotone Konvergenz gilt auch für monoton fallende Folgen Lebesgue-integrierbarer Funktionen: Man erhält ihn dadurch, dass man den ursprünglichen Satz auf die Folge $(-f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ anwendet. Hierbei muss man dann natürlich fordern, dass die Folge der Integrale nach unten beschränkt ist.

(1.46) Satz (Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz)

Sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, die fast überall gegen eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Sei ferner g eine nicht-negative, Lebesgue-integrierbare Funktion mit $|f_k| \leq g$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann ist auch f Lebesgue-integrierbar, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) dx.$$

Beweis: Nach Abänderung der Funktionen f_k, f und g auf einer Nullmenge können wir davon ausgehen, dass $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ überall gegen f konvergiert. Nun definieren wir für alle $k, \nu \in \mathbb{N}$ die Funktion $g_{k,\nu} = \max\{f_k, f_{k+1}, \dots, f_{k+\nu}\}$. Mit den f_k sind auch die $g_{k,\nu}$ integrierbar. Definieren wir $g_k(x) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} g_{k,\nu}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, dann gilt $g_k = \sup\{f_i \mid i \geq k\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Die Funktionenfolge $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert also monoton wachsend gegen g , und die Folge der Integrale ist durch $\int_{\mathbb{R}^n} g_k(x) dx$ beschränkt. Aus dem Satz über die monotone Konvergenz folgt nun, dass alle g_k Lebesgue-integrierbar sind, und dass jeweils

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_k(x) dx = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_{k,\nu}(x) dx \quad \text{gilt.}$$

Die Folge $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert monoton fallend gegen f und ist betragsmäßig ebenfalls durch das Integral über g beschränkt. Wir können den Satz über die monotone Konvergenz also erneut anwenden und erhalten sowohl $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ als auch die Gleichung

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k(x) dx.$$

Sei schließlich für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Funktion h_k definiert durch $h_k(x) = \inf\{f_i(x) \mid i \geq k\}$. Genau wie zuvor zeigt man, dass die h_k alle Lebesgue-integrierbar sind und $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \lim_k \int_{\mathbb{R}^n} h_k(x) dx$ gilt. Wenden wir nun das Lebesgue-Integral auf die Ungleichungen $h_k \leq f_k \leq g_k$ an und betrachten den Grenzübergang $k \rightarrow \infty$, dann erhalten wir insgesamt die gewünschte Gleichung $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \lim_k \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) dx$. \square

Wir leiten aus dem Satz über die majorisierte Konvergenz noch zwei wichtige Folgerungen ab: Die Stetigkeit parameterabhängiger Integrale und die Vertauschbarkeit von Lebesguescher Integration mit partieller Differentiation. Beide Ergebnisse sind für Riemann-Integrale nur sehr mühsam unter stärkeren Voraussetzungen erzielbar.

(1.47) Satz Sei X ein metrischer Raum, $x_0 \in X$ und $f : \mathbb{R}^m \times X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften.

- (i) Die Funktion $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(t, x)$ ist Lebesgue-integrierbar für alle $x \in X$.
- (ii) Es gibt eine nicht-negative, Lebesgue-integrierbare Funktion g auf \mathbb{R}^m , so dass für alle $x \in X$ jeweils $|f(t, x)| \leq g(t)$ erfüllt ist, für fast alle $t \in \mathbb{R}^m$.
- (iii) Die Abbildung $X \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(t, x)$ ist für fast alle $t \in \mathbb{R}^m$ stetig in x_0 .

Dann ist die Funktion $F(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(t, x) dt$ stetig in x_0 .

Beweis: Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $\lim_k x_k = x_0$. Wir definieren eine Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ reellwertiger Funktionen durch $f_k(t) = f(t, x_k)$ für alle $t \in \mathbb{R}^m$ und $k \in \mathbb{N}$. Außerdem sei $f_0(t) = f(t, x_0)$. Auf Grund der Voraussetzung (iii) konvergiert $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ fast überall punktweise gegen f . Wegen (i) ist die Folge in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ enthalten, und wegen (ii) gilt $|f_k| \leq g$ fast überall, für jedes $k \in \mathbb{N}$. Nach dem Satz über die majorisierte Konvergenz gilt somit

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} F(x_k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^m} f(t, x_k) dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^m} f_k(t) dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^m} f_0(t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} f(t, x_0) dt = F(x_0). \end{aligned}$$

Damit ist die Stetigkeit von F in x_0 bewiesen. \square

Für den folgenden Satz legen wir die folgende Notation fest: Ist V ein endlich-dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum, $U \subseteq V$ eine offene Teilmenge und $f : \mathbb{R}^m \times U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, dann bezeichnen wir für jeden Punkt $(t, x) = (t_1, \dots, t_m, x_1, \dots, x_n)$ und jedes $v \in V$ durch $\partial_v f(t, x)$ die Richtungsableitung von f nach v , sofern diese existiert.

(1.48) Satz Sei V ein endlich-dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum, $U \subseteq V$ offen, $v \in V$ und $f : \mathbb{R}^m \times U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir setzen voraus, dass f die folgenden Eigenschaften besitzt.

- (i) Für alle $x \in U$ ist die Funktion $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(t, x)$ Lebesgue-integrierbar.
- (ii) Es gibt eine Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}^m$ und eine nicht-negative, Lebesgue-integrierbare Funktion g auf \mathbb{R}^m , so dass die Richtungsableitung $\partial_v f(t, x)$ für alle $t \in \mathbb{R}^m \setminus N$ und alle $x \in U$ existiert und die Abschätzung $|\partial_v f(t, x)| \leq g(t)$ erfüllt ist.

Dann besitzt $F(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(t, x) dt$ auf U eine Richtungsableitung nach v , und es gilt

$$\partial_v F(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \partial_v f(t, x) dt \quad \text{für alle } x \in U.$$

Beweis: Sei $x_0 \in U$ und $r \in \mathbb{R}^+$ so gewählt, dass die offene Kugel vom Radius r um x_0 bezüglich der Maximumsnorm ganz in U enthalten ist. Sei $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $0 < |h_k| < r$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\lim_k h_k = 0$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ definieren wir eine reellwertige Funktion f_k auf \mathbb{R}^m durch

$$f_k(t) = \frac{1}{h_k} (f(t, x_0 + h_k v) - f(t, x_0)).$$

Wegen (i) ist jedes f_k in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ enthalten. Nach Definition der Richtungsableitung $\partial_v f$ und auf Grund der Voraussetzung (ii) konvergiert $f_k(t)$ außerdem für alle $t \in \mathbb{R}^m \setminus N$ gegen $\partial_v f(t, x_0)$.

Nach dem Mittelwertsatz für Richtungsableitungen existiert für alle $t \in \mathbb{R}^m \setminus N$ jeweils ein $\theta_{t,k} \in \mathbb{R}$ mit $0 < \theta_{t,k} < 1$ und $f_k(t) = \partial_v f(t, x_0 + \theta_{t,k} h_k v)$. Daraus folgt $|f_k(t)| \leq g(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}^m \setminus N$. Insgesamt ist damit der Satz über die majorisierte Konvergenz anwendbar. Demnach ist die Funktion $t \mapsto \partial_v f(t, x_0)$ in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ enthalten, außerdem gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} \partial_v f(t, x_0) dt &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^m} f_k(t) dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{h_k} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(t, x_0 + h_k v) dt - \int_{\mathbb{R}^m} f(t, x_0) dt \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{h_k} (F(x_0 + h_k v) - F(x_0)) = \partial_v F(x_0). \end{aligned} \quad \square$$

§ 2. Funktionentheorie

2.1 Reelle und komplexe Differenzierbarkeit

Inhaltsübersicht

- ☆ Wiederholung: Grundlagen über den Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen
- ☆ Folgenkonvergenz und Funktionsgrenzwerte in \mathbb{C}
- ☆ Definition der holomorphen (komplex differenzierbaren) Funktionen
- ☆ reelle Differenzierbarkeit
- ☆ Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen

Zu Beginn wiederholen wir die bekannten Fakten über komplexe Zahlen aus der Analysis einer Variablen.

- (i) Der Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen bilden einen Erweiterungskörper von \mathbb{R} .
- (ii) Es gibt ein ausgezeichnetes Element $i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $i^2 = -1$, die sogenannte **imaginäre Einheit**.
- (iii) Jedes Element $z \in \mathbb{C}$ kann auf eindeutige Weise in der Form $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dargestellt werden. Man nennt a den **Real-** $\operatorname{Re}(z)$ und b den **Imaginärteil** $\operatorname{Im}(z)$ von z .
- (iv) Auf \mathbb{C} ist eine Abbildung $\iota : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $\iota(a + ib) = a - ib$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$, die sogenannte **komplexe Konjugation**. Es gilt $\iota(z + w) = \iota(z) + \iota(w)$, $\iota(zw) = \iota(z)\iota(w)$ und $\iota(\iota(z)) = z$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$ sowie $\iota(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Für jedes $z \in \mathbb{C}$ nennt man $\iota(z)$ die zu z **konjugierte** komplexe Zahl. An Stelle von $\iota(z)$ ist auch die Schreibweise \bar{z} für die konjugierte komplexe Zahl gebräuchlich.
- (v) Für jedes $z \in \mathbb{C}$ nennt man $|z| = \sqrt{z\bar{z}} \in \mathbb{R}_+$ den **komplexen Absolutbetrag** (kurz Betrag) von z . Ist $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, dann gilt $|z|^2 = a^2 + b^2$. Weiter gilt $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$, $|zw| = |z||w|$ und $|z + w| \leq |z| + |w|$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$.

(2.1) Satz Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $\varphi \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \varphi < 2\pi$, das sogenannte **Argument** $\arg(z)$ von z , mit der Eigenschaft

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Das Paar $(|z|, \varphi)$ bezeichnet man als die **Polarkoordinaten** von z .

Beweis: Sei $\rho : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$, $(r, \varphi) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ die Polarkoordinaten-Abbildung aus der Analysis mehrerer Variablen. Wie dort gezeigt wurde, ist ρ eine Bijektion. Ist $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, dann gibt

es also Paar (r, φ) mit $a = r \cos \varphi$ und $b = r \sin \varphi$, und es gilt

$$r^2 = (r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2,$$

also $r = |z|$. Dies beweist die Existenz von φ . Ist nun $\psi \in [0, 2\pi[$ ein weiteres Element mit $z = |z|(\cos \psi + i \sin \psi)$, dann liefert der Vergleich von Real- und Imaginärteil $|z| \cos \varphi = \operatorname{Re}(z) = |z| \cos \psi$ und $|z| \sin \varphi = \operatorname{Im}(z) = |z| \sin \psi$, also $\rho(|z|, \varphi) = \rho(|z|, \psi)$. Auf Grund der Injektivität von ρ folgt $\varphi = \psi$. Damit ist die Eindeutigkeit bewiesen. \square

Bereits in der Analysis einer Variablen wurde definiert, dass eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{C} gegen eine Zahl $z \in \mathbb{C}$ **konvergiert**, also

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$$

gilt, wenn für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|z_n - z| < \varepsilon$ für alle z_n mit $n \geq N$ erfüllt ist. Von einer **Cauchyfolge** in \mathbb{C} spricht man, wenn es für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|z_m - z_n| < \varepsilon$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geq N$ gilt.

(2.2) Proposition Sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{C} und $z \in \mathbb{C}$ ein weiteres Element. Es sei $z_n = a_n + ib_n$ und $z = a + ib$ die Zerlegung der Zahlen in Real- und Imaginärteil, mit $a_n, b_n, a, b \in \mathbb{R}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

- (i) Die Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert in \mathbb{C} gegen z .
- (ii) Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$.

Beweis: " \Rightarrow " Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|z_n - z| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Es gilt $z_n - z = (a_n - a) + i(b_n - b)$, also $|z_n - z|^2 = (a_n - a)^2 + (b_n - b)^2$ und somit $|a_n - a| \leq |z_n - z|$ und $|b_n - b| \leq |z_n - z|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt $|a_n - a| < \varepsilon$ und $|b_n - b| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

" \Leftarrow " Auch hier sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig vorgegeben. Auf Grund der Voraussetzung gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{1}{2}\varepsilon$ und $|b_n - b| < \frac{1}{2}\varepsilon$ für alle $n \geq N$. Wegen $|z_n - z| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$ folgt $|z_n - z| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Also konvergiert $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{C} gegen die Zahl z . \square

Ebenso leicht kann man überprüfen, dass $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine genau dann eine Cauchyfolge in \mathbb{C} ist, wenn die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Real- und die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Imaginärteile beides Cauchyfolgen in \mathbb{R} sind. Aus der Analysis I ist bekannt, dass die Cauchyfolgen in \mathbb{R} genau die konvergenten Folgen in \mathbb{R} sind. Daraus folgt unmittelbar, dass auch in \mathbb{C} die Cauchyfolgen-Eigenschaft gleichbedeutend mit Konvergenz ist.

Mit Hilfe des Konvergenzbegriffs können wir nun Stetigkeit und Grenzwerte für Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ definieren, wobei U eine beliebige Teilmenge von \mathbb{C} bezeichnet. Wir sagen, die Funktion f ist **stetig** im Punkt $z \in U$, wenn für jede Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in U , die gegen z konvergiert, jeweils

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(z) \quad \text{erfüllt ist.}$$

Sei nun $w \in \mathbb{C} \setminus U$ und $b \in \mathbb{C}$. Wir bezeichnen b als **Grenzwert** der Funktion f für $z \rightarrow w$ und schreiben $\lim_{z \rightarrow w} f(z) = b$, wenn eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = w$ existiert und für jede solche Folge jeweils $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = b$ gilt.

Für jedes $w \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}^+$ bezeichnen wir die Menge $B_r(w) = \{z \in \mathbb{C} \mid |w - z| < r\}$ als **offenen Ball** vom Radius r um den Punkt w . Wird in der Ungleichung $|w - z| < r$ das " $<$ " durch " \leq " ersetzt, dann sprechen wir von einem **abgeschlossenen** Ball, der mit $\bar{B}_r(w)$ bezeichnet wird. Wir bezeichnen eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ als **offen**, wenn für jedes $z \in U$ ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(z) \subseteq U$ existiert.

Als nächstes werden wir nun den Begriff der Differenzierbarkeit von den reellen auf die komplexen Zahlen übertragen. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $w \in U$. Dann können wir für jede Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ den **Differenzialquotienten**

$$g(z) = \frac{f(z) - f(w)}{z - w}$$

als komplexwertige Funktion auf $U \setminus \{w\}$ betrachten.

(2.3) Definition Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $w \in U$. Wir bezeichnen eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ als **komplex differenzierbar** im Punkt w , wenn der Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow w} \frac{f(z) - f(w)}{z - w}$$

existiert. Wir bezeichnen diese gegebenenfalls als die **komplexe Ableitung** $f'(w)$ von f im Punkt w . Ist f in jedem Punkt $z \in U$ komplex differenzierbar, dann bezeichnen wir f als **holomorphe Funktion** auf der Menge U .

Genau wie in der Analysis einer Variablen beweist man die folgenden Rechenregeln für komplexe Ableitungen. Für die Abbildung $\text{id} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z$ gilt $\text{id}'(z) = 1$, für alle $z \in \mathbb{C}$. Ist $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ konstant, gibt es also ein $w \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = w$ für alle $z \in \mathbb{C}$, dann folgt $f'(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Außerdem gilt

(2.4) Proposition Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, und seien $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ Abbildungen. Sind f und g in einem Punkt $z \in U$ komplex differenzierbar, dann auch die Funktionen $f + g$ und fg . Es gilt

$$(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z) \quad \text{und} \quad (fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z).$$

Gilt darüber hinaus $g(z) \neq 0$ für alle $z \in U$, dann ist auch $\frac{f}{g}$ im Punkt z komplex differenzierbar, und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}.$$

Auch für die komplexe Differenzierbarkeit existiert eine Kettenregel.

(2.5) Proposition Seien $U, V \subseteq \mathbb{C}$ offene Teilmengen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ und $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ Abbildungen, wobei wir $f(U) \subseteq V$ voraussetzen. Ist f in einem Punkt $z \in U$ und g im Punkt $w = f(z)$ komplex differenzierbar, dann ist auch $g \circ f$ in z komplex differenzierbar, und es gilt

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z).$$

Die Beweise sind wortwörtlich dieselben wie in der reellen Analysis, weshalb wir auf eine erneute Wiedergabe verzichten.

Wir untersuchen nun, wie die komplexe Differenzierbarkeit mit dem Ableitungsbegriff aus der Analysis mehrerer Variablen zusammenhängt. Dazu betrachten wir \mathbb{C} nun als 2-dimensionalen \mathbb{R} -Vektorraum und die komplexen Zahlen 1 und i als Richtungsvektoren. Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion und $w = u + iv \in U$ ein vorgegebener Punkt, dann bezeichnen wir mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(w) = \partial_1 f(w) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(w) = \partial_i f(w)$$

die Richtungsableitungen von f im Punkt w bezüglich der Richtungen 1 und i . Nach Definition gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(w) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(w+t) - f(w)}{t} = \lim_{x \rightarrow u} \frac{f(x+iv) - f(u+iv)}{x-u}$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y}(w) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(w+it) - f(w)}{t} = \lim_{y \rightarrow v} \frac{f(u+iy) - f(u+iv)}{y-v}$$

wobei die Grenzwerte jetzt in \mathbb{R} (!) gebildet werden. Schreiben wir f in der Form $f = g + ih$ mit reellwertigen Funktionen $g, h : U \rightarrow \mathbb{R}$, dann gilt offenbar

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x} + i \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y} + i \frac{\partial h}{\partial y}.$$

Diese Richtungsableitungen lassen sich auch als gewöhnliche partielle Ableitungen interpretieren. Dazu betrachten wir die Abbildung $\iota : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch $x + iy \mapsto (x, y)$. Es handelt sich bei ι um einen Isomorphismus von \mathbb{R} -Vektorräumen. Setzen wir nun

$$f_{\mathbb{R}} = \iota \circ f \circ \iota^{-1} \quad ,$$

dann erhalten wir eine Abbildung von der offenen Teilmenge $\tilde{U} = \iota(U) \subseteq \mathbb{R}^2$ nach \mathbb{R}^2 . Für alle $(x, y) \in \tilde{U}$ gilt

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{R}}(x, y) &= (\iota \circ f \circ \iota^{-1})(x, y) = (\iota \circ f)(x + iy) = \iota(g(x + iy) + ih(x + iy)) \\ &= (g(x + iy), h(x + iy)). \end{aligned}$$

Die Komponenten von $f_{\mathbb{R}}$ sind also gegeben durch

$$(f_{\mathbb{R}})_1(x, y) = g(x + iy) \quad \text{und} \quad (f_{\mathbb{R}})_2(x, y) = h(x + iy).$$

Setzen wir $w = u + iv$, dann sind die partiellen Ableitungen der Komponenten von $f_{\mathbb{R}}$ im Punkt (u, v) gegeben durch

$$\partial_1(f_{\mathbb{R}})_1(u, v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f_{\mathbb{R}})_1(u+t, v) - (f_{\mathbb{R}})_1(u, v)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(w+t) - g(w)}{t} = \frac{\partial g}{\partial x}(w)$$

und

$$\partial_2(f_{\mathbb{R}})_1(u, v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f_{\mathbb{R}})_1(u, v+t) - (f_{\mathbb{R}})_1(u, v)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(w+it) - g(w)}{t} = \frac{\partial g}{\partial y}(w).$$

Genauso beweist man die Gleichungen

$$\partial_1(f_{\mathbb{R}})_2(u, v) = \frac{\partial h}{\partial x}(w) \quad \text{und} \quad \partial_2(f_{\mathbb{R}})_2(u, v) = \frac{\partial h}{\partial y}(w).$$

Ist $f_{\mathbb{R}}$ an der Stelle (u, v) sogar total differenzierbar, dann gilt mit $w = u + iv$ also

$$f'_{\mathbb{R}}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(w) & \frac{\partial g}{\partial y}(w) \\ \frac{\partial h}{\partial x}(w) & \frac{\partial h}{\partial y}(w) \end{pmatrix}.$$

(2.6) Definition Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ wird *reell differenzierbar* im Punkt $w \in U$ genannt, wenn sie als Funktion auf dem \mathbb{R} -Vektorraum \mathbb{C} in w total differenzierbar ist.

Aus der mehrdimensionalen Kettenregel folgt unmittelbar, dass eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ genau dann im Punkt $w \in U$ reell differenzierbar ist, wenn die Funktion $f_{\mathbb{R}} = \iota \circ f \circ \iota^{-1}$ im Punkt $\iota(w)$ total differenzierbar ist.

Wir illustrieren die bisher durchgeführten Herleitungen an zwei konkreten Beispielen. Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $z \mapsto z^2$. Wegen

$$(x + iy)^2 = x^2 + 2x(iy) + i^2y^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}$$

gilt $f = g + ih$ mit den Funktionen $g(x + iy) = x^2 - y^2$ und $h(x + iy) = 2xy$. Die Ableitung von $f_{\mathbb{R}}$ im Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist somit gegeben durch

$$f'_{\mathbb{R}}(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

Sei nun $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = \bar{z}$, die komplexe Konjugation. In diesem Fall gilt $f = g + ih$ mit $g(x + iy) = x$ und $h(x + iy) = -y$. Für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ erhalten wir diesmal

$$f'_{\mathbb{R}}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Beide angegebenen Funktionen f sind reell differenzierbar, denn $f'_{\mathbb{R}}$ ist in beiden Fällen offenbar stetig differenzierbar, woraus die totale Differenzierbarkeit von $f_{\mathbb{R}}$ und f in jedem Punkt des Definitionsbereichs folgt.

(2.7) Proposition Ist $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ im Punkt $w \in U$ komplex differenzierbar, dann ist sie im selben Punkt auch reell differenzierbar.

Beweis: Nach Definition der komplexen Differenzierbarkeit gilt $\lim_{z \rightarrow 0} \varphi(z) = 0$ für die Funktion

$$\varphi(z) = \frac{f(w + z) - f(w)}{z} - f'(w).$$

Es gilt also $f(z + w) = f(w) + f'(w)z + \varphi(z)z$, wobei der „Fehlerterm“ $\psi(z) = \varphi(z)z$ auch nach Division durch $|z|$ noch gegen Null läuft. Außerdem ist die Abbildung $z \mapsto f'(w)z$ ein Endomorphismus im \mathbb{R} -Vektorraum \mathbb{C} . Insgesamt haben wir damit gezeigt, dass f im Punkt w total differenzierbar ist. \square

Wir formulieren nun ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für komplexe Differenzierbarkeit.

(2.8) Satz Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion und $w \in U$ ein Punkt, in dem f reell differenzierbar ist. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (i) Die Funktion f ist in w komplex differenzierbar.
- (ii) Es gelten die **Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen**

$$\frac{\partial h}{\partial y}(w) = \frac{\partial g}{\partial x}(w) \quad \text{und} \quad \frac{\partial h}{\partial x}(w) = -\frac{\partial g}{\partial y}(w).$$

Sind diese Bedingungen erfüllt, dann ist die komplexe Ableitung von f im Punkt w gegeben durch

$$f'(w) = \frac{\partial g}{\partial x}(w) + i \frac{\partial h}{\partial x}(w).$$

Beweis: „(i) \Rightarrow (ii)“ Wie wir im Beweis von (2.7) gesehen haben, ist die totale Ableitung von f an der Stelle w die \mathbb{R} -lineare Abbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto f'(w)z$. Sei $f'(w) = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Wie aus der Analysis mehrerer Variablen bekannt, erhält man die Richtungsableitungen einer Funktion, indem man die Richtungsvektoren in die totale Ableitung einsetzt. Deshalb gilt

$$\frac{\partial g}{\partial x}(w) + i \frac{\partial h}{\partial x}(w) = \frac{\partial f}{\partial x}(w) = f'(w) \cdot 1 = (a + ib) \cdot 1 = a + ib.$$

Es folgt

$$\frac{\partial g}{\partial x}(w) = a \quad , \quad \frac{\partial h}{\partial x}(w) = b.$$

Durch Einsetzen des Richtungsvektors i erhalten wir

$$\frac{\partial g}{\partial y}(w) + i \frac{\partial h}{\partial y}(w) = \frac{\partial f}{\partial y}(w) = f'(w)(i) = (a + ib) \cdot i = (-b) + ia$$

und somit

$$\frac{\partial g}{\partial y}(w) = -b \quad , \quad \frac{\partial h}{\partial y}(w) = a.$$

Insgesamt erhalten wir somit

$$\frac{\partial h}{\partial y}(w) = a = \frac{\partial g}{\partial x}(w) \quad , \quad \frac{\partial h}{\partial x}(w) = b = -\frac{\partial g}{\partial y}(w) \quad ,$$

die Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen sind also im Punkt w erfüllt.

„(ii) \Rightarrow (i)“ Da f im Punkt w reell differenzierbar ist, gibt eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ und eine Abbildung $\psi : U \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f(w + z) = f(w) + \phi(z) + \psi(z) \tag{2.6}$$

für alle z in einer Umgebung vom Nullpunkt und $\lim_{z \rightarrow 0} \psi(z)/|z| = 0$. Dann gilt auch $\lim_{z \rightarrow 0} \psi(z)/z = 0$.

Sei nun

$$a = \frac{\partial g}{\partial x}(w) = \frac{\partial h}{\partial y}(w) \quad \text{und} \quad b = \frac{\partial h}{\partial x}(w) = -\frac{\partial g}{\partial y}(w).$$

Weil die Richtungsableitungen von f durch Einsetzen der Richtungsvektoren 1 und i zu Stande kommen, gilt

$$\phi(1) = \frac{\partial f}{\partial x}(w) = \frac{\partial g}{\partial x}(w) + i \frac{\partial h}{\partial x}(w) = a + ib$$

und

$$\phi(i) = \frac{\partial f}{\partial y}(w) = \frac{\partial g}{\partial y}(w) + i \frac{\partial h}{\partial y}(w) = (-b) + ia = i(a + ib).$$

Weil ϕ eine lineare Abbildung auf dem \mathbb{R} -Vektorraum \mathbb{C} ist, erhalten wir für jedes $z = x + iy \in \mathbb{C}$ die Gleichung

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \phi(x + iy) = x\phi(1) + y\phi(i) \\ &= x(a + ib) + yi(a + ib) = (x + iy)(a + ib) = z(a + ib). \end{aligned}$$

Durch Division von (2.6) durch z und Einsetzen von $\phi(z) = (a + ib)z$ erhalten wir für alle z in einer Umgebung von Null die Gleichung

$$\frac{\psi(z)}{z} = \frac{f(w + z) - f(w)}{z} - (a + ib).$$

Aus $\lim_{z \rightarrow 0} \psi(z)/z = 0$ folgt also

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(w + z) - f(w)}{z} = a + ib.$$

Also ist f im Punkt w komplex differenzierbar, und die Ableitung $f'(w)$ hat den angegebenen Wert. \square

Häufig werden zur Untersuchung der komplexen Differenzierbarkeit die **Wirtinger-Ableitungen**

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Durch Einsetzen der Komponenten $f = g + ih$ erhält man

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{1}{2} i \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{2} i \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} i \left(\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right).$$

Nach (2.8) ist f in einem Punkt w also genau dann komplex differenzierbar, wenn

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(w) = 0 \quad \text{gilt.}$$

Die komplexe Ableitung ist in diesem Fall gegeben durch

$$f'(w) = \frac{\partial g}{\partial x}(w) + i \frac{\partial h}{\partial x}(w) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial x}(w) + \frac{\partial h}{\partial y}(w) \right) + \frac{1}{2} i \left(\frac{\partial h}{\partial x}(w) - \frac{\partial g}{\partial y}(w) \right) = \frac{\partial f}{\partial z}(w).$$

Für die Funktion $f(z) = z^2$ gilt beispielsweise in jedem Punkt $z = x + iy$ jeweils

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(z) = 2z.$$

Für die Funktion $f(z) = \bar{z}$ gilt

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(z) = 0.$$

Zu beachten ist, dass die Wirtinger-Ableitungen **keine** Richtungsableitungen im Sinne der Analysis mehrerer Variablen sind. Insbesondere ist $\frac{\partial f}{\partial z}$ nicht die Ableitung von f in Richtung des Vektors z , wie man auf Grund der Notation vermuten könnte. Es handelt sich um ein rein formales Hilfsmittel.

2.2 Komplexe Potenzreihen

Inhaltsübersicht

- ☆ Wiederholung: Potenzreihen und ihr Konvergenzradius
- ☆ Funktionen, die sich durch komplexe Potenzreihen definieren lassen, sind komplex differenzierbar. Die komplexe Ableitung ist dann ebenfalls durch eine Potenzreihe darstellbar.
- ☆ Anwendungsbeispiel: Exponentialfunktion, Sinus und Kosinus im Komplexen

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Wie in der Analysis einer Variablen verwenden wir die Notation $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ für die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Summen $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ und nennen sie die **Reihe** über $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Die Zahlen s_n werden die **Partialsummen** der Reihe genannt. Konvergiert die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen eine komplexe Zahl a , dann wird die Bezeichnung $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ auch für den Grenzwert a verwendet. Man nennt die Reihe **absolut konvergent**, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ in den reellen Zahlen konvergiert. Wie in der Analysis einer Variablen beweist man auch hier, dass jede komplexe absolut konvergente Reihe konvergent im herkömmlichen Sinn ist (siehe hierzu auch die Übungen).

Die **Potenzreihen** wurden bereits in der Analysis mehrerer Variablen definiert. Ist $a \in \mathbb{C}$ und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen, dann bezeichnet der Ausdruck $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n$ die Potenzreihe über $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ im **Entwicklungspunkt** a . Sei $\alpha = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Dann nennt man

$$\rho = \begin{cases} 0 & \text{falls } \alpha = +\infty \\ \alpha^{-1} & \text{falls } \alpha \in \mathbb{R}^+ \\ +\infty & \text{falls } \alpha = 0 \end{cases}$$

den **Konvergenzradius** der Potenzreihe. Der folgende Satz aus der Analysis mehrerer Variablen gilt auch im Komplexen; beim Beweis ergeben sich keine wesentlichen Änderungen.

(2.9) Satz Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen, $a \in \mathbb{C}$ und $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n$ die zugehörige komplexe Potenzreihe im Entwicklungspunkt a . Sei ρ der Konvergenzradius der Potenzreihe.

- (i) Im Fall $\rho = 0$ konvergiert f nur im Punkt a .
- (ii) Im Fall $\rho = +\infty$ konvergiert f in jedem Punkt $z \in \mathbb{C}$ absolut.
- (iii) Sei nun $0 < \rho < +\infty$. Dann ist f in allen Punkten $z \in B_\rho(a)$ absolut konvergent und in allen Punkten $z \notin \bar{B}_\rho(a)$ divergent.

Gilt (iii), dann definiert f auf $B_\rho(a)$ eine stetige \mathbb{C} -wertige Funktion. Im Fall (ii) ist diese Funktion sogar auf ganz \mathbb{C} definiert.

Die sogenannte **formale Ableitung** einer Potenzreihe $f(z)$ wie oben ist gegeben durch die Potenzreihe

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-a)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (z-a)^n.$$

Wie in der reellen Analysis zeigt man auch hier, dass f und f' denselben Konvergenzradius besitzen. Der folgende Satz zeigt, dass die formale Ableitung zugleich die komplexe Ableitung der durch f definierten \mathbb{C} -wertigen Funktion liefert.

(2.10) Satz Sei $r \in \mathbb{R}^+$ und $f : B_r(a) \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion, deren Werte durch eine Potenzreihe im Entwicklungspunkt $a \in \mathbb{C}$ mit Konvergenzradius $\rho \geq r$ gegeben sind. Dann ist f auf $B_r(a)$ eine holomorphe Funktion, und die Ableitung von f ist in jedem Punkt $z \in B_r(a)$ der Wert der formalen Ableitung.

Beweis: Zur Vereinfachung der Notation beschränken wir uns beim Beweis auf den Entwicklungspunkt $a = 0$. Sei $z \in B_r(0)$ vorgegeben. Die komplexe Differenzierbarkeit von f und die Aussage über den Wert der Ableitung ist bewiesen, wenn wir zeigen können, dass die Differenz zwischen dem Differentialquotienten und dem Wert der formalen Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} &= \frac{1}{h} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+h)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \\ \frac{1}{h} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z+h)^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \right) - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{h} (z+h)^n - \frac{1}{h} z^n - n z^{n-1} \right) \end{aligned}$$

für $h \rightarrow 0$ gegen Null konvergiert. Für den Ausdruck im Inneren der Klammer gilt nach dem Binomischen Lehrsatz

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} (z+h)^n - \frac{1}{h} z^n - n z^{n-1} &= \frac{1}{h} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^k z^{n-k} - \frac{1}{h} z^n - n z^{n-1} = \\ \frac{1}{h} z^n + n z^{n-1} + \frac{1}{h} \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^k z^{n-k} - \frac{1}{h} z^n - n z^{n-1} &= \frac{1}{h} \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^k z^{n-k}. \end{aligned}$$

Diese Summe können wir weiter abschätzen. Für $0 \leq k \leq n-2$ gilt

$$\begin{aligned} \binom{n}{k+2} &\leq (k+1)(k+2) \binom{n}{k+2} = (k+1)(k+2) \frac{n!}{(k+2)!(n-k-2)!} = \frac{n!}{k!(n-k-2)!} \\ &= n(n-1) \frac{(n-2)!}{k!(n-2-k)!} = n(n-1) \binom{n-2}{k} \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h} \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^k z^{n-k} \right| &= |h|^{-1} \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} |h|^k |z|^{n-k} = |h|^{-1} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k+2} |h|^{k+2} |z|^{n-(k+2)} \\ &= |h| \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k+2} |h|^k |z|^{(n-2)-k} \leq n(n-1) |h| \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} |h|^k |z|^{(n-2)-k} \\ &= n(n-1) |h| (|h| + |z|)^{n-2}. \end{aligned}$$

Wir erhalten also die Abschätzung

$$\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right| \leq |h| \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) |a_n| (|h| + |z|)^{n-2}.$$

Seien nun $\delta, s \in \mathbb{R}^+$ so gewählt, dass $|z| + \delta < s < r$ erfüllt ist. Dann erhalten wir insgesamt für $0 < |h| < \delta$ die Abschätzung

$$\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right| \leq |h| \left(\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) |a_n| s^{n-2} \right). \quad (2.7)$$

Die zweite formale Ableitung von f ist gegeben durch

$$f'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2}.$$

Weil die Konvergenzradien von f , f' und f'' übereinstimmen, ist f'' im Punkt s absolut konvergent. Deshalb ist auch der Ausdruck in der Klammer auf der rechten Seite von (2.7) konvergent, und wir erhalten für $h \rightarrow 0$ die gewünschte Konvergenz gegen Null. \square

(2.11) Folgerung Durch die sogenannte *Exponential-, Sinus- und Kosinusreihe*

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{und} \quad \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

sind jeweils auf ganz \mathbb{C} definierte holomorphe Funktionen gegeben. Es gilt

$$\exp'(z) = \exp(z), \quad \sin'(z) = \cos(z) \quad \text{und} \quad \cos'(z) = -\sin(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Beweis: In der Analysis einer Variablen wurde gezeigt, dass die Reihen von Exponential-, Sinus und Kosinusfunktion auf ganz \mathbb{R} konvergieren. Also ist der Konvergenzradius aller drei Reihen gleich $+\infty$, und man erhält nach (2.10) auf ganz \mathbb{C} definierte, holomorphe Funktionen. Ebenfalls auf Grund des Satzes erhält man die komplexen Ableitungen der drei Funktionen einfach durch formale Ableitung der zugehörigen Potenzreihen. Für den komplexen Kosinus erhält man so beispielsweise die Ableitung

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n) \frac{z^{2n-1}}{(2n)!} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sin(z). \quad \square \end{aligned}$$

\square

Durch Einsetzen in die formalen Potenzreihen erhält man auch eine Gleichung, welche die drei Funktionen verbindet, nämlich

$$\exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Dies rechnen wir in den Übungen nach. An Stelle von $\exp(z)$ schreibt man häufig auch e^z . Die Gleichung zeigt, dass man die Polarkoordinaten-Darstellung einer komplexen Zahl auch in der Form $z = r e^{i\varphi}$ angeben kann, wobei r den Betrag und φ das Argument von z bezeichnet.

2.3 Komplexe Kurvenintegrale und Cauchyscher Integralsatz

Inhaltsübersicht

- ☆ Definition der komplexen Kurvenintegrale
- ☆ Der *Cauchysche Integralsatz* besagt, dass komplexen Kurvenintegrale über geschlossene Kurven in konvexen Gebieten gleich Null sind.
- ☆ Dieser Satz stellt einen Zusammenhang zwischen komplexen Kurvenintegralen und komplexen Stammfunktionen auf konvexen Gebieten her.

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ zunächst eine beliebige Teilmenge. Unter einer **Kurve** in U verstehen wir eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ auf einem kompakten Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, die stückweise stetig differenzierbar ist. Wie in Abschnitt 1.2 definieren wir

- (i) die **Normierung** $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ einer Kurve γ durch

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma((1-t)a + tb) \quad \text{für alle } t \in [0, 1]$$

- (ii) die **Konkatenation** zweier normierter Kurven $\gamma, \delta : [0, 1] \rightarrow U$ mit $\gamma(1) = \delta(0)$ durch

$$\delta * \gamma : [0, 1] \rightarrow U, \quad t \mapsto \begin{cases} \gamma(2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \delta(2t - 1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

- (iii) die **Inversion** einer normierten Kurve γ durch $\gamma^-(t) = \gamma(1-t)$ für alle $t \in [0, 1]$.

Ist mindestens eine der Kurven γ und δ nicht normiert, dann definieren wir $\delta * \gamma = \tilde{\delta} * \tilde{\gamma}$, wobei $\tilde{\gamma}$ und $\tilde{\delta}$ die Normierungen von γ und δ bezeichnen. Die folgenden beiden Kurventypen werden im Folgenden uns besonders häufig begegnen: Sind $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ zwei beliebige Punkte, dann ist die **Verbindungsstrecke** zwischen w_1 und w_2 die Kurve $[w_1, w_2]$ gegeben durch

$$[w_1, w_2] : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto (1-t)w_1 + tw_2.$$

Sei $w \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}^+$. Bezeichnen wir wie zuvor mit $\bar{B}_r(w)$ die abgeschlossene Kreisscheibe vom Radius r um den Punkt w , dann ist die (positiv orientierte) **Randkurve** von $\bar{B}_r(w)$ die Kurve $\partial\bar{B}_r(w)$ gegeben durch

$$\partial\bar{B}_r(w) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto w + re^{2\pi it}.$$

Um die nächste Definition vorzubereiten, führen wir die folgende Notation ein: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und $f = g + ih$ deren Zerlegung in Real- und Imaginärteil, mit stetigen, reellwertigen Funktionen g, h auf $[a, b]$. Dann setzen wir

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx + i \int_a^b h(x) dx.$$

Das Integral über f ist also eine komplexe Zahl. Bezeichnen G und H (reelle) Stammfunktionen von g und h , dann erhält man

$$\int_a^b f(x) dx = [G(x)]_a^b + i [H(x)]_a^b,$$

indem man den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung auf die Funktionen g und h anwendet. Setzt man $F = G + iH$ und definiert die Ableitung von F durch $F'(x) = G'(x) + iH'(x)$, dann lässt sich die Gleichung auch kürzer in der Form $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b$ darstellen. Wir illustrieren die neu eingeführte Notation an einem wichtigen Beispiel.

(2.12) Proposition Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $F(t) = e^{\lambda t}$. Dann gilt $F'(t) = \lambda e^{\lambda t}$.

Beweis: Sei $F = G + iH$ die Zerlegung von F in Real- und Imaginärteil. Ist $\lambda = u + iv$ mit $u, v \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$F(t) = e^{\lambda t} = e^{ut+ivt} = e^u (\cos(vt) + i \sin(vt)) = G(t) + iH(t)$$

mit $G(t) = e^{ut} \cos(vt)$ und $H(t) = e^{ut} \sin(vt)$. Die beiden Ableitungen $G'(t) = ue^{ut} \cos(vt) + (-v)e^{ut} \sin(vt)$ und $H'(t) = ue^{ut} \sin(vt) + ve^{ut} \cos(vt)$ liefern

$$\begin{aligned} F'(t) &= G'(t) + iH'(t) = ue^{ut} \cos(vt) + (-v)e^{ut} \sin(vt) + iue^{ut} \sin(vt) + ive^{ut} \cos(vt) \\ &= (u + iv)e^{ut} \cos(vt) + (u + iv)e^{ut} i \sin(vt) = (u + iv)e^{ut} (\cos(vt) + i \sin(vt)) = \lambda e^{\lambda t}. \quad \square \end{aligned}$$

Die folgende Definition ist den Kurvenintegralen 2. Art aus Abschnitt 1.2 sehr ähnlich.

(2.13) Definition Für eine stetige Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ und eine Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ definieren wir

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b (f \circ \gamma)(t) \gamma'(t) dt$$

und nennen es das **komplexe Kurvenintegral** von f über U .

Komplexe Kurvenintegrale über Verbindungsstrecken werden auch in der Form

$$\int_{w_1}^{w_2} f(z) dz = \int_{[w_1, w_2]} f(z) dz = \int_0^1 f((1-t)w_1 + tw_2)(w_2 - w_1) dt \quad \text{notiert.}$$

Wir illustrieren die Definition, indem wir das Kurvenintegral zweier Funktionen über die Randkurve der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe $\gamma = \partial \bar{B}_1(0)$ berechnen. Diese hatten wir definiert durch $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$. Für die Funktion $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^2$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} z^2 dz &= \int_0^1 \gamma(t)^2 \gamma'(t) dt = \int_0^1 e^{6\pi i t} \cdot 2\pi i dt = 2\pi i \int_0^1 e^{6\pi i t} dt \\ &= 2\pi i \left[\frac{1}{6\pi i} e^{6\pi i t} \right]_0^1 = \frac{1}{3} (e^{6\pi i \cdot 1} - e^{6\pi i \cdot 0}) = \frac{1}{3} (1 - 1) = 0. \end{aligned}$$

Für die rationale Funktion $\mathbb{C}^{\times} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{z}$ mit einer Definitionslücke im Nullpunkt ergibt sich dagegen

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt = \int_0^1 \frac{2\pi i e^{2\pi i t}}{e^{2\pi i t}} dt = 2\pi i \int_0^1 1 dt = 2\pi i.$$

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ beliebig und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Ähnlich wie für die Kurvenintegrale 2. Art gelten auch für komplexe Kurvenintegrale die *Rechenregeln*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz \quad , \quad \int_{\delta * \gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\delta} f(z) dz \quad \text{und} \quad \int_{\gamma^-} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz$$

wobei γ eine Kurve bezeichnet, deren Endpunkt mit dem Startpunkt von δ übereinstimmt, und $\tilde{\gamma}$ die Normierung von γ ist.

Weil wir den Vorzeichenwechsel beim Übergang von γ zu γ^- im Abschnitt 1.2 nicht bewiesen haben, führen wir den Beweis für komplexe Kurvenintegrale hier vollständig aus. Wir können davon ausgehen, dass γ normiert ist, also die Form $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ besitzt. Zunächst bemerken wir, dass die (eindimensionale) Substitutionsregel problemlos von reell- auf komplexwertige Funktionen übertragen werden kann.

Ist nämlich $f_1 : I \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit Zerlegung $f = g_1 + ih_1$ in Real- und Imaginärteil, und ist $u : J \rightarrow I$ eine stetig differenzierbare, streng monoton wachsende oder fallende Funktion auf einem offenen Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$, dann gilt für alle $a, b \in J$ mit $a < b$ auf Grund der reellwertigen Substitutionsregel

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f_1(x) dx &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g_1(x) dx + i \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} h_1(x) dx = \int_a^b (g_1 \circ \varphi)(t) \varphi'(t) dt + i \int_a^b (h_1 \circ \varphi)(t) \varphi'(t) dt \\ &= \int_a^b (f_1 \circ \varphi)(t) \varphi'(t) dt. \end{aligned}$$

Wenden wir dies auf $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u(t) = 1 - t$ und die Funktion $t \mapsto (f \circ \gamma)(t) \gamma'(t)$ an, so erhalten wir nun für das komplexe Kurvenintegral

$$\begin{aligned} \int_{\gamma^-} f(z) dz &= \int_0^1 (f \circ \gamma^-)(t) (\gamma^-)'(t) dt = \int_0^1 (f \circ \gamma \circ u)(t) (\gamma \circ u)'(t) dt = \\ \int_{u(0)}^{u(1)} (f \circ \gamma)(t) \gamma'(t) dt &= \int_1^0 (f \circ \gamma)(t) \gamma'(t) dt = - \int_0^1 (f \circ \gamma)(t) \gamma'(t) dt = - \int_{\gamma} f(z) dz. \end{aligned}$$

Wie in Abschnitt 1.2 definieren wir die *Länge* einer komplexen Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Der einzige Unterschied besteht darin, dass die Kurve nun in \mathbb{C} statt in \mathbb{R}^2 verläuft, und dass der komplexe Absolutbetrag an die Stelle der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ tritt. Wie man sich leicht überzeugt, gilt auch hier $\mathcal{L}(\delta * \gamma) = \mathcal{L}(\delta) + \mathcal{L}(\gamma)$ und $\mathcal{L}(\gamma^-) = \mathcal{L}(\gamma)$ ab. Für die spätere Verwendung notieren wir noch die folgende Abschätzung für Kurvenintegrale.

(2.14) Proposition Sei $U \subseteq \mathbb{C}$, $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ eine Kurve, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und $c \in \mathbb{R}_+$ eine Konstante, so dass $|f(z)| \leq c$ für alle $z \in \gamma([a, b])$ erfüllt ist. Dann gilt

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq c \mathcal{L}(\gamma).$$

Beweis: Die Ungleichung erhält man durch die Rechnung

$$\left| \int_{\gamma} f dz \right| = \left| \int_a^b (f \circ \gamma)(t) \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |(f \circ \gamma)(t)| |\gamma'(t)| dt \leq c \int_a^b |\gamma'(t)| dt = c \mathcal{L}(\gamma).$$

Hierbei wurde im zweiten Schritt (1.40) (i) verwendet. Man beachte, dass die Regel dort nur für den reellen Absolutbetrag formuliert wurde, hier aber für den komplexen Absolutbetrag benötigt wird. Die Übertragung auf den komplexen Fall ist nicht vollkommen trivial; eventuell wird sie in den Übungen behandelt. \square

Unser wichtigstes Ziel in diesem Abschnitt ist der Nachweis, dass Kurvenintegrale holomorpher Funktionen, die auf einer konvexen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ definiert sind, stets den Wert Null haben.

(2.15) Definition Seien $u, v, w \in \mathbb{C}$ drei Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen affinen Geraden liegen. Dann bezeichnen wir die Menge

$$\Delta = \Delta(u, v, w) = \{ \lambda u + \mu v + \nu w \mid \lambda, \mu, \nu \in [0, 1], \lambda + \mu + \nu = 1 \}$$

als *Dreieck* mit den Eckpunkten u, v, w . Als *Randkurve* des Dreiecks definieren wir die zusammengesetzte Kurve $\partial\Delta = [w, u] * [v, w] * [u, v]$.

Wir erinnern daran, dass eine Teilmenge eines metrischen Raums *zusammenhängend* genannt wird, wenn sie keine Zerlegung in zwei echte relativ offene, nichtleere Teilmengen besitzt. Eine offene zusammenhängende Teilmenge eines metrischen Raums nennt man auch ein *Gebiet*.

Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ wird als *konvex* bezeichnet, wenn für zwei beliebige Punkte $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ auch das Bild der Verbindungsstrecke $[w_1, w_2]([0, 1])$ vollständig in U liegt. Aus der Definition der Konvexität folgt unmittelbar, dass für jede konvexe Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ mit $u, v, w \in U$ auch das Dreieck $\Delta = \Delta(u, v, w)$ in U enthalten ist. Ist $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, dann gilt auf Grund der Rechenregel für die Konkatenation von Kurven jeweils

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = \int_u^v f(z) dz + \int_v^w f(z) dz + \int_w^u f(z) dz.$$

Die Länge von $\partial\Delta$, also die Zahl $|v - u| + |w - v| + |u - w|$, bezeichnen wir als *Umfang* des Dreiecks.

(2.16) Proposition Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet, und seien $u, v, w \in U$ Punkte, die nicht auf einer affinen Geraden liegen. Sei $\Delta = \Delta(u, v, w)$, und seien $u' = \frac{1}{2}(v+w)$, $v' = \frac{1}{2}(u+w)$, $w' = \frac{1}{2}(u+v)$ die Seitenmittelpunkte von Δ . Dann können wir Δ in die vier kleineren Dreiecke

$$\Delta_1 = \Delta(u, w', v') \quad , \quad \Delta_2 = \Delta(v, u', w') \quad , \quad \Delta_3 = \Delta(w, v', u') \quad \text{und} \quad \Delta_4 = \Delta(u', v', w')$$

zerlegen. Für jede stetige Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ gilt

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z) dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z) dz + \int_{\partial\Delta_3} f(z) dz + \int_{\partial\Delta_4} f(z) dz.$$

Beweis: Die Gleichung erhält man durch mehrfache Anwendung der Rechenregeln für Konkatenation und Inversion. Nach Definition der Verbindungsstrecken gilt allgemein

$$\int_{w_2}^{w_1} f(z) dz = \int_{[w_1, w_2]^-} f(z) dz = - \int_{w_1}^{w_2} f(z) dz$$

für beliebige Punkte $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Delta_1} f(z) dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z) dz + \int_{\partial\Delta_3} f(z) dz + \int_{\partial\Delta_4} f(z) dz = \\ & \left(\int_u^{w'} f(z) dz + \int_{w'}^{v'} f(z) dz + \int_{v'}^u f(z) dz \right) + \left(\int_v^{u'} f(z) dz + \int_{u'}^{w'} f(z) dz + \int_{w'}^v f(z) dz \right) + \\ & \left(\int_w^{v'} f(z) dz + \int_{v'}^{u'} f(z) dz + \int_{u'}^w f(z) dz \right) + \left(\int_{u'}^{v'} f(z) dz + \int_{v'}^{w'} f(z) dz + \int_{w'}^{u'} f(z) dz \right) = \\ & \int_u^{w'} f(z) dz + \int_{w'}^{v'} f(z) dz + \int_{v'}^u f(z) dz + \int_v^{u'} f(z) dz + \int_{u'}^{w'} f(z) dz + \int_{w'}^v f(z) dz = \\ & \int_u^v f(z) dz + \int_v^w f(z) dz + \int_w^u f(z) dz = \int_{\partial\Delta} f(z) dz. \quad \square \end{aligned}$$

Als letzte Vorbereitung für den Cauchyschen Integralsatz benötigen wir

(2.17) Lemma Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine *komplexe Stammfunktion* von f , also eine komplex differenzierbare Funktion mit $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in U$. Dann gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = (F \circ \gamma)(b) - (F \circ \gamma)(a)$$

für jeden in U verlaufenden Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Ist γ insbesondere ein geschlossener Weg, dann gilt also $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Beweis: Die Aussage erhält man durch Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung aus der reellen Analysis. Seien $f = g + ih$ und $F = G + iH$ die Zerlegungen von f und F in Real- und Imaginärteil. Dann sind $G \circ \gamma$ und $H \circ \gamma$ Real- und Imaginärteil von $F \circ \gamma$, und $(G \circ \gamma)'$, $(H \circ \gamma)'$ sind Real- und Imaginärteil von $(F \circ \gamma)'$. Zunächst betrachten wir den Fall, dass γ auf dem offenen Intervall $]a, b[$ stetig differenzierbar ist. Auf Grund der Kettenregel und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b (f \circ \gamma)(t) \gamma'(t) dt = \int_a^b (F' \circ \gamma)(t) \gamma'(t) dt = \\ & \int_a^b (F \circ \gamma)'(t) dt = \int_a^b (G \circ \gamma)'(t) dt + i \int_a^b (H \circ \gamma)'(t) dt = \\ & (G \circ \gamma)(b) - (G \circ \gamma)(a) + i(H \circ \gamma)(b) - i(H \circ \gamma)(a) = (F \circ \gamma)(b) - (F \circ \gamma)(a). \end{aligned}$$

Nun sei γ ein beliebiger Weg, und $a = x_0 < \dots < x_n = b$ eine Unterteilung mit der Eigenschaft, dass $\gamma_k = \gamma|_{]x_{k-1}, x_k[}$ für $1 \leq k \leq n$ stetig differenzierbar ist. Auf Grund der bereits bewiesenen Gleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f dz &= \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f dz = \sum_{k=1}^n ((F \circ \gamma)(x_k) - (F \circ \gamma)(x_{k-1})) = \\ &= (F \circ \gamma)(x_n) - (F \circ \gamma)(x_0) = (F \circ \gamma)(b) - (F \circ \gamma)(a). \end{aligned} \quad \square$$

(2.18) Satz (Cauchyscher Integralsatz für Dreiecke)

Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $\Delta \subseteq U$ ein Dreieck, dann gilt

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0.$$

Beweis: Wie in (2.16) unterteilen wir das Dreieck Δ in vier Dreiecke $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$. Sei $\Delta^{(1)}$ von diesen vier Dreiecken dasjenige mit dem maximalen Betrag

$$\left| \int_{\partial\Delta_i} f(z) dz \right|, \quad i \in \{1, 2, 3, 4\}$$

des Kurvenintegrals. Setzen wir $\Delta^{(0)} = \Delta$, dann gilt $\Delta^{(0)} \supseteq \Delta^{(1)}$ und

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial\Delta^{(0)}} f(z) dz \right| &= \left| \int_{\partial\Delta_1} f(z) dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z) dz + \int_{\partial\Delta_3} f(z) dz + \int_{\partial\Delta_4} f(z) dz \right| \leq \\ &= \left| \int_{\partial\Delta_1} f(z) dz \right| + \left| \int_{\partial\Delta_2} f(z) dz \right| + \left| \int_{\partial\Delta_3} f(z) dz \right| + \left| \int_{\partial\Delta_4} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \int_{\partial\Delta^{(1)}} f(z) dz \right|. \end{aligned}$$

Indem wir dieselbe Konstruktion wie zuvor auf Δ auf das Dreieck $\Delta^{(1)}$ anwenden, erhalten wir ein Dreieck $\Delta^{(2)} \subseteq \Delta^{(1)}$, und Iteration dieses Vorgangs liefert eine Folge $\Delta^{(0)} \supseteq \Delta^{(1)} \supseteq \Delta^{(2)} \supseteq \Delta^{(3)} \supseteq \dots$ von Dreiecken mit

$$\left| \int_{\partial\Delta^{(0)}} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial\Delta^{(n)}} f(z) dz \right|.$$

Bezeichnen wir jeweils mit ℓ_n den Umfang und mit δ_n den Durchmesser von Δ_n , dann gilt $\ell_n = 2^{-n}\ell_0$ und $\delta_n = 2^{-n}\delta_0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Weil die Dreiecke kompakt sind und sich gegenseitig enthalten, gibt es nach dem Schachtelungsprinzip aus der Analysis mehrerer Variablen einen Punkt $w \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \Delta^{(n)} = \{w\}.$$

Auf Grund der komplexen Differenzierbarkeit von f im Punkt w existiert eine Funktion $h : U \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = f(w) + (z - w)f'(w) + h(z) \quad \text{mit} \quad \lim_{z \rightarrow w} \frac{h(z)}{|z - w|} = 0.$$

Die Funktion $g(z) = f(w) + (z - w)f'(w)$ besitzt $G(z) = f(w)z + \frac{1}{2}(z - w)^2 f'(w)$ als komplexe Stammfunktion. Mit (2.17) erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Delta^{(n)}} f(z) dz &= \int_{\partial\Delta^{(n)}} (g + h)(z) dz = \int_{\partial\Delta^{(n)}} g(z) dz + \int_{\partial\Delta^{(n)}} h(z) dz \\ &= 0 + \int_{\partial\Delta^{(n)}} h(z) dz = \int_{\partial\Delta^{(n)}} h(z) dz. \end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig vorgegeben. Auf Grund der Grenzwerteigenschaft der Funktion h gilt $|h(z)| \leq \varepsilon|z - w|$ für z in einer hinreichend kleinen Umgebung $V \subseteq U$ von w . Da der Durchmesser δ_n von $\Delta^{(n)}$ für $n \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert, ist das Dreieck $\Delta^{(n)}$ für hinreichend großes n in V enthalten. Für alle $z \in \Delta^{(n)}$ gilt dann $|z - w| \leq \delta_n$ und somit $|h(z)| \leq \varepsilon\delta_n$. Weil der Dreiecksumfang zugleich die Länge des Integrationsweges ist, erhalten wir mit (2.14) die Abschätzung

$$\left| \int_{\partial\Delta^{(n)}} f(z) dz \right| = \left| \int_{\partial\Delta^{(n)}} h(z) dz \right| \leq \varepsilon\delta_n \ell_n = 4^{-n} \delta_0 \ell_0 \varepsilon.$$

Es folgt

$$\left| \int_{\partial\Delta^{(0)}} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial\Delta^{(n)}} f(z) dz \right| \leq \delta_0 \ell_0 \varepsilon,$$

und da $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig vorgegeben war, folgt $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$. \square

In Anwendungen des Cauchyschen Integralsatzes stellt es sich häufig als günstig heraus, wenn man auf die Holomorphie der Funktion f in einem Punkt des Definitionsbereichs verzichten kann.

(2.19) Proposition Sei $\Delta = \Delta(u, v, w)$ ein Dreieck, $a \in \Delta$ ein Punkt, $U \subseteq \mathbb{C}$ offen mit $U \supseteq \Delta$ und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die auf $U \setminus \{a\}$ holomorph ist. Dann gilt

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0.$$

Beweis: Zunächst betrachten wir den Fall, dass a mit einem der Eckpunkte des Dreiecks übereinstimmt; sei etwa $a = u$. Seien ferner v_1 und w_1 zwei beliebige Punkte auf den an u anliegenden Dreiecksseiten $[u, v]$ bzw. $[u, w]$. Definieren wir $\Delta_1 = \Delta(u, v_1, w_1)$, $\Delta_2 = \Delta(w, w_1, v_1)$ und $\Delta_3 = \Delta(v_1, v, w)$, dann erhalten wir eine Unterteilung des Dreiecks Δ in drei kleinere Dreiecke. Wie in (2.16) rechnet man nach, dass

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z) dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z) dz + \int_{\partial\Delta_3} f(z) dz$$

erfüllt ist. Weil f auf Δ_2 und Δ_3 holomorph ist, verschwindet das Integral für diese beiden Dreiecke, und es folgt

$$\int_{\partial\Delta} f dz = \int_{\partial\Delta_1} f dz. \quad (2.8)$$

Weil Δ kompakt ist, nimmt die stetige Funktion $z \mapsto |f(z)|$ auf Δ ein Maximum $m \in \mathbb{R}_+$ an. Auf Grund von (2.14) gilt die Abschätzung

$$\left| \int_{\partial\Delta_1} f(z) dz \right| \leq \mathcal{L}(\partial\Delta_1)m.$$

Nach Gleichung (2.8) ist das Integral über $\partial\Delta_1$ von der Lage der Punkte v_1, w_1 auf den Dreiecksseiten unabhängig. Lassen wir nun v_1 und w_1 gegen $a = u$ laufen, dann konvergiert der Umfang $\mathcal{L}(\partial\Delta_1)$ von Δ_1 gegen Null. Es folgt

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z) dz = 0.$$

Als nächstes betrachten wir den Fall, dass a zwar auf einer Seite des Dreiecks liegt, etwa in $[u, v]$, aber mit keinem der Eckpunkte übereinstimmt. Wir bilden dann die Dreiecke $\Delta_1 = \Delta(u, a, w)$ und $\Delta_2 = \Delta(v, w, a)$. Wieder zeigt man durch eine Rechnung wie in (2.16), dass

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z) dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z) dz \quad \text{gilt.}$$

Nach Konstruktion ist a ein Eckpunkt sowohl von Δ_1 als auch von Δ_2 . Wir können also die Aussage im bereits bewiesenen Fall anwenden und erhalten

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z) dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z) dz = 0 + 0 = 0.$$

Schließlich betrachten wir noch den Fall, dass a im Inneren des Dreiecks enthalten ist. Dann gibt es $\lambda, \mu, \nu \in]0, 1[$ mit $\lambda + \mu + \nu = 1$ und $a = \lambda u + \mu v + \nu w$. Der Punkt $b = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} u + \frac{\mu}{\lambda + \mu} v$ liegt dann auf der Verbindungsstrecke $[u, v]$, stimmt aber weder mit u noch mit v überein, und a ist wegen

$$\begin{aligned} (1 - \nu)b + \nu w &= (1 - \nu) \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} u + \frac{\mu}{\lambda + \mu} v \right) + \nu w = (\lambda + \mu) \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} u + \frac{\mu}{\lambda + \mu} v \right) + \nu w \\ &= \lambda u + \mu v + \nu w = a \end{aligned}$$

in der Verbindungsstrecke $[b, w]$ enthalten. Es sind dann $\Delta_1 = \Delta(u, b, w)$ und $\Delta_2 = \Delta(v, w, b)$ Dreiecke mit der Eigenschaft, dass a auf einer ihrer Seiten liegt. Wiederum ist die Aussage damit auf einen bereits bewiesenen Fall zurückgeführt, und wir erhalten

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z) dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z) dz = 0 + 0 = 0. \quad \square$$

(2.20) Proposition Sei G ein konvexes Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und auf G mit eventueller Ausnahme eines einzelnen Punktes holomorph. Ist $a \in G$ ein beliebiger Punkt, dann ist durch

$$F : G \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \int_a^z f(w) dw$$

eine Stammfunktion von f definiert.

Beweis: Für ein beliebiges $b \in G$ ist zu zeigen, dass F in b differenzierbar ist und $F'(b) = f(b)$ gilt. Sei $z \in G$ ein beliebiger Punkt und $\Delta = \Delta(b, a, z)$. Dann ist Δ vollständig im Gebiet G enthalten. Auf Grund des Cauchyschen Integralsatzes für Dreiecke gilt $\int_{\partial\Delta} f(w) dw = 0$, also

$$F(b) + \int_b^z f(w) dw - F(z) = \int_a^b f(w) dw + \int_b^z f(w) dw + \int_z^a f(w) dw = 0$$

und somit

$$F(z) - F(b) = \int_b^z f(w) dw = \int_0^1 f((1-t)b + tz)(z-b) dt = (z-b)g(z)$$

mit $g(z) = \int_0^1 f((1-t)b + tz) dt$. Es gilt $g(b) = \int_0^1 f(b) dt = f(b)$, und wegen

$$g(z) - g(b) = \int_0^1 (f((1-t)b + tz) - f(b)) dt$$

ist $|g(z) - g(b)|$ durch $\max\{|f((1-t)b + tz) - f(b)| \mid 0 \leq t \leq 1\}$ beschränkt. Weil f auf G stetig ist, konvergiert diese Differenz gegen Null, wenn wir $z \rightarrow b$ laufen lassen; also ist auch g im Punkt b stetig. Es folgt nun

$$\lim_{z \rightarrow b} \frac{F(z) - F(b)}{z - b} = \lim_{z \rightarrow b} g(z) = g(b) = f(b).$$

Damit haben wir gezeigt, dass F in b differenzierbar ist, und dass $F'(b) = f(b)$ gilt. □

(2.21) Satz (Cauchyscher Integralsatz für konvexe Gebiete)

Sei G ein konvexes Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und mit eventueller Ausnahme eines einzelnen Punktes holomorph. Dann gilt für jede in G verlaufende, geschlossene Kurve γ

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Beweis: Weil f auf G nach (2.20) eine Stammfunktion besitzt, erhalten wir die Aussage durch Anwendung von (2.17). □

In der speziellen Situation, dass die Kurve γ einen *Normalbereich* in \mathbb{C} durchläuft (im Sinne von Abschnitt 1.2, wenn man \mathbb{C} mit \mathbb{R}^2 identifiziert), und dass f komplex differenzierbar mit stetiger komplexer Ableitung ist, kann der Cauchysche Integralsatz übrigens auch aus dem Greenschen Integralsatz hergeleitet werden.

2.4 Die Cauchysche Integralformel

Inhaltsübersicht

- ☆ Die Cauchysche Integralformel stellt die Werte $f(z)$ einer holomorphen Funktion für z im Inneren einer Kreisscheibe $B_r(a)$ durch ein Integral über den Rand $\partial B_r(a)$ dar.
- ☆ Wesentlicher Bestandteil des Beweises ist der Cauchysche Integralsatz aus dem vorherigen Kapitel, der auf den Differentialquotienten $w \mapsto \frac{f(w)-f(z)}{w-z}$ angewendet wird.
- ☆ Eine wichtige Folgerung aus der Cauchyschen Integralformel ist die Tatsache, dass holomorphe Funktionen beliebig oft komplex differenzierbar sind. Die Werte $f^{(n)}(z)$ der höheren Ableitungen können für $z \in B_r(a)$ ebenfalls durch ein Integral über $\partial B_r(a)$ dargestellt werden.

In diesem Abschnitt leiten wir aus dem Cauchyschen Integralsatz eine wichtige Formel ab, welche besagt, dass eine holomorphe Funktion auf einer Kreisscheibe vollständig durch ihre Werte auf dem Kreisrand festgelegt ist. Viele fundamentale Eigenschaften holomorpher Funktionen lassen sich auf diese Formel zurückführen.

Als Vorbereitung für den Beweis des Satzes zeigen wir, dass Kurvenintegrale über stetige Funktionen, die von einem komplex differenzierbaren Parameter abhängen, selbst komplex differenzierbare Funktionen darstellen. Seien U eine offene, W eine beliebige Teilmenge von \mathbb{C} und $f : U \times W \rightarrow \mathbb{C}$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, dass für jedes $w \in W$ die Funktion $f_w : U \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto f(z, w)$ eine holomorphe Funktion ist. Dann setzen wir $\frac{\partial f}{\partial z}(z, w) = f'_w(z)$, wobei f'_w die komplexe Ableitung von f_w nach der Variablen z bezeichnet. Wir erhalten auf diese Weise eine Abbildung $\partial_w f : U \times W \rightarrow \mathbb{C}$.

(2.22) Proposition Seien $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $W \subseteq \mathbb{C}$ beliebig und $f : U \times W \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Außerdem setzen wir voraus, dass $\frac{\partial f}{\partial z}$ auf ganz $U \times W$ existiert und stetig ist. Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow W$ eine Kurve in W . Dann ist

$$F : U \rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad z \mapsto \int_{\gamma} f(z, w) \, dw$$

eine holomorphe Funktion, und es gilt $F'(z) = \int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial z}(z, w) \, dw$ für alle $z \in U$.

Beweis: Wesentliches Hilfsmittel ist Satz (1.48) über die Vertauschbarkeit von Integration und partieller Differentiation. Sei $z_0 \in U$ vorgegeben und $C \subseteq U$ eine kompakte Umgebung von z_0 . Wir betrachten die Abbildung

$$\tilde{f} : U \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad (z, t) \mapsto f(z, \gamma(t))\gamma'(t).$$

In den Übungen haben wir gezeigt, dass eine stetige reellwertige Funktion auf einem kompakten Intervall Lebesgue-integrierbar ist. Also sind Real- und Imaginärteil von $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \tilde{f}(z, t)$ für jedes $z \in U$ Lebesgue-integrierbar. Seien außerdem $\partial_x \tilde{f}$ und $\partial_y \tilde{f}$ die Richtungsableitungen von \tilde{f} in Richtung der Vektoren $(1, 0)$ und $(i, 0)$ in $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$. Für alle $(z, t) \in U \times [a, b]$ gilt

$$\partial_x \tilde{f}(z, t) = \frac{\partial f}{\partial x}(z, \gamma(t))\gamma'(t) \quad \text{und} \quad \partial_y \tilde{f}(z, t) = \frac{\partial f}{\partial y}(z, \gamma(t))\gamma'(t).$$

und nach Voraussetzung sind diese Abbildungen stetig auf $[a, b] \times U$. Nach dem Maximumsprinzip sind Real- und Imaginärteil dieser Funktionen auf der kompakten Menge $[a, b] \times C$ durch eine gemeinsame Konstante $\gamma \in \mathbb{R}^+$ beschränkt. Die konstante Abbildung $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \gamma$ ist also für jedes $z \in C$ eine integrierbare Majorante von Real- und Imaginärteil der Funktionen $t \mapsto \partial_x \tilde{f}(z, t)$ und $t \mapsto \partial_y \tilde{f}(z, t)$. Sei nun $F : U \times W \rightarrow \mathbb{C}$ die Funktion

$$F(z) = \int_a^b \tilde{f}(z, t) dt = \int_a^b f(z, \gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_\gamma f(z, w) dw.$$

Mit Satz (1.48), angewendet auf Real- und Imaginärteil von $t \mapsto \tilde{f}(z, t)$, erhalten wir im Punkt z_0 jeweils

$$\frac{\partial F}{\partial x}(z_0) = \int_a^b \partial_x \tilde{f}(z_0, t) dt = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(z_0, \gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial x}(z_0, w) dw$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial y}(z_0) = \int_a^b \partial_y \tilde{f}(z_0, t) dt = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(z_0, \gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial y}(z_0, w) dw ;$$

insbesondere existieren die Richtungsableitungen. Weil $z \mapsto f(z, w)$ für jedes feste $w \in W$ komplex differenzierbar ist, gilt

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x}(z_0, w) + \frac{1}{2} i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0, w) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0, w) = 0.$$

Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(z_0) &= \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x}(z_0) + \frac{1}{2} i \frac{\partial F}{\partial y}(z_0) = \frac{1}{2} \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial x}(z_0, w) dw + \frac{1}{2} i \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial y}(z_0, w) dw = \\ &= \int_\gamma \left(\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x}(z_0, w) + \frac{1}{2} i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0, w) \right) dw = \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0, w) dw = \int_\gamma 0 dw = 0. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass F im Punkt z_0 komplex differenzierbar ist. Für die komplexe Ableitung erhalten wir

$$\begin{aligned} F'(z_0) &= \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x}(z_0) - \frac{1}{2} i \frac{\partial F}{\partial y}(z_0) = \frac{1}{2} \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial x}(z_0, w) dw - \frac{1}{2} i \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial y}(z_0, w) dw = \\ &= \int_\gamma \left(\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x}(z_0, w) - \frac{1}{2} i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0, w) \right) dw = \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial z}(z_0, w) dw. \quad \square \end{aligned}$$

(2.23) Proposition Sei $a \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt für jedes $z \in B_r(a)$ jeweils

$$\int_{\partial B_r(a)} \frac{dw}{w-z} = 2\pi i.$$

Beweis: Sei $h : B_r(a) \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $h(z) = \int_{\partial B_r(a)} \frac{dw}{w-z}$ für alle $z \in B_r(a)$. Die Anwendung von (2.22) auf die Mengen $U = B_r(a)$, $W = \partial B_r(a)$ und die Abbildung $f(z, w) = \frac{1}{w-z}$ zeigt, dass h auf $B_r(a)$ holomorph ist, und dass man ihre komplexe Ableitung durch Differentiation nach z unter dem Integralzeichen erhält. Es gilt also

$$h'(z) = \int_{\partial B_r(a)} \frac{dw}{(w-z)^2}.$$

Weil die Funktion $\mathbb{C} \setminus \{z\} \rightarrow \mathbb{C}$, $w \mapsto (w-z)^{-2}$ für alle $z \in B_r(a)$ unter dem Integralzeichen die Stammfunktion $w \mapsto -(w-z)^{-1}$ besitzt, ist das geschlossene Kurvenintegral über $w \mapsto (w-z)^{-2}$ nach (2.17) jeweils Null. Es

gilt also $h'(z) = 0$ für alle $z \in B_r(a)$. Somit ist h auf $B_r(a)$ konstant. Setzen wir $\gamma(t) = a + re^{2\pi it}$, dann erhalten wir für alle $z \in B_r(a)$ jeweils

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_r(a)} \frac{dw}{w-z} &= h(z) = h(a) = \int_{\partial B_r(a)} \frac{dw}{w-a} = \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-a} dt \\ &= \int_0^1 \frac{2\pi i r e^{2\pi i t}}{r e^{2\pi i t}} dt = \int_0^1 2\pi i dt = 2\pi i. \end{aligned} \quad \square$$

(2.24) Lemma Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $a \in U$ und $r \in \mathbb{R}^+$, so dass die abgeschlossene Kreisscheibe $\bar{B}_r(a)$ in U liegt. Dann gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, so dass auch noch die offene Kreisscheibe $B_{r+\varepsilon}(a)$ in U enthalten ist.

Beweis: Angenommen, die Aussage ist falsch. Dann gibt es eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ im Komplement $V = \mathbb{C} \setminus U$ mit $|z_n - a| \leq r + \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weil die gesamte Folge in der kompakten Kreisscheibe $\bar{B}_{r+1}(a)$ enthalten ist, können wir durch Übergang zu einer konvergenten Teilfolge voraussetzen, dass $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen ein $z \in \mathbb{C}$ konvergiert. Diese Teilfolge erfüllt weiterhin die Abschätzung $|z_n - a| \leq r + \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nun gilt

$$|z - a| = \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - a| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(r + \frac{1}{n} \right) = r,$$

also $z \in \bar{B}_r(a)$. Weil aber V abgeschlossen ist, ist auch z in V enthalten. Dies widerspricht der Voraussetzung, dass $\bar{B}_r(a)$ in U enthalten ist. \square

(2.25) Satz (Cauchysche Integralformel)

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Sei $a \in U$ und $r \in \mathbb{R}^+$ mit $\bar{B}_r(a) \subseteq U$. Dann gilt für jedes $z \in B_r(a)$ die Gleichung

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Beweis: Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ so gewählt, dass auch $B_{r+\varepsilon}(a)$ noch in U liegt. Dann ist $G = B_{r+\varepsilon}(a)$ ein konvexes Gebiet. Für ein festgewähltes $z \in B_r(a)$ betrachten wir auf G die Funktion gegeben durch

$$g(w) = \begin{cases} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} & \text{für } w \neq z \\ f'(z) & \text{für } w = z. \end{cases}$$

Diese Funktion ist auf $G \setminus \{z\}$ holomorph und auf Grund der komplexen Differenzierbarkeit von f im Punkt z stetig. Wir können somit den Cauchyschen Integralsatz in der Fassung von (2.21) anwenden. Zusammen mit

(2.23) erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial B_r(a)} g(w) \, dw = \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \, dw = \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(w)}{w - z} \, dw - f(z) \int_{\partial B_r(a)} \frac{dw}{w - z} \\ &= \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(w)}{w - z} \, dw - 2\pi i f(z). \end{aligned}$$

Umstellen dieser Gleichung nach $f(z)$ liefert die gewünschte Aussage. \square

Aus der Cauchyschen Integralformel ergeben sich eine ganze Reihe überraschender Konsequenzen.

(2.26) Satz Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann ist f auf U beliebig oft komplex differenzierbar, und alle höheren Ableitungen $f^{(n)}$ sind wieder holomorph.

Beweis: Sei $a \in U$ und $r \in \mathbb{R}^+$ mit $\bar{B}_r(a) \subseteq U$. Auf Grund der Cauchyschen Integralformel gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(w)}{w - z} \, dw \quad \text{für alle } z \in B_r(a).$$

Wir betrachten nun die Funktion $g : \partial B_r(a) \times B_r(a) \rightarrow \mathbb{C}$, $(w, z) \mapsto \frac{f(w)}{w - z}$. Diese ist offenbar in w stetig und nach z stetig differenzierbar. Nach (2.22) können wir Integration über die Kurve und Differentiation vertauschen. Die Funktion f ist demnach komplex differenzierbar, und es gilt

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(w)}{(w - z)^2} \, dw.$$

Wiederum ist die Funktion $\frac{f(w)}{(w - z)^2}$ unter dem Integralzeichen stetig in w und nach z stetig differenzierbar. Die erneute Anwendung von (2.22) zeigt, dass auch f' holomorph ist. Wir können also dieselben Argumente wie zuvor auch auf die Funktion f' anwenden. Durch vollständige Induktion beweist man die Existenz und Holomorphie der höheren Ableitungen $f^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. \square

Durch wiederholte Differentiation von $\frac{f(w)}{w - z}$ nach z erhält man die Integralformel

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} \, dw \quad (2.9)$$

für die höheren Ableitungen von f . Die Durchführung eines entsprechenden Induktionsbeweises ist eine einfache Übungsaufgabe.

(2.27) Folgerung Besitzt eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ auf U eine komplexe Stammfunktion, dann ist f auf U holomorph.

Beweis: Sei $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine Stammfunktion. Dann ist $F' = f$ auf Grund des soeben bewiesenen Satzes holomorph. \square

2.5 Anwendungen der Cauchyschen Integralformel

Inhaltsübersicht

- ☆ Eine holomorphe Funktion kann in jedem Punkt a ihres Definitionsbereichs U in eine Potenzreihe entwickelt werden. Dabei ist der Konvergenzkreis um a mindestens so groß wie der maximale Kreis um a , der in U Platz findet.
- ☆ Der *Identitätssatz* besagt, dass eine holomorphe Funktion auf einem Gebiet G durch ihre Werte auf einer nicht-diskreten Teilmenge von G bereits eindeutig festgelegt ist.
- ☆ Der *Satz von Liouville* besagt, dass jede holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit beschränkter Wertemenge $f(\mathbb{C})$ konstant ist.
- ☆ Laut dem *Maximumsprinzip* nimmt der Betrag $|f|$ einer nicht-konstanten holomorphen Funktion auf einem Gebiet G in keinem Punkt von G ein Maximum an.

(I) Entwicklung holomorpher Funktionen in Potenzreihen

(2.28) Lemma Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$, die gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiert. Dann gilt für jede in U verlaufende Kurve γ jeweils

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Beweis: Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Dann gibt es auf Grund der gleichmäßigen Konvergenz ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ für alle $z \in U$ und $n \geq N$ erfüllt ist. Nach (2.14) kann das Integral über $f_n - f$ betragsmäßig durch $\varepsilon \mathcal{L}(\gamma)$ abgeschätzt werden. Für alle $n \geq N$ gilt also

$$\left| \int_{\gamma} f_n(z) dz - \int_{\gamma} f(z) dz \right| = \left| \int_{\gamma} (f_n - f)(z) dz \right| \leq \varepsilon \mathcal{L}(\gamma). \quad \square$$

(2.29) Satz Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Sei außerdem $a \in U$ und $r = \sup\{s \in \mathbb{R}^+ \mid B_s(a) \subseteq U\}$. Dann gilt

- (i) Die Funktion ist auf der offenen Kreisscheibe $B_r(a)$ durch eine Potenzreihe definiert, für $z \in B_r(a)$ gilt also $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n$ mit einer geeigneten komplexen Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Für den Konvergenzradius ρ dieser Potenzreihe gilt $\rho \geq r$.
- (ii) Die Koeffizienten $a_n \in \mathbb{C}$ der Potenzreihe sind eindeutig bestimmt, genauer gilt $a_n = f^{(n)}(a)/(n!)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
- (iii) Ist $s \in \mathbb{R}^+$ mit $s < r$, dann sind die Koeffizienten a_n für alle $n \in \mathbb{N}_0$ auch durch die Integralformel

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_s(a)} \frac{f(w)}{(w - a)^{n+1}} dw \quad \text{gegeben.}$$

Beweis: Sei $s \in \mathbb{R}^+$ mit $s < r$. Dann gilt auf Grund der Cauchyschen Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_s(a)} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad \text{für alle } z \in B_s(a).$$

Sei nun $z \in B_s(a)$ fest gewählt. Dann ist der komplexe Absolutbetrag α der Zahl $(z-a)/(w-a)$ für alle $w \in \partial B_s(a)$ gleich, und es gilt $\alpha < 1$. Die geometrische Reihe liefert

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{w-a} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{z-a}{w-a}}$$

für alle $w \in \partial B_s(a)$. Ferner konvergiert die Reihe auf der linken Seite für alle w gleichmäßig gegen ihren jeweiligen Grenzwert, denn es existiert die von w unabhängige Abschätzung

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{z-a}{w-a} \right)^k \right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \alpha^k.$$

Weil die Funktion f stetig ist, ist sie auf $\partial B_s(a)$ beschränkt, ebenso die Funktion $w \mapsto f(w)/(w-a)$, und wegen

$$\frac{f(w)}{w-z} = \frac{1}{1 - \frac{z-a}{w-a}} \cdot \frac{f(w)}{w-a} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{w-a} \right)^n \right) \cdot \frac{f(w)}{w-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} f(w)$$

konvergiert auch diese Reihe gleichmäßig gegen ihren Grenzwert. Nach (2.28), angewendet auf die Partialsummen $f_n(w) = \sum_{k=0}^n \frac{(z-a)^k}{(w-a)^{k+1}} f(w)$ der Reihe, können wir das Kurvenintegral und die Summation vertauschen und erhalten

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_s(a)} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\partial B_s(a)} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} f(w) dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_s(a)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \right) (z-a)^n. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir die komplexen Zahlen in der großen Klammer hinter dem Summenzeichen jeweils mit a_n , dann gilt also

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad \text{für alle } z \in B_s(a).$$

Auf Grund von Gleichung (2.9) aus Abschnitt 2.4 gilt aber auch

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_s(a)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Dies zeigt, dass die Koeffizienten a_n von der Wahl von $s < r$ unabhängig sind. Auf diese Weise sieht man auch, dass die Potenzreihen-Entwicklung $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ sogar auf $B_r(a)$ gültig und der Konvergenzradius der Reihe also mindestens r beträgt. Es bleibt zu zeigen, dass die Koeffizientenfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eindeutig bestimmt ist. Durch wiederholte Differentiation der Potenzreihe erhält man

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n (z-a)^{n-k} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

Inbesondere gilt $f^{(k)}(a) = (k!)a_k$ und somit $a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$. Dies zeigt, dass die Koeffizienten a_k in einer beliebigen Potenzreihenentwicklung von f um a durch die Funktion f bereits eindeutig festgelegt sind. \square

(II) Der Identitätssatz

(2.30) Definition Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Eine Funktion f besitzt in einem Punkt $w \in \mathbb{C}$ eine **Nullstelle der Ordnung n** , wenn

$$f^{(k)}(w) = 0 \text{ für } 0 \leq k < n \quad \text{und} \quad f^{(n)}(w) \neq 0 \text{ gilt.}$$

Man sagt, ein Wert $a \in \mathbb{C}$ wird von f in w **mit Vielfachheit n** angenommen, wenn die Funktion $z \mapsto f(z) - a$ in w eine Nullstelle der Ordnung n besitzt. Von einer Nullstelle der Ordnung ∞ in w spricht man, wenn $f^{(n)}(w) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

(2.31) Proposition Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $w \in U$ und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $n \in \mathbb{N}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

- (i) Die Funktion f besitzt in w eine Nullstelle der Ordnung n .
- (ii) Es gibt ein $r \in \mathbb{R}^+$ und eine Folge $(a_k)_{k \geq n}$ komplexer Zahlen mit $a_n \neq 0$ und

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z-w)^k \quad \text{für alle } z \in B_r(w).$$

- (iii) Es gibt eine offene Umgebung V von w mit $V \subseteq U$ und eine holomorphe Funktion g auf V mit $g(w) \neq 0$ und $f(z) = (z-w)^n g(z)$ für alle $z \in V$.

Beweis: "(i) \Rightarrow (ii)" Sei $r \in \mathbb{R}^+$ so gewählt, das $B_r(w) \subseteq U$ gilt. Nach (2.29) besitzt f auf $B_r(w)$ eine Potenzreihen-Entwicklung $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-w)^k$. Auf Grund der Formel $a_k = f^{(k)}(w)/(k!)$ für die Ableitung einer Potenzreihe gilt $a_k = 0$ für $0 \leq k < n$ und $a_n \neq 0$.

"(ii) \Rightarrow (iii)" Sei g auf der offenen Umgebung $V = B_r(w)$ von w durch $g(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z-w)^{k-n}$ definiert. Dann ist g nach (2.10) auf $B_r(w)$ holomorph. Außerdem gilt $g(w) = a_n \neq 0$ und $f(z) = (z-w)^n g(z)$ für alle $z \in B_r(w)$.

"(iii) \Rightarrow (i)" Wir beweisen durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$: Ist $V \subseteq U$ eine offene Umgebung von w und f eine holomorphe Funktion auf V der Form $f(z) = (z-w)^n g(z)$, wobei g eine holomorphe Funktion auf V mit $g(w) \neq 0$ bezeichnet, dann ist w eine Nullstelle der Ordnung n von f . Im Fall $n = 0$ folgt aus der Voraussetzung direkt $f(w) \neq 0$, also braucht hier nichts gezeigt werden. Setzen wir nun die Aussage für n voraus, und sei $f(z) = (z-w)^{n+1} g(z)$ mit einer Funktion g wie angegeben. Dann gilt auf Grund der Produktregel

$$f'(z) = (n+1)(z-w)^n g(z) + (z-w)^{n+1} g'(z) = (z-w)^n ((n+1)g(z) + (z-w)g'(z)).$$

Die Funktion $h : V \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto (n+1)g(z) + (z-w)g'(z)$ ist holomorph, und es gilt

$$h(w) = (n+1)g(w) + (w-w)g'(w) = (n+1)g(w) \neq 0.$$

Wegen $f'(z) = (z-w)^n h(z)$ kann also die Induktionsvoraussetzung auf die Funktion $f'(z)$ angewendet werden. Wir erhalten $f^{(k)}(w) = 0$ für $1 \leq k \leq n$ und $f^{(n+1)}(w) \neq 0$. Außerdem ist offenbar $f^{(0)}(w) = f(w) = (w-w)^{n+1}g(w) = 0$ erfüllt. Also besitzt f in w eine Nullstelle der Ordnung $n+1$. \square

(2.32) Definition Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge. Eine Teilmenge $D \subseteq U$ wird **diskret** in U genannt, wenn es für jeden Punkt $w \in D$ eine Umgebung $V \subseteq U$ gibt, so dass $D \cap V = \{w\}$ erfüllt ist.

Umgekehrt ist eine Teilmenge $N \subseteq \mathbb{C}$ also nichtdiskret, wenn zumindest ein Punkt $w \in N$ die angegebene Bedingung verletzt. Dies bedeutet, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein von w verschiedener Punkt w_n in $B_{1/n}(w)$ existiert, der zugleich in $N \setminus \{w\}$ liegt. Es gibt also eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $N \setminus \{w\}$ mit $\lim_n z_n = w$.

(2.33) Satz (*Identitätssatz*)

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, und seien f und g holomorphe Funktionen auf G . Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (i) $f = g$
- (ii) Es gibt einen Punkt $w \in G$, so dass die Funktion $h = f - g$ in w eine Nullstelle unendlicher Ordnung besitzt.
- (iii) Es gibt eine nicht-diskrete Teilmenge $N \subseteq G$ mit $f|_N = g|_N$.

Beweis: "(i) \Rightarrow (iii)" Die Menge G ist nichtdiskret, denn jede Umgebung eines Punktes $w \in G$ enthält eine Menge der Form $B_r(w)$ mit einem geeigneten $r \in \mathbb{R}^+$, und $B_r(w)$ enthält neben w noch unendlich viele weitere Punkte. Also ist die Aussage (iii) mit $N = G$ erfüllt.

"(iii) \Rightarrow (ii)" Sei $N \subseteq G$ eine nichtdiskrete Teilmenge mit $f|_N = g|_N$. Dann existiert ein Punkt $w \in N$ und eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $N \setminus \{w\}$ mit $\lim_n z_n = w$. Wir zeigen nun, dass die Funktion $h = f - g$ in diesem Punkt w eine Nullstelle unendlicher Ordnung besitzt. Nach Voraussetzung gilt $h(z_n) = f(z_n) - g(z_n) = f(z_n) - f(z_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nehmen wir an, die Nullstellenordnung m in w ist nur endlich (möglicherweise gleich Null). Dann gibt es nach (2.31) eine offene Umgebung $W \subseteq G$ von w und eine holomorphe Funktion u auf W mit $u(w) \neq 0$ und $h(z) = (z-w)^m u(z)$ für alle $z \in W$. Als holomorphe Funktion ist u insbesondere im Punkt w stetig. Es folgt

$$u(w) = \lim_{n \rightarrow \infty} u(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h(z_n)}{(z_n - w)^m} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0}{(z_n - w)^m} = 0$$

im Widerspruch zur Annahme. Also muss die Nullstellenordnung von h in w unendlich sein.

"(ii) \Rightarrow (i)" Nach Voraussetzung besitzt h im Punkt w eine Nullstelle unendlicher Ordnung; zu zeigen ist $h = 0$. Dazu betrachten wir für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die Menge

$$M_n = \{z \in G \mid h^{(n)}(z) = 0\}$$

und setzen $M = \bigcap_{n=0}^{\infty} M_n$. Nach Voraussetzung gilt $w \in M$. Als Urbild der einelementigen Menge $\{0\}$ unter der stetigen Abbildung $h^{(n)}$ sind die Mengen M_n alle abgeschlossen, also ist auch M .

Wir zeigen, dass M andererseits auch offen ist. Sei dazu $v \in M$ ein beliebig gewählter Punkt und $r \in \mathbb{R}^+$ so gewählt, dass h auf $B_r(v)$ die Potenzreihen-Entwicklung $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-v)^n$ besitzt. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $v \in M_n$, also $h^{(n)}(v) = 0$ und somit auch $a_n = \frac{h^{(n)}(v)}{n!} = 0$. Dies zeigt, dass h auf der Menge $B_r(v)$ konstant Null ist, und es folgt $B_r(v) \subseteq M$.

Damit ist die Offenheit von M bewiesen. Insgesamt ist M also eine nichtleere, offene und zugleich abgeschlossene Teilmenge von G . Weil G als Gebiet zusammenhängend ist, folgt daraus $M = G$ und somit auch $M_0 = G$. Dies zeigt, dass die Funktion h auf G konstant Null ist. Aus $h = 0$ folgt wiederum $f = g$. \square

(III) Satz von Liouville und Fundamentalsatz der Algebra

(2.34) Satz (Cauchysche Ungleichungen)

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$, $a \in U$ und $r \in \mathbb{R}^+$ mit $B_r(a) \subseteq U$, so dass die Funktion f auf $B_r(a)$ die Potenzreihen-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

besitzt. Setzen wir $m = \max\{|f(z)| \mid z \in \partial B_r(a)\}$, dann gilt $|a_n| \leq \frac{m}{r^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis: Nach (2.29) erhält man die Koeffizienten der Potenzreihen-Entwicklung durch die Formel

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Der Betrag des Integranden kann durch $mr^{-(n+1)}$ abgeschätzt werden, und der Integrationsweg hat die Länge $2\pi r$. Mit (2.14) erhalten wir $|a_n| \leq 2\pi r \cdot (2\pi)^{-1} mr^{-(n+1)} = mr^{-n}$. \square

Für die Formulierung des nächsten Satzes definieren wir folgenden Begriff: Eine **ganze Funktion** ist eine holomorphe Funktion mit Definitionsbereich \mathbb{C} .

(2.35) Satz (Satz von Liouville)

Eine ganze Funktion f mit der Eigenschaft, dass ihr Wertebereich $f(\mathbb{C})$ als Teilmenge von \mathbb{C} beschränkt ist, ist konstant.

Beweis: Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ die Potenzreihen-Entwicklung von f um den Nullpunkt. Weil f auf ganz \mathbb{C} holomorph ist, besitzt die Potenzreihe nach (2.29) einen unendlichen Konvergenzradius. Ist nun $f(\mathbb{C})$ beschränkt, dann ist $m = \sup\{|f(z)| \mid z \in \mathbb{C}\}$ ein endlicher Wert. Nach (2.34) gilt $|a_n| \leq mr^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $r \in \mathbb{R}^+$. Weil r beliebig groß gewählt werden kann, folgt daraus $a_n = 0$ für alle $n \geq 1$. Weil die Potenzreihen-Entwicklung auf ganz \mathbb{C} gültig ist, gilt also $f(z) = a_0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. \square

(2.36) Satz (Fundamentalsatz der Algebra)

Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine nicht-konstante Polynomfunktion, also eine Funktion der Form

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

wobei $n \geq 1$, $a_k \in \mathbb{C}$ für $0 \leq k \leq n$ und $a_n \neq 0$ ist. Dann besitzt f eine Nullstelle in \mathbb{C} .

Beweis: Nehmen wir an, die Funktion f besitzt auf ganz \mathbb{C} keine Nullstelle. Dann ist $g(z) = f(z)^{-1}$ eine ganze Funktion. Wir zeigen, dass der Wertebereich $g(\mathbb{C})$ von g beschränkt ist. Definieren wir die Funktion $h : \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$h(z) = \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n},$$

dann gilt $f(z) = z^n(a_n + h(z))$ für alle $z \in \mathbb{C}^\times$. Die einzelnen Summanden von h konvergieren für $|z| \rightarrow \infty$ gegen Null. Es gibt also ein $r \in \mathbb{R}^+$ mit $|h(z)| \leq \frac{1}{2}|a_n|$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > r$. Daraus folgt $|f(z)| \geq \frac{1}{2}|a_n|r^n$ und $|g(z)| \leq 2|a_n|^{-1}r^{-n}$ für alle z außerhalb von $\bar{B}_r(0)$. Als stetige Funktion ist g auf der kompakten Menge $\bar{B}_r(0)$ ebenfalls beschränkt, insgesamt also auf ganz \mathbb{C} . Nach (2.35) von Liouville wäre g damit konstant, also auch die Funktion f . Aber wegen $n \geq 1$ und $a_n \neq 0$ ist f offensichtlich nicht konstant. Unsere Annahme hat also zu einem Widerspruch geführt, und folglich besitzt f eine Nullstelle. \square

Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass jede Polynomfunktion f vom Grad n mit einer Nullstelle $a \in \mathbb{C}$ in der Form $f(z) = (z-a)g(z)$ geschrieben werden kann, wobei g eine Polynomfunktion vom Grad $n-1$ bezeichnet. Durch vollständige Induktion über n kann so leicht gezeigt werden, dass jede komplexe Polynomfunktion in Linearfaktoren zerfällt.

(IV) Gebietstreue und Maximumsprinzip

Die Cauchyschen Ungleichungen beschränken den Wert $f(a)$ einer holomorphen Funktion im Mittelpunkt w einer Kreisscheibe $\bar{B}_r(w)$ durch die Werte auf dem Rand. Dies bedeutet auch, dass die Funktion $z \mapsto f(z)^{-1}$, sofern f auf $\bar{B}_r(w)$ nicht verschwindet, im Mittelpunkt w nicht zu klein werden darf. Diese Überlegung liefert ein Kriterium für Nullstellen holomorpher Funktionen.

(2.37) Lemma Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $w \in U$ und $r \in \mathbb{R}^+$ mit $\bar{B}_r(w) \subseteq U$. Sei außerdem $m = \min\{|f(z)| \mid z \in \partial B_r(w)\}$. Gilt nun $|f(w)| < m$, dann besitzt f in $B_r(w)$ eine Nullstelle.

Beweis: Ist die Ungleichung $|f(w)| < m$ erfüllt, dann ist f auf dem Rand $\partial B_r(w)$ ungleich Null. Die Menge $V = \{z \in U \mid f(z) \neq 0\}$ ist offen. Besitzt f auch in $B_r(w)$ keine Nullstelle, dann gilt insgesamt $\bar{B}_r(w) \subseteq V$, und nach (2.24) gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, so dass auch $B_{r+\varepsilon}(w)$ noch in V liegt. Dies bedeutet, dass $g(z) = f(z)^{-1}$ auf $B_{r+\varepsilon}(w)$ eine holomorphe Funktion ist. Sei nun

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-w)^n$$

die Potenzreihen-Entwicklung von g um den Punkt w . Es gilt $|g(z)| \leq m^{-1}$ für alle $z \in \partial B_r(w)$, aus den Cauchyschen Ungleichungen (2.34) folgt damit $|g(w)| = |a_0| \leq m^{-1}$. Wir erhalten $|f(w)| = |g(w)|^{-1} \geq m$, im Widerspruch zur Voraussetzung. \square

(2.38) Satz (Satz von der Gebietstreue)

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine nicht-konstante, holomorphe Funktion. Dann ist auch die Bildmenge $f(G)$ ein Gebiet in \mathbb{C} .

Beweis: Aus der Analysis mehrerer Variablen ist bekannt, dass das Bild einer zusammenhängenden Menge unter einer stetigen Abbildung wieder zusammenhängend ist. Also ist $f(G) \subseteq \mathbb{C}$ zusammenhängend. Zum Nachweis der Offenheit sei $a \in f(G)$ beliebig vorgegeben und $w \in G$ mit $f(w) = a$. Auf Grund des Identitätssatzes (2.33) wird der Wert a von f nur auf einer diskreten Teilmenge von G angenommen, denn ansonsten wäre f auf G konstant gleich a . Insbesondere gibt es also ein $r \in \mathbb{R}^+$, so dass $\bar{B}_r(w) \subseteq G$ gilt und $f|_{\bar{B}_r(w)}$ den Wert a nur im Punkt w annimmt.

Wir zeigen nun, dass ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(a) \subseteq f(\bar{B}_r(w)) \subseteq f(G)$ existiert und beweisen damit die Offenheit von $f(G)$. Die Funktion $z \mapsto |f(z) - a|$ nimmt auf $\partial B_r(w)$ ein Minimum an, und dieses ist positiv. Es gibt also ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $|f(z) - a| \geq 2\varepsilon$ für alle $z \in \partial B_r(w)$. Sei nun $b \in B_\varepsilon(a)$ vorgegeben und $g(z) = f(z) - b$ für alle $z \in \bar{B}_r(w)$. Dann gilt für alle $z \in \partial B_r(w)$ einerseits die Ungleichung $|f(z) - a| \leq |f(z) - b| + |b - a|$ und somit

$$|g(z)| = |f(z) - b| \geq |f(z) - a| - |b - a| \geq 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon,$$

also ist $\min\{|g(z)| \mid z \in \partial B_r(w)\} \geq \varepsilon$. Andererseits ist $|g(w)| = |f(w) - b| = |a - b| < \varepsilon$. Nach (2.37) hat die Funktion $g(z) = f(z) - b$ damit in $B_r(w)$ eine Nullstelle. Es gibt also ein $z \in B_r(w)$ mit $b = f(z)$, somit ist $b \in f(B_r(w))$ und insgesamt $B_\varepsilon(a) \subseteq f(B_r(w))$. \square

(2.39) Satz (Maximumsprinzip)

Sei G ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Wenn der Betrag $|f|$ von f in einem Punkt $a \in G$ ein lokales Maximum besitzt, dann ist f auf G konstant.

Beweis: Angenommen, $a \in G$ ist ein lokales Maximum von $|f|$. Dann gibt es ein $r \in \mathbb{R}^+$, so dass $|f(a)| \geq |f(z)|$ für alle $z \in B_r(a)$ erfüllt ist. Die offene Kreisscheibe $B_r(a)$ ist ein Gebiet in \mathbb{C} . Ist die Funktion f nicht-konstant, so kann (2.38) von der Gebietstreue angewendet werden, und folglich ist auch $f(B_r(a)) \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dies bedeutet, dass eine offene Umgebung von $f(a)$ in $f(B_r(a))$ enthalten ist. Insbesondere gibt es Punkte $w \in f(B_r(a))$ mit $|w| > |f(a)|$, im Widerspruch zur vorherigen Feststellung. Also ist f auf G konstant. \square

2.6 Isolierte Singularitäten

Inhaltsübersicht

- ☆ Verallgemeinerung von Cauchyschem Integralsatz und Cauchyscher Integralformel auf Kreisringe
- ☆ Laurentreihenentwicklung holomorpher Funktionen auf Kreisringen
- ☆ Klassifikation isolierter Singularitäten: hebbare Singularität, Polstelle, wesentliche Singularität
- ☆ Erkennung des Singularitätentyps an der Laurentreihenentwicklung

(2.40) Definition Seien $a \in \mathbb{C}$ und $r, s \in \mathbb{R}^+$ mit $r < s$. Dann ist der **Kreisring** um a mit den Radien r und s definiert durch $K_{r,s}(a) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - a| < s\}$.

Bei der Definition soll für r auch der Wert Null und für s der Wert $+\infty$ zugelassen werden. Für $r \in \mathbb{R}^+$ setzen wir $K_{0,r}(a) = B_r(a) \setminus \{a\}$, und außerdem $K_{r,+\infty}(a) = \mathbb{C} \setminus \bar{B}_r(a)$.

(2.41) Satz (Cauchyscher Integralsatz für Kreisringe)

Sei $a \in \mathbb{C}$ und $K = K_{r,s}(a)$ mit $0 \leq r < s \leq +\infty$. Dann gilt für alle $\rho, \sigma \in \mathbb{R}^+$ mit $r < \rho < \sigma < s$ und jede holomorphe Funktion $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ jeweils

$$\int_{\partial B_\sigma(a)} f(z) dz - \int_{\partial B_\rho(a)} f(z) dz = 0.$$

Beweis: Es gilt $f(z) = \frac{g(z)}{z-a}$ mit einer auf K holomorphen Funktion g . Wenn wir zeigen können, dass die Funktion $J :]r, s[\rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch

$$J(c) = \int_{\partial B_c(a)} \frac{g(z)}{z-a} dz$$

konstant ist, dann folgt insbesondere $J(\rho) = J(\sigma)$, und die Aussage ist bewiesen. Definieren wir jeweils $\gamma_c : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ durch $\gamma_c(t) = a + ce^{it}$, dann gilt nach Definition des Kurvenintegrals

$$J(c) = \int_0^{2\pi} \frac{(g \circ \gamma_c)(t)}{ce^{it}} i c e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} g(a + ce^{it}) dt.$$

Die Voraussetzungen des Satzes (1.48) über die Vertauschbarkeit von Integration und Differentiation sind erfüllt, somit gilt

$$\begin{aligned} J'(c) &= i \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial c} (g(a + ce^{it})) dt = i \int_0^{2\pi} e^{it} g'(a + ce^{it}) dt \\ &= \frac{i}{c} \int_0^{2\pi} ce^{it} g'(a + ce^{it}) dt = \frac{i}{c} \int_{\partial B_c(a)} g'(z) dz. \end{aligned}$$

Dabei wurde im zweiten Schritt die mehrdimensionale Kettenregel verwendet sowie die Tatsache, dass die totale Ableitung von g im Punkt $a+ce^{it}$ durch Multiplikation mit der komplexen Ableitung $g'(a+ce^{it})$ gegeben ist, wie in (2.7) gezeigt wurde. Weil g' die Funktion g als komplexe Stammfunktion besitzt, ist das Integral nach (2.17) gleich Null, es gilt also $J'(c) = 0$ für alle $c \in]r, s[$. Somit ist J auf seinem gesamten Definitionsbereich konstant. \square

Wie beim Cauchyschen Integralsatz für konvexe Gebiete kann auf die Holomorphie von f in einem Punkt $z \in K$ verzichtet werden, wenn man die Stetigkeit von f auf ganz K fordert. Wendet man nämlich (2.20) auf eine konvexe offene Umgebung G dieses Punktes z an, so erhält man eine komplexe Stammfunktion von $f|_G$, und aus (2.27) folgt daraus die Holomorphie von f auf ganz G , insbesondere im Punkt z . Allgemein zeigt diese Überlegung

(2.42) Proposition Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z \in U$ und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige, auf $U \setminus \{z\}$ holomorphe Funktion, dann ist f auf ganz U holomorph.

Nach dem Cauchyschen Integralsatz formulieren wir nun noch eine Variante der Cauchyschen Integralformel.

(2.43) Satz (Cauchysche Integralformel für Kreisringe)

Sei $a \in \mathbb{C}$, $K = K_{r,s}(a)$ mit $0 \leq r < s \leq +\infty$. Dann gilt für alle $\rho, \sigma \in \mathbb{R}^+$ mit $r < \rho < \sigma < s$, jede holomorphe Funktion $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ und jeden Punkt $z \in K$ mit $\rho < |z - a| < \sigma$ jeweils

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\sigma(a)} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(a)} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Beweis: Sei $z \in K$ mit $\rho < |z - a| < \sigma$ vorgegeben. Wir definieren die Funktion $g : K \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$g(w) = \begin{cases} \frac{f(w) - f(z)}{w-z} & \text{für } w \neq z \\ f'(z) & \text{für } w = z. \end{cases}$$

Offenbar ist g auf K stetig und auf $K \setminus \{z\}$ holomorph. Nach (2.42) ist g also eine holomorphe Funktion auf ganz K . Wir können den Cauchyschen Integralsatz für Kreisringe (2.41) anwenden und erhalten damit

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_\rho(a)} \frac{f(w)}{w-z} dw - f(z) \int_{\partial B_\rho(a)} \frac{dw}{w-z} &= \int_{\partial B_\rho(a)} g(w) dw = \int_{\partial B_\sigma(a)} g(w) dw \\ &= \int_{\partial B_\sigma(a)} \frac{f(w)}{w-z} dw - f(z) \int_{\partial B_\sigma(a)} \frac{dw}{w-z}. \end{aligned}$$

Das Integral $\int_{\partial B_\rho(a)} \frac{dw}{w-z}$ ist gleich Null, denn der Punkt z liegt außerhalb der Kreisscheibe $\bar{B}_\rho(a)$, so dass der Cauchysche Integralsatz für konvexe Gebiete auf die Funktion $w \mapsto \frac{1}{w-z}$ angewendet werden kann. Die ursprüngliche Fassung der Cauchyschen Integralformel, angewendet auf die konstante Funktion $w \mapsto 1$, liefert wegen $z \in B_\sigma(a)$ außerdem $\int_{\partial B_\sigma(a)} \frac{dw}{w-z} = 2\pi i$. Damit erhalten wir

$$\int_{\partial B_\rho(a)} \frac{f(w)}{w-z} dw - f(z) \cdot 0 = \int_{\partial B_\sigma(a)} \frac{f(w)}{w-z} dw - 2\pi i f(z),$$

was zur gewünschten Gleichung umgestellt werden kann. \square

Wir untersuchen nun den Aufbau holomorpher Funktionen auf Kreisringen.

(2.44) Satz (Satz über holomorphe Funktionen auf Kreisringen)

Seien $a \in \mathbb{C}$, die Menge K und die Zahlen r, s wie in den beiden vorherigen Sätzen definiert und $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann gibt es holomorphe Funktionen

$$f_h : K_{r,+\infty}(a) \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{und} \quad f_n : B_s(a) \longrightarrow \mathbb{C}$$

so dass $f = f_h + f_n$ auf $K = K_{r,+\infty}(a) \cap B_s(a)$ erfüllt ist und außerdem

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |f_h(z)| = 0$$

gilt. Die Funktionen f_h und f_n sind durch diese Bedingungen eindeutig festgelegt. Man nennt f_h den **Haupt-** und f_n den **Nebenteil** der Funktion f .

Beweis: Zunächst definieren wir für jedes $\rho \in \mathbb{R}^+$ mit $r < \rho < s$ eine Funktion $f_{n,\rho} : B_\rho(a) \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$f_{n,\rho}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(a)} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Seien nun $\rho, \sigma \in \mathbb{R}^+$ mit $r < \rho < \sigma < s$. Dann $f_{n,\rho}(z) = f_{n,\sigma}(z)$ für alle $z \in B_\rho(a)$ nach (2.41). Wir können also eine holomorphe Funktion $f_n : B_s(a) \rightarrow \mathbb{C}$ für $z \in B_s(a)$ durch $f_n(z) = f_{n,\rho}(z)$ definieren, wobei $\rho \in \mathbb{R}^+$ mit $\max\{r, |z-a|\} < \rho < s$ beliebig gewählt werden kann; der Wert $f_n(z)$ ist von dieser Wahl unabhängig. Für jedes $\rho \in \mathbb{R}^+$ mit $r < \rho < s$ definieren wir für $z \in K_{\rho,+\infty}(a)$ ebenso

$$f_{h,\rho}(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(a)} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Wiederum auf Grund des Cauchyschen Integralsatzes für Kreisringe gilt $f_{h,\rho}(z) = f_{h,\sigma}(z)$ für $z \in B_\rho(a)$ und $r < \rho < \sigma < s$. Also kann $f_h : K_{r,+\infty}(a) \rightarrow \mathbb{C}$ definiert werden durch $f_h(z) = f_{h,\rho}(z)$, wobei $\rho \in \mathbb{R}^+$ mit $r < \rho < \min\{s, |z-a|\}$ beliebig gewählt wurde. Die Funktion f ist auf $\partial B_\rho(a)$ beschränkt, und der Nenner kann durch $|w-z| = |z-w| \geq |z|-|w|$ nach unten abgeschätzt werden. Für $|z| \rightarrow +\infty$ konvergiert der Integrand $\frac{f(w)}{w-z}$ somit gleichmäßig gegen Null, und mit (2.28) erhalten wir

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} f_h(z) = 0.$$

Wir beweisen nun die Gleichung $f(z) = f_h(z) + f_n(z)$ für $z \in K_{r,s}(a)$. Sei also $z \in K_{r,s}(a)$ vorgegeben, und seien $\rho, \sigma \in \mathbb{R}^+$ mit $r < \rho < |z-a| < \sigma < s$. Zu zeigen ist

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\sigma(a)} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(a)} \frac{f(w)}{w-z} dw,$$

aber dies ist genau die Gleichung aus der Cauchyschen Integralformel (2.43) für Kreisringe. Zum Schluss beweisen wir die Eindeutigkeit der Zerlegung. Sei $f = g_h + g_n$ eine beliebige Zerlegung von f in holomorphe Funktionen $g_h : B_{r,+\infty}(a) \rightarrow \mathbb{C}$ und $g_n : B_s(a) \rightarrow \mathbb{C}$, wobei wir auch

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} g_h(z) = 0 \quad \text{voraussetzen.}$$

Dann gilt $f_h - g_h = g_n - f_n$ auf $K_{r,s}(a)$. Definieren wir $u = f_h - g_h$ auf $B_{r,+\infty}(a)$ und $u = g_n - f_n$ auf $B_s(a)$, dann ist u eine ganze Funktion mit $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} u(z) = 0$. Also ist u auf \mathbb{C} beschränkt. Nach dem Satz von Liouville (2.35) ist u konstant, und auf Grund des Grenzwerts für $|z| \rightarrow +\infty$ kommt als konstanter Wert nur Null in Frage. Es folgt $f_h = g_h$ auf $B_{r,+\infty}(a)$ und $f_n = g_n$ auf $B_s(a)$. \square

(2.45) Satz (Laurentreihenentwicklung holomorpher Funktionen auf Kreisringen)

Eine auf dem Kreisring $K = K_{r,s}(a)$ holomorphe Funktion besitzt eine auf dem gesamten Definitionsbereich gültige Reihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n.$$

Eine solche Reihe wird **Laurentreihe** genannt. Die Familie $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ komplexer Zahlen ist durch f eindeutig bestimmt. Dabei sind Neben- und Hauptteil von f gegeben durch

$$f_h(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-a)^n \quad \text{und} \quad f_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n.$$

Beweis: Der Nebenteil f_n ist eine holomorphe Funktion auf $B_s(a)$ und kann somit nach (2.29) in eine Potenzreihe

$$f_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

entwickelt werden, die auf ganz $B_s(a)$ konvergiert. Für eine Reihendarstellung des Hauptteils f_h verwenden wir die bijektive Abbildung $j : K_{r,+\infty}(a) \rightarrow K_{0,r^{-1}}(0)$, $z \mapsto (z-a)^{-1}$, mit der Umkehrabbildung $j^{-1} : K_{0,r^{-1}}(0) \rightarrow K_{r,+\infty}(a)$ gegeben durch $j^{-1}(w) = a + \frac{1}{w}$. Aus

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} f_h(z) = 0 \quad \text{folgt dann} \quad \lim_{|w| \rightarrow 0} (f_h \circ j^{-1})(w) = 0.$$

Die Funktion $f_h \circ j^{-1}$ kann also stetig auf $B_{r^{-1}}(0)$ fortgesetzt werden, und wegen (2.42) ist diese Fortsetzung sogar holomorph. Folglich existiert nach (2.29) eine auf $B_{r^{-1}}(0)$ konvergente Potenzreihenentwicklung

$$(f_h \circ j^{-1})(w) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n w^n.$$

die für alle $w \in B_{r^{-1}}(0)$ gültig ist. Für alle $z \in K_{r,+\infty}(a)$ folgt nun

$$f_h(z) = (f_h \circ j^{-1})(j(z)) = (f_h \circ j^{-1})((z-a)^{-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-a)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} b_{-n} (z-a)^n.$$

Definieren wir $a_{-n} = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann erhalten wir also $f_h(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-a)^n$ wie gewünscht. Zum Nachweis der Eindeutigkeit sei $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ eine weitere Folge mit der Eigenschaft

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n \quad \text{für alle } z \in K_{r,s}(a).$$

Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ auf ganz $B_s(a)$ und $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ auf der gesamten Menge $K_{r,+\infty}(a)$, außerdem gilt

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

für alle $z \in K_{r,s}(a)$. Zudem geht die erste Reihe offenbar für $|z| \rightarrow +\infty$ gegen Null. Nach (2.44) muss also $f_h(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n$ für alle $z \in K_{r,+\infty}(a)$ und $f_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ für alle $z \in B_s(a)$ gelten. Aus der Eindeutigkeit der Potenzreihenentwicklung und

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n = f_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

folgt $c_n = a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Für jedes $w \in K_{0,r-1}$ gilt außerdem

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}w^n = (f_h \circ j^{-1})(w) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}w^n.$$

Wie wir bereits oben festgestellt haben, kann die Funktion $f_h \circ j^{-1}$ auf $B_{r-1}(0)$ holomorph fortgesetzt werden. Da die Potenzreihen links und rechts auf $B_{r-1}(0)$ konvergieren und dort somit ebenfalls holomorphe (und insbesondere stetige) Funktionen definieren, zeigt der Grenzübergang $z \rightarrow 0$, dass die Gleichung $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}w^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}w^n$ für alle $w \in B_{r-1}(0)$ gültig ist. Eine erneute Anwendung der Eindeutigkeit der Potenzreihenentwicklung holomorpher Funktionen liefert $a_{-n} = c_{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, insgesamt also $a_n = c_n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. \square

Es sei noch bemerkt, dass die Koeffizienten a_n durch die Formel

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(a)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}, \quad r < \rho < s \quad (2.10)$$

berechnet werden können. Dies verallgemeinert die Gleichung für alle $n \in \mathbb{N}_0$ aus (2.29) (iii). Zunächst zeigt man, dass die Gleichung für $n \in \mathbb{N}_0$ in dieser Situation gültig bleibt, indem man nachweist, dass der Hauptteil von f für diese n keinen Beitrag zum Integral liefert. Anschließend führt man den Fall $n < 0$ auf den Fall $n \geq 0$ zurück, indem man f mit einer geeigneten Potenz von $z-a$ multipliziert. Wir behandeln die Details in den Übungen.

(2.46) Definition Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine Teilmenge. Ein Punkt $z \in D$ wird als *isolierter Punkt* von D bezeichnet, wenn eine Umgebung V von z in \mathbb{C} mit $V \cap D = \{z\}$ existiert.

Eine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{C}$ ist also genau dann diskret, wenn sie nur aus isolierten Punkten besteht.

(2.47) Definition Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Einen isolierten Punkt a der Menge $\mathbb{C} \setminus U$ nennt man eine *isolierte Singularität*. Genauer bezeichnet man a als

- (i) *hebbar*, wenn $f|_{V \cap U}$ für eine Umgebung $V \subseteq \mathbb{C}$ von a beschränkt ist,
- (ii) *Polstelle*, wenn $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = +\infty$ gilt, und als
- (iii) *wesentliche Singularität*, wenn sie weder hebbar noch eine Polstelle ist.

(2.48) Satz (Riemannscher Hebbarkeitssatz)

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Eine isolierte Singularität a ist genau dann hebbar, wenn f auf $U \cup \{a\}$ holomorph fortsetzbar ist.

Beweis: “ \Leftarrow ” Sei $V \subseteq \mathbb{C}$ eine kompakte Umgebung von a mit $V \cap (\mathbb{C} \setminus U) = \{a\}$. Dann gilt $V \subseteq U \cup \{a\}$. Sei \hat{f} die holomorphe Fortsetzung von f auf $U \cup \{a\}$. Als stetige Funktion ist \hat{f} auf V beschränkt. Somit ist auch die Funktion f auf $V \cap U$ beschränkt.

“ \Rightarrow ” Sei $V \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Umgebung von a mit $V \cap (\mathbb{C} \setminus U) = \{a\}$. Wiederum gilt $V \subseteq U \cup \{a\}$. Wir definieren eine Funktion $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$g(z) = \begin{cases} (z-a)f(z) & \text{für } z \in V \cap U \\ 0 & \text{für } z = a. \end{cases}$$

Die Funktion g ist stetig in a , weil f nach Voraussetzung auf der Menge $V \cap U$ beschränkt ist. Da g auf $V \cap U$ holomorph und in a stetig ist, ist sie nach (2.42) auf V holomorph. Nach Definition der komplexen Differenzierbarkeit ist nun durch

$$h(z) = \begin{cases} \frac{g(z) - g(a)}{z - a} & \text{für } z \neq a \\ g'(z) & \text{für } z = a \end{cases}$$

eine Funktion auf $U \cup \{a\}$ definiert, die auf U holomorph und in a stetig ist. Nochmalige Anwendung von (2.42) zeigt, dass h auf $U \cup \{a\}$ holomorph ist. Außerdem stimmen h und f auf U überein. Damit ist gezeigt, dass f eine holomorphe Fortsetzung auf $U \cup \{a\}$ besitzt. \square

(2.49) Satz Ist $a \in \mathbb{C}$ eine Polstelle von f , dann gibt es eine Umgebung $V \subseteq \mathbb{C}$ von a mit $V \cap (\mathbb{C} \setminus U) = \{a\}$, eine eindeutig bestimmte Zahl $n \in \mathbb{N}$ und eine holomorphe Funktion $h : V \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$h(a) \neq 0 \quad \text{und} \quad f(z) = (z-a)^{-n}h(z) \quad \text{für alle } z \in V \setminus \{a\}.$$

Man bezeichnet die Zahl n als die **Ordnung** der Polstelle a .

Beweis: Wir wählen die Umgebung V von a so klein, dass $V \cap (\mathbb{C} \setminus U) = \{a\}$ gilt und f auf $V \setminus \{a\}$ auch keine Nullstelle besitzt. Dann ist die Funktion $g(z) = f(z)^{-1}$ auf $V \setminus \{a\}$ holomorph, und aus $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = +\infty$ folgt

$$\lim_{z \rightarrow a} g(z) = 0.$$

Also kann g in a durch $g(a) = 0$ stetig fortgesetzt werden. Nach (2.42) ist diese Fortsetzung holomorph. Sei nun $n \in \mathbb{N}$ die Nullstellenordnung von g in a . Dann gibt es nach (2.31) (iii) eine holomorphe Funktion \tilde{h} auf V mit $g(z) = (z-a)^n \tilde{h}(z)$ und $\tilde{h}(a) \neq 0$. Durch eventuelle Verkleinerung von V können wir $\tilde{h}(z) \neq 0$ für alle $z \in V$ annehmen. Es folgt dann

$$f(z) = (z-a)^{-n}h(z) \quad \text{mit} \quad h(z) = \tilde{h}(z)^{-1} \quad \text{für alle } z \in V \setminus \{a\}.$$

Zum Beweis der Eindeutigkeit nehmen wir an, dass $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $n_1 < n_2$ und holomorphe Funktionen h_1, h_2 auf V mit $h_1(a), h_2(a) \neq 0$ und

$$(z - a)^{-n_1} h_1(z) = f(z) = (z - a)^{-n_2} h_2(z) \quad \text{für } z \in V \setminus \{a\}$$

existieren. Dann gilt $(z - a)^{n_2 - n_1} h_1(z) = h_2(z)$ für alle $z \in V \setminus \{a\}$, und auf Grund des Identitätssatzes (2.33) ist die Gleichung auch in $z = a$ erfüllt. Es folgt $h_2(a) = (a - a)^{n_2 - n_1} h_1(a) = 0$ im Widerspruch zu den Voraussetzungen. \square

(2.50) Definition Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge. Eine *meromorphe Funktion* auf U ist eine holomorphe Funktion $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ auf einer offenen Teilmenge $V \subseteq U$ mit der Eigenschaft, dass die Punkte in $U \setminus V$ alle Polstellen, also insbesondere isolierte Singularitäten, der Funktion f sind.

Beispielsweise sind $\mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^{-1}$ und $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{z(z-1)}$ meromorphe Funktionen auf \mathbb{C} . Jede holomorphe Funktion $U \rightarrow \mathbb{C}$ auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ ist nach Definition auf U auch meromorph.

(2.51) Satz Sei $a \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität von $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, und seien r, s positive reelle Zahlen mit $r < s$ und $K_{r,s}(a) \subseteq U$. Sei ferner

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - a)^n$$

die Laurentreihen-Entwicklung von f auf dem Kreisring $K_{r,s}(a)$.

- (i) Die Singularität a ist genau dann hebbbar, wenn $a_n = 0$ für alle $n < 0$ gilt.
- (ii) Sie ist eine Polstelle der Ordnung n genau dann, wenn $a_{-n} \neq 0$ und $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ mit $k < -n$ gilt.
- (iii) Sie ist genau dann eine wesentliche Singularität, wenn $a_n \neq 0$ für unendlich viele negative Zahlen $n \in \mathbb{Z}$ erfüllt ist.

Beweis: zu (i) Ist a eine hebbare Singularität, dann kann f auf $B_s(a)$ holomorph fortgesetzt werden. Dies bedeutet, dass f auf $K_{r,s}(a)$ mit seinem Nebenteil übereinstimmt, und dass der Hauptteil verschwindet. Auf Grund der Holomorphie von f auf $B_s(a)$ besitzt f auf der Kreisscheibe $B_s(a)$ und damit erst recht auf $K_{r,s}(a)$ eine Potenzreihenentwicklung. Daraus folgt $a_n = 0$ für alle $n < 0$. Umgekehrt liefert im Fall $a_n = 0$ und $n < 0$ die Potenzreihenentwicklung eine holomorphe Fortsetzung von f auf $B_s(a)$, insbesondere eine holomorphe Fortsetzung im Punkt a , woraus sich die Hebbbarkeit von a ergibt.

zu (ii) Besitzt die Funktion f in a eine Polstelle der Ordnung n , dann gibt es nach (2.49) eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{C}$ von a mit $V \cap (\mathbb{C} \setminus U) = \{a\}$ und eine holomorphe Funktion $h : V \rightarrow \mathbb{C}$ mit $h(a) \neq 0$ und $f(z) = (z - a)^{-n} h(z)$ für alle $z \in V \setminus \{a\}$. Sei $h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - a)^k$ die Potenzreihenentwicklung von h in einer Umgebung des Punktes a . Durch eventuelle Verkleinerung von V können wir annehmen, dass sie auf ganz V gültig ist; dabei gilt $b_0 = h(a) \neq 0$. Für die Funktion f erhalten wir die Darstellung $f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} b_{k+n} (z - a)^k$.

Aus der Eindeutigkeit der Laurentreihenentwicklung von f auf $K_{r,s}(a)$ folgt $a_k = b_{k+n}$ für alle $k \geq -n$ und $a_k = 0$ für alle $k < 0$. Außerdem ist $a_{-n} = b_0 \neq 0$.

Setzen wir umgekehrt voraus, dass f auf dem Kreisring $K_{r,s}(a)$ eine Laurentreihenentwicklung der Form $f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k(z-a)^k$ mit $a_{-n} \neq 0$ besitzt, dann können wir in einer Umgebung von a die holomorphe Funktion $h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-n}(z-a)^k$ mit $h(a) = a_{-n} \neq 0$ definieren und erhalten damit für f die Darstellung $f(z) = (z-a)^{-n}h(z)$. Nach (2.49) besitzt f dann in a eine Polstelle der Ordnung n .

Die Äquivalenzaussage in (iii) folgt unmittelbar aus den Aussagen (i) und (ii). □

2.7 Der Residuensatz

Inhaltsübersicht

- ☆ Definition des Residuums einer Funktion in einem Punkt
- ☆ Residuum als Koeffizient a_{-1} in der Laurentreihenentwicklung
- ☆ Formulierung und Beweis des Residuensatzes
- ☆ Anwendungsbeispiel: Berechnung reeller Integrale mit dem Residuensatz

(2.52) Definition Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, und $a \in \mathbb{C} \setminus U$ eine isolierte Singularität. Sei $r \in \mathbb{R}^+$ so klein gewählt, dass $\bar{B}_r(a) \cap (\mathbb{C} \setminus U) = \{a\}$ gilt. Dann nennt man

$$\operatorname{res}_a(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(a)} f(z) dz$$

das **Residuum** von f an der Stelle a . Ist $a \in U$, dann setzt man $\operatorname{res}_a(f) = 0$.

Mit Hilfe des verallgemeinerten Cauchyschen Integralsatzes (2.41) sieht man leicht, dass die Zahl $\operatorname{res}_a(f)$ von der Wahl des Radius r unabhängig ist. Sind nämlich $r, s \in \mathbb{R}^+$ mit $r < s$ und $\bar{B}_s(a) \cap (\mathbb{C} \cap U) = \{a\}$, dann gilt auf Grund dieses Satzes $\int_{\partial B_r(a)} f(z) dz = \int_{\partial B_s(a)} f(z) dz$.

(2.53) Lemma Ist $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ die Laurentreihen-Entwicklung von f in einer Umgebung des Punktes a , dann gilt $a_{-1} = \operatorname{res}_a(f)$.

Beweis: Das folgt direkt aus der Gleichung (2.10) aus Abschnitt 2.6 für die Laurent-Koeffizienten. □

(2.54) Lemma Besitzt die Funktion f bei a eine einfache Polstelle und ist g eine weitere Funktion, die in a holomorph ist, dann gilt $\operatorname{res}_a(fg) = g(a)\operatorname{res}_a(f)$.

Beweis: Auf Grund der Voraussetzungen besitzen die Funktionen f und g in einer Umgebung von a Laurentreihen-Entwicklungen der Form $f = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n(z-a)^n$ und $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$. Es folgt

$$(fg)(z) = \left(\sum_{n=-1}^{\infty} a_n(z-a)^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n \right) = \sum_{n=-1}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

mit $c_n = \sum a_k b_\ell$, wobei die Summe über alle $k \geq -1, \ell \geq 0$ mit $k + \ell = n$ gebildet wird. Insbesondere ist $c_{-1} = a_{-1}b_0 = \operatorname{res}_a(f)g(a)$ das Residuum von fg an der Stelle a . □

(2.55) Definition Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ eine Kurve und $z \in U \setminus \gamma([a, b])$. Dann nennt man

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dw}{w-z}$$

die **Umlaufzahl** der Kurve um den Punkt z .

Als Beispiel für die Umlaufzahl betrachten wir für jedes $n \in \mathbb{Z}$ die Kurve $\gamma_n : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $\gamma_n(t) = e^{int}$. Im Fall $n > 0$ läuft diese Kurve n -mal gegen den Uhrzeigersinn um den Nullpunkt, im Fall $n < 0$ jeweils $(-n)$ -mal mit dem Uhrzeigersinn, und im Fall $n = 0$ verharrt sie im Punkt 1. Ist nun $z \in \mathbb{C}$ ein Punkt außerhalb der Kreisscheibe $\bar{B}_1(0)$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $1 + \varepsilon < |z|$, dann ist $z \mapsto \frac{1}{w-z}$ eine holomorphe Funktion auf $B_{1+\varepsilon}(0)$, und der Cauchysche Integralsatz (2.21) liefert

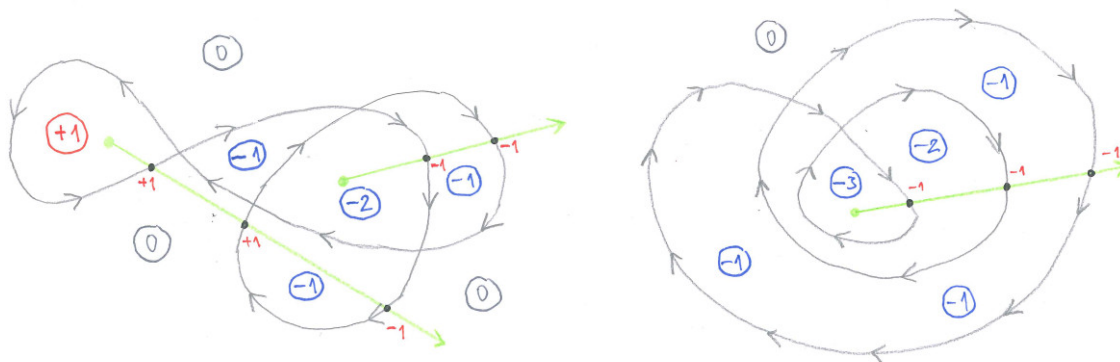
$$n(\gamma_n, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{dw}{w-z} = 0.$$

Betrachten wir nun den Fall, dass z im Inneren der Kreisscheibe liegt, also $z \in B_1(0)$. Bezeichnet $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ die Funktion mit dem konstanten Wert 1, dann erhalten wir mit der Cauchyschen Integralformel (2.25)

$$n(\gamma_1, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{h(w)}{w-z} dw = h(z) = 1.$$

Die Gleichung $\int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}-z} dt = \int_{\gamma_1} \frac{dw}{w-z} = 2\pi i$ kann verwendet werden, um mit Hilfe der Substitutionsregel die Umlaufzahl von $n(\gamma_n, z)$ für beliebiges $n \in \mathbb{Z}$ zu bestimmen.

$$\begin{aligned} n(\gamma_n, z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{dw}{w-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\gamma_n'(t)}{\gamma_n(t)-z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{ine^{int}}{e^{int}-z} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi n} \frac{ie^{it}}{e^{it}-z} dt = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} \frac{ie^{it}}{e^{it}-z} dt = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}-z} dt = \\ &= \frac{n}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}-z} dt = \frac{n}{2\pi i} \cdot 2\pi i = n. \end{aligned}$$



Beispiele zur geometrischen Bestimmung der Umlaufzahl

Für die Bestimmung der Umlaufzahl einer geschlossenen Kurve γ gelten folgende Regeln.

- Für Punkt $z \in \mathbb{C}$ im Außenbereich (also für hinreichend großes $|z|$) gilt $n(\gamma, z) = 0$.
- Überquert man ein nach rechts laufendes Stück der Kurve, dann ist die Umlaufzahl der Punkte hinter der Geraden um 1 höher als die Umlaufzahl der Punkte vor der Geraden.
- Überquert man dagegen eine nach links laufendes Stück, dann verringert sich die Umlaufzahl um 1. (Um beispielsweise von außen das Gebiet in der Mitte der rechten Zeichnung zu erreichen, muss man die Kurve an drei Stellen überqueren, an denen die Kurve nach links läuft.

Mit Hilfe dieser Regeln kann man die Umlaufzahl der Kurve γ um einen vorgegebenen Punkt z mit folgendem Verfahren bestimmen: Man zeichnet eine Halbgerade von z aus in den Außenbereich, wobei darauf zu achten ist, dass keine Kreuzungspunkte überquert werden, und startet mit dem Wert 0 (in den beiden Zeichnungen jeweils in grüner Farbe). An jeder Überschneidung der Halbgerade mit einem nach links laufenden Kurvenstück erhöht man den Wert um 1, an jedem nach rechts laufenden Kurvenstück wird er um 1 verringert. Dann ist der zum Schluss erreichte Wert die Umlaufzahl $n(\gamma, z)$.

(2.56) Proposition Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ eine Kurve und $z \in U \setminus \gamma([a, b])$. Dann ist die Umlaufzahl $n(\gamma, z)$ eine ganze Zahl.

Beweis: Die Kurve γ kann durch ihre Normierung ersetzt werden, ohne dass sich das Integral $\int_{\gamma} \frac{dw}{w-z}$ ändert. Also können wir o.B.d.A. $a = 0$ und $b = 1$ voraussetzen. Nach Definition gilt $\int_{\gamma} \frac{dw}{w-z} = \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z} dt$. Wir definieren nun die Funktionen $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$f(x) = (\gamma(x) - z)e^{-g(x)} \quad \text{und} \quad g(x) = \int_0^x \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt.$$

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, angewendet auf den Real- und Imaginärteil von g , liefert $g'(x) = \frac{\gamma'(x)}{\gamma(x)-z}$ für alle $x \in]0, 1[$. Mit der eindimensionalen Produkt- und Kettenregel erhalten wir außerdem

$$f'(x) = \gamma'(x)e^{-g(x)} + (\gamma(x) - z)(-g'(x))e^{-g(x)} = \gamma'(x)e^{-g(x)} - (\gamma(x) - z) \frac{\gamma'(x)}{\gamma(x) - z} e^{-g(x)} = 0$$

für $x \in [0, 1]$. Also ist die Funktion f auf $[0, 1]$ konstant. Die Gleichung

$$(\gamma(1) - z)e^{-g(1)} = f(1) = f(0) = (\gamma(0) - z)e^{-g(0)}$$

liefert wegen $\gamma(0) = \gamma(1)$ und $z \neq \gamma(0)$ nun $e^{g(0)} = e^{g(1)}$, also $g(1) = g(0) + 2\pi in = 2\pi in$ für ein $n \in \mathbb{Z}$. (Hierbei wurde verwendet, dass die komplexen Zahlen der Form $2\pi in$ mit $n \in \mathbb{Z}$ die einzigen sind, für die $e^z = 1$ ist, was in den Übungen bewiesen wurde.) Wir erhalten dann

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dw}{w-z} = \frac{1}{2\pi i} g(1) = \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi in = n. \quad \square$$

(2.57) Proposition Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine diskrete und abgeschlossene Teilmenge und $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine Kurve mit $D \cap \gamma([a, b]) = \emptyset$.

- (i) Es gibt ein $r \in \mathbb{R}^+$ mit $\gamma([a, b]) \subseteq B_r(0)$.
- (ii) Die Schnittmenge $D \cap B_r(0)$ ist endlich.
- (iii) Für alle $z \notin B_r(0)$ gilt $n(\gamma, z) = 0$.

Insgesamt gilt $n(\gamma, z) \neq 0$ also nur für endlich viele $z \in D$.

Beweis: zu (i) Die Menge $\gamma([a, b])$ ist als Bild eines kompakten Intervalls unter einer stetigen Abbildung kompakt und damit insbesondere beschränkt. Es gibt also ein $r \in \mathbb{R}^+$ mit $\gamma([a, b]) \subseteq B_r(0)$.

zu (ii) Weil D diskret ist, finden wir für jedes $z \in D \cap \bar{B}_r(0)$ eine Umgebung U_z mit $U_z \cap D = \{z\}$. Aus der Abgeschlossenheit von D folgt, dass $U = \mathbb{C} \setminus D$ eine offene Teilmenge von \mathbb{C} ist. Insgesamt bilden die U_z

mit $z \in D$ zusammen mit U eine offene Überdeckung von $\bar{B}_r(0)$. Weil $\bar{B}_r(0)$ kompakt ist, können wir aus dieser Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung wählen. In jeder offenen Menge dieser Teilüberdeckung liegt höchstens jeweils ein Punkt aus D . Dies zeigt, dass die Menge $D \cap \bar{B}_r(0)$ endlich ist, und erst recht der Durchschnitt $D \cap B_r(0)$.

zu (iii) Die Abbildung $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b]) \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto n(\gamma, z)$ ist stetig; da die Funktion unter dem Integralzeichen von

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dw}{w - z}$$

in z stetig ist, kann dies aus dem Satz (1.47) über parameterabhängige Integrale gefolgert werden. Sei nun $z_1 \notin B_r(0)$ beliebig gewählt. Dann ist auch $s \mapsto n(\gamma, sz_1)$ eine stetige Funktion auf $\{s \in \mathbb{R} \mid s \geq 1\}$. Für $s \rightarrow +\infty$ konvergiert diese gegen Null, weil der Integrand $(w - sz_1)^{-1}$ im Ausdruck

$$n(\gamma, sz_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dw}{w - sz_1}$$

auf $\bar{B}_r(0)$ für $s \rightarrow +\infty$ gleichmäßig gegen Null konvergiert: Für hinreichend großes s gilt $|w - sz_1| \geq |w| - s|z_1| = s|z_1| - |w| \geq sr - r = (s-1)r$ und somit $|w - sz_1|^{-1} \leq r^{-1}(s-1)^{-1}$. Weil aber $n(\gamma, sz_1)$ für alle $s \geq 1$ nach (2.56) stets ganzzahlig ist, muss $n(\gamma, z_1) = 0$ gelten. \square

(2.58) Satz (Residuensatz)

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet, $D \subseteq G$ eine diskrete und abgeschlossene Teilmenge und $f : G \setminus D \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann gilt für jede Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ in G mit $\gamma([a, b]) \cap D = \emptyset$ die Gleichung

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z \in D} n(\gamma, z) \operatorname{res}_z(f).$$

Beweis: Sei $r \in \mathbb{R}^+$ mit der in (2.57) (i) beschriebenen Eigenschaft. Nach Teil (ii) dieser Proposition ist $D \cap B_r(0)$ endlich; seien z_1, \dots, z_m die Elemente dieser Menge. Auf Grund von Teil (iii) gilt

$$\sum_{z \in D} n(\gamma, z) \operatorname{res}_z(f) = \sum_{k=1}^m n(\gamma, z_k) \operatorname{res}_{z_k}(f).$$

Mit G und $B_r(0)$ ist auch die Menge $G_r = G \cap B_r(0)$ ein konvexes Gebiet. Wegen $\gamma([a, b]) \subseteq B_r(0)$ können wir G durch G_r ersetzen, ohne dass sich am Kurvenintegral etwas ändert. Danach ist f eine holomorphe Funktion auf $G \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$, und die Punkte z_1, \dots, z_m sind isolierte Singularitäten von f .

Für jedes $k \in \{1, \dots, m\}$ sei $h_k : \mathbb{C} \setminus \{z_k\} \rightarrow \mathbb{C}$ der in (2.44) definierte Hauptteil der Laurentreihen-Entwicklung von f im Punkt z_k . Dann ist die Funktion $g = f - \sum_{k=1}^m h_k$ von $G_r \setminus D$ auf G_r holomorph fortsetzbar, weil sie in den Punkten z_1, \dots, z_m hebbare Singularitäten besitzt. Durch Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes (2.21) für konvexe Gebiete auf G erhalten wir

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} g(z) dz + \sum_{k=1}^m \int_{\gamma} h_k(z) dz = \sum_{k=1}^m \int_{\gamma} h_k(z) dz.$$

Wir betrachten nun jeden einzelnen Hauptteil als Laurentreihe der Form

$$h_k(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_{kn}(z - z_k)^n.$$

Die Folge der Partialsummen konvergiert auf der kompakten Menge $\gamma([a, b])$ gleichmäßig gegen die Funktion h_k . Nach (2.28) gilt deshalb

$$\int_{\gamma} h_k(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_{kn} \int_{\gamma} (z - z_k)^n dz.$$

Für $n < -1$ besitzt die Funktion $z \mapsto (z - z_k)^n$ die komplexe Stammfunktion $z \mapsto \frac{1}{n+1}(z - z_k)^{n+1}$, die auf $\mathbb{C} \setminus \{z_k\}$ und damit erst recht auf G holomorph ist. Mit (2.17) folgt $\int_{\gamma} (z - z_k)^n dz = 0$ für diese n . Dies zusammen mit der Definition der Umlaufzahl und (2.53) liefert

$$\int_{\gamma} h_k(z) dz = a_{k,-1} \int_{\gamma} (z - z_k)^{-1} dz = \operatorname{res}_{z_k}(h_k) \cdot 2\pi i n(\gamma, z_k).$$

Setzen wir dies in die Gleichung von oben ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \sum_{k=1}^m \int_{\gamma} h_k(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m n(\gamma, z_k) \operatorname{res}_{z_k}(h_k) = \\ &2\pi i \sum_{k=1}^m n(\gamma, z_k) \operatorname{res}_{z_k}(f) = 2\pi i \sum_{z \in D} n(\gamma, z) \operatorname{res}_z(f). \quad \square \end{aligned}$$

In den folgenden beiden Beispielen werden die komplexen Nullstellen von Polynomen der Form $x^n - 1$ (für beliebiges $n \in \mathbb{N}$) eine wichtige Rolle spielen. Die Nullstellen eines solchen Polynoms sind gegeben durch $\{e^{2\pi i k/n} \mid 0 \leq k < n\}$. Man bezeichnet die Nullstellen als *n-te Einheitswurzeln*. Um Real- und Imaginärteil dieser Zahlen zu bestimmen, verwendet man die Eulersche Formel $e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$, ist die folgende Tabelle von Sinuswerten hilfreich

α	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

zusammen mit den Gleichungen $\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1$, $\sin(\alpha + \pi) = -\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha)$, $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ und $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$, die für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gültig ist. Die erste Gleichung liefert beispielsweise für die Kosinusfunktion unter Berücksichtigung von $\cos(\alpha) > 0$ für $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ die Werte

α	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0

Anwendungsbeispiel 1: Berechnung eines Kurvenintegrals

Unser Ziel ist die Berechnung des Integrals

$$\int_{\partial B_2(0)} \frac{dw}{w^3 - 1}$$

mit Hilfe des Residuensatzes. Die komplexen Nullstellen von $w^3 - 1$ sind 1 , $e^{2\pi i/3}$ und $e^{4\pi i/3}$. Diese sind vom Absolutbetrag 1 und somit im Inneren von $\partial B_2(0)$ enthalten. Wie wir oben gezeigt haben, folgt für die Randkurve γ von $B_2(0)$ daraus

$$n(\gamma, 1) = n(\gamma, e^{2\pi i/3}) = n(\gamma, e^{4\pi i/3}) = 1.$$

Wir bestimmen nun den Real- und Imaginärteil von $e^{2\pi i/3}$ und $e^{4\pi i/3}$. Es gilt $\cos(\frac{2\pi}{3}) = -\cos(-\frac{\pi}{3}) = -\cos(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$, $\sin(\frac{2\pi}{3}) = -\sin(-\frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\cos(\frac{4\pi}{3}) = -\cos(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$ und $\sin(\frac{4\pi}{3}) = -\sin(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$, also

$$e^{2\pi i/3} = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i \sin(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3} \quad \text{und} \quad e^{4\pi i/3} = \cos(\frac{4\pi}{3}) + i \sin(\frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}.$$

Wir finden somit die Zerlegung

$$z^3 - 1 = (z - 1)(z + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3})(z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}).$$

Im nächsten Schritt bestimmen wir die Residuen von $f(z) = (z^3 - 1)^{-1}$ in den Punkten 1 , $e^{2\pi i/3}$ und $e^{4\pi i/3}$ mit Hilfe von (2.54). Wenden wir dieses Lemma an auf $g(z) = (z-1)^{-1}$ und $h(z) = (z + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3})^{-1}(z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3})^{-1}$, so erhalten wir wegen $\text{res}_1(g) = 1$ den Wert

$$\text{res}_1(f) = h(1) = (\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3})^{-1}(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{3}.$$

Setzen wir $g(z) = (z + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3})^{-1}$ und $h(z) = (z - 1)^{-1}(z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3})^{-1}$, dann folgt entsprechend

$$\text{res}_{e^{2\pi i/3}}(f) = h(e^{2\pi i/3}) = h(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}) = (-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3})^{-1} \cdot (i\sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{6}(i\sqrt{3} - 1).$$

Setzen wir $g(z) = (z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3})^{-1}$ und $h(z) = (z - 1)^{-1}(z + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3})^{-1}$, dann erhalten wir

$$\text{res}_{e^{4\pi i/3}}(f) = h(e^{4\pi i/3}) = h(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}) = (-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3})^{-1} \cdot (-i\sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{6}(-i\sqrt{3} - 1).$$

Mit dem Residuensatz erhalten wir nun

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_2(0)} \frac{dw}{w^3 - 1} &= 2\pi i \left(n(\gamma, 1)\text{res}_1(f) + n(\gamma, e^{2\pi i/3})\text{res}_{e^{2\pi i/3}}(f) + n(\gamma, e^{4\pi i/3})\text{res}_{e^{4\pi i/3}}(f) \right) \\ &= 2\pi i \left(1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) + 1 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \right) = 0. \end{aligned}$$

Anwendungsbeispiel 2: Berechnung eines reellen Integrals

Hier verwenden wir den Residuensatz zum Beweis der Integralformel

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Dazu betrachten wir die holomorphe Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus N \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{z^2}{z^4 + 1},$$

wobei N die Nullstellenmenge von $z^4 + 1$ bezeichnet. Für jedes $r \in \mathbb{R}^+$ betrachten wir außerdem die Kurve $\rho_r : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto re^{it}$, die die obere Hälfte des Kreises vom Radius r um den Nullpunkt durchläuft, und setzen $\gamma_r = \rho_r * [-r, r]$. Sofern γ_r keine Nullstelle von $z^4 + 1$ durchquert, liefert uns der Residuensatz die Gleichung

$$\int_{-r}^r f(z) dz + \int_{\rho_r} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z \in \mathbb{C}} n(\gamma_r, z) \operatorname{res}_z(f). \quad (2.11)$$

Um den Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung zu bestimmen, ermitteln wir zunächst die komplexen Nullstellen von $z^4 + 1$. Es gilt $z^8 - 1 = (z^4 - 1)(z^4 + 1)$. Wie oben bereits erwähnt, ist die Nullstellenmenge von $z^8 - 1$ gleich $\{e^{k\pi i/4} \mid 0 \leq k < 8\}$, die von $z^4 - 1$ ist $\{e^{k\pi i/2} \mid 0 \leq k < 4\}$. Die Nullstellen von $z^4 + 1$ sind genau die Nullstellen von $z^8 - 1$, die keine Nullstellen von $z^4 - 1$ sind, also die Elemente der Menge

$$\{e^{\pi i/4}, e^{3\pi i/4}, e^{5\pi i/4}, e^{7\pi i/4}\}.$$

Real- und Imaginärteil dieser Zahlen sind gegeben durch

$$e^{\pi i/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}, \quad e^{3\pi i/4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}, \quad e^{5\pi i/4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}, \quad e^{7\pi i/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}.$$

Ist $r > 1$, dann liegen $e^{\pi i/4}$ und $e^{3\pi i/4}$ im Inneren des Halbkreises. Die Nullstellen $e^{5\pi i/4}$ und $e^{7\pi i/4}$ liegen außerhalb, weil sie einen negativen Imaginärteil besitzen und somit im unteren Teil der komplexen Ebene liegen, während sich der Halbkreis im oberen Teil befindet. Es gilt also

$$n(\gamma_r, e^{\pi i/4}) = n(\gamma_r, e^{3\pi i/4}) = 1 \quad \text{und} \quad n(\gamma_r, e^{5\pi i/4}) = n(\gamma_r, e^{7\pi i/4}) = 0.$$

Nun verwenden wir (2.54) und die Zerlegung der Funktion $f(z) = \frac{z^2}{z^4 + 1}$ gegeben durch

$$f(z) = \frac{z^2}{(z - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}})(z + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}})(z + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})(z - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})},$$

um die Residuen in den Punkten $e^{\pi i/4}$ und $e^{3\pi i/4}$ zu berechnen. Weil das Residuum von $(z - e^{\pi i/4})^{-1}$ im Punkt $e^{\pi i/4}$ gleich 1 ist, erhalten wir das Residuum von f in diesem Punkt durch Einsetzen von $e^{\pi i/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$ in die Funktion

$$\frac{z^2}{(z + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}})(z + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})(z - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})}$$

Es gilt also

$$\operatorname{res}_{e^{\pi i/4}}(f) = \frac{(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})^2}{\sqrt{2}(\sqrt{2} + i\sqrt{2})(i\sqrt{2})} = \frac{i}{2i\sqrt{2}(1+i)} = \frac{1}{2\sqrt{2}(1+i)} = \frac{1-i}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{4} \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \right).$$

Ebenso erhalten wir das Residuum von f in $e^{3\pi i/4}$ durch Einsetzen von $e^{3\pi i/4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$ in die Funktion

$$\frac{z^2}{(z - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}})(z + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})(z - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})}.$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{e^{3\pi i/4}}(f) &= \frac{(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})^2}{(-\sqrt{2})(\sqrt{2}i)\sqrt{2}(-1+i)} = \frac{(-i)}{(-2\sqrt{2}i)(-1+i)} = \frac{1}{2\sqrt{2}(-1+i)} \\ &= -\frac{1+i}{2\sqrt{2} \cdot 2} = -\frac{1+i}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{4} \left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

Insgesamt ist die rechte Seite von (2.11) für $r > 1$ also gegeben durch

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum_{z \in V} n(\gamma_r, z) \operatorname{res}_z(f) &= 2\pi i \operatorname{res}_{e^{\pi i/4}}(f) + 2\pi i \operatorname{res}_{e^{3\pi i/4}}(f) = 2\pi i \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \right) + 2\pi i \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}} \right) \\ &= 2\pi i \cdot \left(-\frac{i}{2\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Nun untersuchen wir die linke Seite der Gleichung (2.11). Durch Betrachtung der Kurve $\delta_r : [-r, r] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto t$ mit $\delta_r'(t) = 1$ für $t \in [-r, r]$ erkennt man, dass

$$\int_{-r}^r f(z) dz = \int_{\delta_r} f(z) dz = \int_{-r}^r f(\delta_r(t)) \delta_r'(t) dt = \int_{-r}^r \frac{t^2}{t^4 + 1} dt.$$

Es handelt sich bei $\int_{-r}^r f dz$ also um das gewöhnliche, reelle Riemann-Integral über das Intervall $[-r, r]$, und lassen wir r gegen $+\infty$ laufen, so erhalten wir das gesuchte Integral über die gesamte reelle Achse. Das zweite Integral auf der linken Seite von (2.7) schätzen wir ab. Für alle $t \in [0, \pi]$ und $r > 1$ gilt

$$f(\rho_r(t)) = \frac{\rho_r(t)^2}{\rho_r(t)^4 + 1} = \frac{r^2 e^{2it}}{r^4 e^{4it} + 1}.$$

Der Nenner kann nach unten abgeschätzt werden durch die Rechnung

$$|r^4 e^{4it} + 1| = |r^4 e^{4it} - (-1)| \geq |r^4 e^{4it}| - 1 = r^4 - 1$$

und somit $|f(\rho_r(t))| \leq \frac{r^2}{r^4 - 1}$. Weil die Kurvenlänge gleich πr ist, erhalten wir für das Kurvenintegral mit (2.14) die Abschätzung

$$\left| \int_{\rho_r} f(z) dz \right| \leq \frac{\pi r^3}{r^4 - 1}.$$

Dieser Wert läuft für $r \rightarrow +\infty$ gegen Null. Insgesamt erhalten wir nun

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r \frac{x^2}{x^4 + 1} dx = 2\pi i \sum_{z \in V} n(\gamma_r, z) \operatorname{res}_z(f) - \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\rho_r} f(z) dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Ausblick:

Verallgemeinerter Cauchyscher Integralsatz und einfach zusammenhängende Gebiete

Für eine möglichst weit reichende Verallgemeinerung des Cauchyschen Integralsatzes erweist es sich als günstig, mehrere Kurven in \mathbb{C} zu einem Objekt zusammenzufassen.

(2.59) Definition Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine beliebige Teilmenge. Eine *Kette* in U ist ein formaler Ausdruck der Form $\Gamma = \sum_{k=1}^r n_k \gamma_k$ mit $r \in \mathbb{N}$, $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{Z}$ und Kurven $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ in U , $\gamma_k : [a_k, b_k] \rightarrow \mathbb{C}$ für $1 \leq k \leq r$. Die Menge $\text{sp}(\Gamma) = \bigcup_{k=1}^r \gamma_k([a_k, b_k])$ heißt die *Spur* des Zyklus Γ .

Jede stetige Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ kann über den Zyklus Γ integriert werden. Man setzt dazu

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^r n_k \int_{\gamma_k} f(z) dz.$$

(2.60) Definition Sei Γ eine Kette in U wie oben. Für jede Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ sei $z_A(\gamma) = \gamma(a)$ der Start- und $z_E(\gamma) = \gamma(b)$ der Endpunkt der Kurve. Man bezeichnet Γ als *Zyklus*, wenn für jedes $z \in U$ die Gleichung

$$\sum_{z_A(\gamma_k)=z} n_k = \sum_{z_E(\gamma_k)=z} n_k \quad \text{gilt.}$$

Dabei läuft die linke über alle Kurven γ_k mit Startpunkt z und die rechte Summe über alle Kurven mit Endpunkt z .

Die Zyklen sind die natürlichen Verallgemeinerungen der *geschlossenen* Kurven. Die Bedingung besagt, dass in jedem Punkt $z \in U$ genauso viele Kurven starten wie enden, wobei jede Kurve γ_k mit ihrem „Gewichtungsfaktor“ n_k gezählt wird.

(2.61) Definition Für jeden Zyklus $\Gamma = \sum_{k=1}^r n_k \gamma_k$ und jeden Punkt $z \in \mathbb{C} \setminus \text{sp}(\Gamma)$ ist die *Umlaufzahl* $n(\Gamma, z)$ definiert durch

$$n(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^r n_k \int_{\gamma_k} \frac{dw}{w-z}.$$

Ähnlich wie bei den geschlossenen Kurven zeigt man, dass $n(\Gamma, z)$ stets eine ganze Zahl ist; siehe [Fr], Satz 5.1.6 auf S. 283. Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ eine beliebige Teilmenge und Γ ein Zyklus in U , so bezeichnet man diesen als *nullhomolog* in U , wenn $n(\Gamma, z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus U$ gilt. Die Verallgemeinerungen des Cauchyschen Integralsatzes lautet nun

(2.62) Satz Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und Γ ein in G nullhomologer Zyklus. Dann gilt

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

für jede holomorphe Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$.

Die Cauchysche Integralformel lässt sich folgendermaßen verallgemeinern.

(2.63) Satz Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, Γ ein in G nullhomologer Zyklus und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann gilt für alle $z \in G \setminus \text{sp}(\Gamma)$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$ die Gleichung

$$n(\Gamma, z) f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}} dw.$$

Man beachte, dass der Cauchysche Integralsatz und die Cauchysche Integralformel sowohl für konvexe Gebiete als auch für Kreisinge als Spezialfälle der beiden neuen Sätze angesehen werden können. Bei der Cauchyschen Integralformel (2.25) verwendet man den nullhomologen Zyklus $\Gamma = \partial B_r(a)$. Beim Cauchyschen Integralsatz (2.21) ist zu zeigen, dass für jede geschlossene Kurve γ in einem konvexen Gebiet G der Zyklus $\Gamma = \gamma$ nullhomolog in G ist. Dies gelingt durch ein ähnliches Argument wie im Beweis von (2.57). Bei den entsprechenden Sätzen für Kreisinge arbeitet man jeweils mit dem nullhomologen Zyklus $\Gamma = \partial B_\sigma(a) - \partial B_\rho(a)$. Man überprüft leicht mit Hilfe der (gewöhnlichen) Cauchyschen Integralformel, dass dieser Zyklus im Kreising $K_{r,s}(a)$ nullhomolog ist.

Eine wichtige allgemeine Frage lautet, für welche Gebiete der Cauchysche Integralsatz ohne Einschränkung gültig ist. Um dies zu klären, müssen einen weiteren Grundbegriff einführen.

(2.64) Definition Sei $U \subseteq \mathbb{C}$, und seien $\gamma, \delta : [0, 1] \rightarrow U$ zwei Kurven in U mit demselben Start- und Endpunkt. Es sei $z_0 = \gamma(0) = \delta(0)$ und $z_1 = \gamma(1) = \delta(1)$. Eine *Homotopie* zwischen γ und δ in U ist eine stetige Abbildung $\Phi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften.

- (i) $\Phi(t, 0) = \gamma(t)$ und $\Phi(t, 1) = \delta(t)$ für alle $t \in [0, 1]$
- (ii) $\Phi(0, s) = z_0$ und $\Phi(1, s) = z_1$ für alle $s \in [0, 1]$

Zwei Kurven, zwischen denen eine Homotopie in U existiert, werden *homotop* genannt. Eine geschlossene Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ heißt *zusammenziehbar* in U , wenn sie in U homotop zur konstanten Kurve $c : [0, 1] \rightarrow U, t \mapsto \gamma(0)$ ist.

Geometrisch lässt sich die Homotopie Φ folgendermaßen interpretieren: Für jedes $s \in [0, 1]$ ist durch $\gamma_s(t) = \Phi(t, s)$ eine Kurve von z_0 nach z_1 gegeben, wobei $\gamma_0 = \gamma$ und $\gamma_1 = \delta$ ist. Lässt man s von 0 nach 1 laufen, so wird die Kurve γ kontinuierlich in die Kurve δ deformiert, wobei Start- und Endpunkt konstant bleiben.

(2.65) Definition Ein Gebiet G heißt *einfach zusammenhängend*, wenn jede geschlossene Kurve in G zusammenziehbar ist.

Anschaulich bedeutet die Eigenschaft „einfach zusammenhängend“, dass das Gebiet G keine Löcher besitzt. Beispielsweise ist die Kreisscheibe $B_1(0)$ einfach zusammenhängend, die Menge $B_1(0) \setminus \{0\}$ aber nicht.

Für das Studium komplexer Kurvenintegrale ist der Homotopiebegriff aus folgendem Grund relevant: Ist G ein Gebiet und sind γ und δ zwei in G homotope Kurven, dann gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\delta} f(z) dz$$

für jede holomorphe Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$; siehe [Fr], Satz 3.2.3 auf S. 129.

Zur weiteren Vorbereitung benötigen wir noch einen zentralen Satz der Funktionentheorie. Seien $U, V \subseteq \mathbb{C}$ zwei offene Teilmengen. Eine Funktion $f : U \rightarrow V$ heißt *biholomorph*, wenn sie holomorph und bijektiv ist, und ihre Umkehrfunktion $f^{-1} : V \rightarrow U$ ebenfalls holomorph ist. Allgemein werden zwei offene Teilmengen U, V als *biholomorph äquivalent* bezeichnet, wenn zwischen ihnen eine biholomorphe Funktion existiert. Es gilt nun

(2.66) Satz (Riemannscher Abbildungssatz)

Sei $G \subsetneq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Dann ist G biholomorph äquivalent zur offenen Einheitskreisscheibe $B_1(0)$.

Beweis: siehe [Fr], Satz 5.1.2, S. 278. □

Aus dem Riemanschen Abbildungssatz kann nun folgende Charakterisierung der einfach zusammenhängenden Gebiete abgeleitet werden. Sie zeigt, dass dies tatsächlich die Gebiete sind, in denen der Cauchysche Integralsatz ohne weitere Einschränkungen gültig ist.

(2.67) Satz Für jedes Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ sind folgende Aussagen äquivalent.

- (i) G ist einfach zusammenhängend
- (ii) Für jede holomorphe Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ und jede Kurve γ in G gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

- (iii) Für jede holomorphe Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ und jeden Zyklus Γ in G gilt

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Desweiteren ist auch folgende Charakterisierung möglich.

(2.68) Satz Für jedes Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ sind folgende Aussagen äquivalent.

- (i) G ist einfach zusammenhängend
- (ii) Jeder Zyklus Γ in G ist nullhomolog in G .
- (iii) Jede holomorphe Funktion auf G besitzt eine komplexe Stammfunktion.
- (iv) Jede nullstellenfreie holomorphe Funktion f auf G besitzt einen **komplexen Logarithmus**. Dies bedeutet, dass eine holomorphe Funktion $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $e^{g(z)} = f(z)$ für alle $z \in G$ existiert.
- (v) Jede nullstellenfreie holomorphe Funktion f auf G besitzt eine **komplexe Quadratwurzel**, d.h. es gibt eine holomorphe Funktion $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $g(z)^2 = f(z)$ für alle $z \in G$.

Den Beweis dieser Sätze findet man in Abschnitt 5.1 von [Fr].

§ 3. Gewöhnliche Differentialgleichungen

3.1 Der Existenz- und Eindeutigkeitsatz für gewöhnliche DGL

Inhaltsübersicht

- ☆ Definition von Differentialgleichungen (DGLs) und Systemen von DGLs 1. Ordnung sowie ihrer Lösungen
- ☆ Definition von DGLs n -ter Ordnung (und ihrer Lösungen)
- ☆ Korrespondenz zwischen DGLs n -ter Ordnung und Systemen von DGLs 1. Ordnung
- ☆ die lokale Lipschitz-Bedingung zur Gewährleistung der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

(3.1) Definition Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann nennt man

$$y' = f(x, y) \quad (3.12)$$

eine **Differentialgleichung (DGL) erster Ordnung**. Die Menge D bezeichnen wir als den **Definitionsbereich** der DGL. Eine Lösung von (3.12) ist eine auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definierte, stetig differenzierbare Funktion $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $(x, \varphi(x)) \in D$ und $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ für alle $x \in I$ gilt.

Die Gleichung $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ kann auch als **Integralgleichung** formuliert werden. Nach dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung ist sie äquivalent zu

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \int_a^x f(t, \varphi(t)) dt \quad ,$$

wobei der „Startpunkt“ $a \in I$ beliebig gewählt werden kann. Die DGL (3.12) kann auch geometrisch interpretiert werden: Durch die Funktion f wird auf D ein **Vektorfeld** definiert. Der Graph $\Gamma_\varphi \subseteq D$ einer Lösung φ besitzt in jedem seiner Punkte $(x, y) \in \Gamma_\varphi$ den Vektor $(1, f(x, y)) \in \mathbb{R}^2$ jeweils als Tangentialvektor.

Beispiel 1 Die Differentialgleichung $y' = \frac{y}{x}$ mit dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ besitzt als Lösungen die Funktionen $\varphi_c : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto cx$, wobei c die reellen Zahlen durchläuft. Dies überprüft man unmittelbar durch Differentiation der Funktion φ_c : Für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt

$$\varphi_c'(x) = c = \frac{cx}{x} = \frac{\varphi_c(x)}{x}.$$

Aus dem Eindeutigkeitsatz, den wir Kürze formulieren werden, wird sich ergeben, dass keine weitere Lösungen der DGL existieren.

Beispiel 2 Die Differentialgleichung $y' = -\frac{x}{y}$ mit dem Definitionsbereich $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ besitzt als Lösungen die Funktionen der Form

$$\varphi_c :]-\sqrt{c}, \sqrt{c}[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{c - x^2},$$

wobei c die positiven reellen Zahlen durchläuft. Auch hier überprüft man die Lösungseigenschaft unmittelbar durch Differentiation: Für alle $c \in \mathbb{R}^+$ und $x \in]-\sqrt{c}, \sqrt{c}[$ gilt

$$\varphi_c'(x) = -\frac{2x}{2\sqrt{c-x^2}} = -\frac{x}{\varphi_c(x)}. \quad \square$$

(3.2) Definition Sei $n \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, mit Komponentenfunktionen f_1, \dots, f_n . Dann nennt man

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{aligned} \quad (3.13)$$

ein **System von n Differentialgleichungen** erster Ordnung. Eine **Lösung** von (3.13) ist eine auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definierte, stetig differenzierbare Funktion $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, so dass $(x, \varphi(x)) \in D$ und $\varphi_k'(x) = f_k(x, \varphi(x))$ für alle $x \in I$ und für $1 \leq k \leq n$ erfüllt ist.

(3.3) Definition Sei $n \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Eine **Differentialgleichung n -ter Ordnung** ist eine Gleichung der Form

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \quad (3.14)$$

Eine **Lösung** von (3.14) ist eine n -mal stetig differenzierbare Funktion $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, so dass $(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)) \in D$ und

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x))$$

für alle $x \in I$ erfüllt ist. Dabei bezeichnet $\varphi^{(k)}$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ jeweils die k -te Ableitung der Funktion φ .

Jeder Differentialgleichung n -ter Ordnung der Form (3.14) lässt sich ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung zuordnen, und zwar

$$y_0' = y_1, \quad y_1' = y_2, \quad \dots, \quad y_{n-2}' = y_{n-1}, \quad y_{n-1}' = f(x, y_0, \dots, y_{n-1}). \quad (3.15)$$

Ist $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung von (3.14), dann ist durch $(\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n-1)})$ eine Lösung von (3.15) gegeben. Ist umgekehrt $(\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1})$ eine Lösung von (3.15), dann ist die Funktion φ_0 eine der DGL (3.14).

Beispiel 3 Die auf $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ definierte DGL $y'' = -y$ besitzt die Lösung $\varphi(x) = \sin(x)$. Diese DGL zweiter Ordnung entspricht dem System von DGLs erster Ordnung

$$y_0' = y_1 \quad , \quad y_1' = -y_0.$$

mit der Lösung $\psi(x) = (\sin(x), \cos(x))$.

Im folgenden bezeichnet $\|\cdot\|$ stets die Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ auf dem \mathbb{R}^n .

(3.4) Definition Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung.

- (i) Wir sagen, f genügt auf D einer **Lipschitz-Bedingung**, wenn eine Konstante $L \in \mathbb{R}^+$ existiert (die sog. Lipschitz-Konstante), so dass

$$\|f(x, y) - f(x, z)\| \leq L\|y - z\| \quad \text{für alle } (x, y), (x, z) \in D \quad \text{erfüllt ist.}$$

- (ii) Die Funktion f genügt auf D **lokal** einer Lipschitz-Bedingung, wenn für jeden Punkt $(x, y) \in D$ eine Umgebung $U \subseteq D$ existiert, so dass $f|_U$ auf U einer Lipschitz-Bedingung genügt.

Die Lipschitz-Bedingung lautet also, dass die Funktion $y \mapsto f(x, y)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig auf der Menge $D_x = \{y \in \mathbb{R}^n \mid (x, y) \in D\}$ ist, im Sinne von Definition (1.1) aus dem ersten Kapitel.

(3.5) Proposition Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige, nach y_1, \dots, y_n stetig partiell differenzierbare Funktion. Letzteres bedeutet, dass die Funktionen

$$(x, y) \mapsto \partial_{(0, e_i)} f(x, y) \quad \text{für } 1 \leq i \leq n$$

auf ganz D definiert und stetig sind, wobei $e_i \in \mathbb{R}^n$ jeweils den i -ten Einheitsvektor bezeichnet. Dann genügt f einer lokalen Lipschitz-Bedingung.

Beweis: Sei $(a, b) \in D$ vorgegeben und $U \subseteq D$ eine kompakte, konvexe Umgebung von (a, b) . Für $(x, y) \in D$ setzen wir $f_x(y) = f(x, y)$. Dann gibt es eine Konstante $\gamma \in \mathbb{R}^+$, so dass die partiellen Ableitungen $\partial_i (f_x)_k(y)$ der Komponentenfunktionen $(f_x)_k$ für $(x, y) \in U$ durch γ beschränkt sind. Seien x, y, z mit $(x, y), (x, z) \in U$ vorgegeben und $v = y - z$. Nach dem Mittelwertsatz für Richtungsableitungen (siehe Mathe III, Satz 3.5) gibt es für $1 \leq k \leq n$ jeweils ein $p_k \in]y, z[\subseteq U$, so dass

$$f_k(x, y) - f_k(x, z) = (f_x)_k(y) - (f_x)_k(z) = \partial_v (f_x)_k(p_k) = \sum_{i=1}^n (y_i - z_i) \partial_i (f_x)_k(p_k)$$

erfüllt ist. Die Summe $\sum_{i=1}^n |y_i - z_i|$ ist die 1-Norm des Differenzvektors $y - z$. Weil je zwei Normen auf dem \mathbb{R}^n äquivalent sind, gibt es eine Konstante α mit $\|y - z\|_1 \leq \alpha\|y - z\|$ für alle $y, z \in U$. Setzen wir $L = \alpha\gamma$, dann gilt also

$$\|f(x, y) - f(x, z)\| \leq \gamma\|y - z\|_1 \leq \alpha\gamma\|y - z\| = L\|y - z\|$$

für alle $y, z \in U$. □

Die Bedingung in (3.5) ist natürlich insbesondere dann erfüllt, wenn f in Abhängigkeit von allen Variablen x, y_1, \dots, y_n stetig partiell differenzierbar ist.

Beispielsweise genügen die Funktionen $f(x, y) = \frac{y}{x}$ und $g(x, y) = -\frac{x}{y}$ aus den Beispielen 1 und 2 einer lokalen Lipschitz-Bedingung, denn sowohl die Funktionen selbst als auch ihre partiellen Ableitungen nach y gegeben durch $(x, y) \mapsto \frac{1}{x}$ und $(x, y) \mapsto \frac{x}{y^2}$ sind auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig.

Bevor wir nun den Eindeutigkeitsatz beweisen, führen wir noch die folgende Notation ein: Ist $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, dann setzen wir

$$\int_a^b g(x) \, dx = \left(\int_a^b g_1(x) \, dx, \dots, \int_a^b g_n(x) \, dx \right),$$

wobei g_1, \dots, g_n die Komponentenfunktionen von g bezeichnen. Ist $\alpha \in \mathbb{R}_+$ eine Konstante mit $\|g(x)\| \leq \alpha$ für alle $x \in [a, b]$, dann gilt $|g_k(x)| \leq \alpha$ für alle $x \in [a, b]$ und $1 \leq k \leq n$. Es folgt $\int_a^b |g_k(x)| \, dx \leq \alpha(b-a)$ für alle k und somit

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b g(x) \, dx \right\| &= \max \left\{ \left| \int_a^b g_k(x) \, dx \right| \mid 1 \leq k \leq n \right\} \leq \\ &\max \left\{ \int_a^b |g_k(x)| \, dx \mid 1 \leq k \leq n \right\} \leq \alpha(b-a). \end{aligned}$$

(3.6) Satz (Eindeutigkeitsatz)

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Funktion, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Seien $\varphi, \psi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = f(x, y) \quad \text{auf einem offenen Intervall } I \subseteq \mathbb{R}.$$

Gilt $\varphi(a) = \psi(a)$ für ein $a \in I$, dann folgt $\varphi(x) = \psi(x)$ für alle $x \in I$.

Beweis: Wir zeigen zunächst: Gilt $\varphi(a) = \psi(a)$ für ein $a \in I$, dann gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $\varphi(x) = \psi(x)$ für alle $x \in I$ mit $|x - a| \leq \varepsilon$. Durch Integration von $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ und $\psi'(x) = f(x, \psi(x))$ erhalten wir mit der Voraussetzung $\varphi(a) = \psi(a)$ für $x \in I$ die Gleichung

$$\varphi(x) - \psi(x) = \int_a^x (f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))) \, dt.$$

Auf Grund der lokalen Lipschitz-Bedingung gibt es $L, \delta_1 \in \mathbb{R}^+$ mit

$$\|f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))\| \leq L \|\varphi(t) - \psi(t)\| \quad \text{für alle } t \in I \quad \text{mit } |t - a| \leq \delta_1.$$

Sei nun $\delta \in]0, \delta_1]$ und $x \in [a - \delta, a + \delta]$. Dann gilt

$$\|\varphi(x) - \psi(x)\| \leq \int_a^x \|(f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t)))\| \, dt \leq L \left| \int_a^x \|\varphi(t) - \psi(t)\| \, dt \right|.$$

Setzen wir nun jeweils $m(\delta) = \sup\{\|\varphi(t) - \psi(t)\| \mid |t - a| \leq \delta\}$, dann erhalten wir die Abschätzung

$$\|\varphi(x) - \psi(x)\| \leq L|x - a|m(\delta) \leq L\delta m(\delta).$$

Bilden wir auf der linken Seite das Maximum über alle $x \in [a - \delta, a + \delta]$, dann folgt $m(\delta) \leq L\delta m(\delta)$. Sei nun $\varepsilon \in]0, \delta_1]$ so klein gewählt, dass $L\varepsilon < 1$ ist. Dann muss $m(\varepsilon) = 0$ gelten. Wir erhalten $\varphi(x) = \psi(x)$ für alle x mit $|x - a| \leq \varepsilon$.

Nun zeigen wir, dass $\varphi(x) = \psi(x)$ für alle $x \in I$ mit $x \geq a$ gilt. Dazu definieren wir

$$b = \sup\{t \in I \mid \varphi|_{[a,t]} = \psi|_{[a,t]}\}.$$

Ist $b = +\infty$ oder das rechte Intervallende von I , dann sind wir fertig. Ansonsten gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ mit $[b, b + \delta] \subseteq I$, und es gilt $\varphi(x) = \psi(x)$ für alle x mit $a \leq x < b$. Weil φ und ψ stetig sind, gilt auch $\varphi(b) = \psi(b)$. Wenden wir nun die im ersten Teil bewiesene Aussage auf den Anfangspunkt b an, so erhalten wir ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $\varphi(x) = \psi(x)$ für alle $x \in I$ mit $|x - b| < \varepsilon$, im Widerspruch zur Definition von b . Also muss $\varphi(x) = \psi(x)$ für alle $x \in I$ mit $x \geq a$ gelten. Genauso beweist man, dass $\varphi(x) = \psi(x)$ für alle $x \in I$ mit $x \leq a$ erfüllt ist. \square

Ein Beispiel für eine Differentialgleichung, für die der Eindeutigkeitsatz *nicht* gilt, ist durch

$$y' = y^{2/3}$$

gegeben. Eine Lösung dieser DGL durch den Punkt $(0, 0)$ erhält man durch die Nullfunktion, also durch $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}$. Aber auch die Funktion $\psi(x) = \frac{1}{27}x^3$ ist eine Lösung durch diesen Punkt, denn es gilt $\psi(0) = 0$ und

$$\psi'(x) = \frac{3}{27}x^2 = \frac{1}{9}x^2 = \left(\frac{1}{27}x^3\right)^{2/3}.$$

Allgemein kann man leicht überprüfen, dass für jedes Paar $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ mit $b < 0$ und $c > 0$ die Funktion

$$\psi_{bc}(x) = \begin{cases} \frac{1}{27}(x - b)^3 & \text{für } x \leq b \\ 0 & \text{für } b \leq x \leq c \\ \frac{1}{27}(x - c)^3 & \text{für } x \geq c \end{cases}$$

eine Lösung der DGL ist. Denn es gilt $\psi_{bc}(0) = 0$, für alle $x > c$ gilt

$$\psi'_{bc}(x) = \frac{1}{9}(x - c)^2 = \left(\frac{1}{27}(x - c)^3\right)^{2/3},$$

und für $x < b$ erhält man ebenso

$$\psi'_{bc}(x) = \frac{1}{9}(x - b)^2 = \left(\frac{1}{27}(x - b)^3\right)^{2/3}.$$

Für $b < x < c$ ist $\psi'_{bc}(x) = 0$ und $\psi_{bc}(x) = 0$, also ist die Gleichung $\psi'_{bc}(x) = \psi_{bc}(x)^{2/3}$ auch hier erfüllt. An den kritischen Stellen $x = b$ und $x = c$ zeigt man durch Betrachtung der links- und rechtsseitigen Ableitung, dass ψ'_{bc} auch hier gleich Null ist.

Der Eindeutigkeitsatz kann auf die Funktion $f(x, y) = y^{2/3}$ nicht angewendet werden, weil sie in einer Umgebung von $(0, 0)$ keiner lokalen Lipschitz-Bedingung genügt. Beispielsweise gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \frac{f(0, \frac{1}{n}) - f(0, \frac{1}{2n})}{\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}} &= \frac{n^{-2/3} - (2n)^{-2/3}}{\frac{1}{2n}} = 2n(n^{-2/3} - (2n)^{-2/3}) \\ &= 2n^{1/3} - (2n)^{1/3} = (2 - 2^{1/3})n^{1/3}. \end{aligned}$$

Für $n \rightarrow \infty$ geht dieser Wert gegen unendlich. Es gibt also keine Umgebung U von $(0, 0)$, so dass die Ungleichung $|f(x, y) - f(x, z)| \leq L|y - z|$ für alle $(x, y), (x, z) \in U$ mit einer geeigneten Konstanten $L > 0$ erfüllt ist.

Nach der Eindeutigkeit beschäftigen wir uns nun mit der *Existenz* von Lösungen einer DGL. Das wesentliche Hilfsmittel hierbei ist der **Banachsche Fixpunktsatz**, den wir bereits in der Mathe III-Vorlesung kennengelernt haben: Ist (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $\phi : X \rightarrow X$ eine Kontraktion, dann besitzt ϕ in X einen eindeutig bestimmten Fixpunkt, also ein $a \in X$ mit $\phi(a) = a$. Wir erinnern daran, dass eine Abbildung ϕ als **Kontraktion** bezeichnet wird, wenn es eine Konstante $\gamma \in [0, 1[$ gibt, so dass

$$d(\phi(x), \phi(y)) \leq \gamma d(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in X \text{ erfüllt ist.}$$

(3.7) Lemma Sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall mit $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Sei außerdem $n \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ die Menge der stetigen Funktionen $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dann ist $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ mit

$$\|f\|_\infty = \sup\{\|f(x)\| \mid x \in I\}$$

ein Banachraum, also ein vollständiger normierter \mathbb{R} -Vektorraum.

Beweis: Zunächst zeigen wir, dass durch $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm auf $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ gegeben ist. Sei dazu $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ vorgegeben. Ist f die Nullfunktion, dann gilt $\|f(x)\| = 0$ für alle $x \in I$, und es folgt $\|f\|_\infty = 0$. Setzen wir umgekehrt $\|f\|_\infty = 0$ voraus, dann folgt $\|f(x)\| = 0$ und auf Grund der Normeigenschaft von $\|\cdot\|$ auch $f(x) = 0$ für alle $x \in I$. Also ist in diesem Fall f der Nullvektor in $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$.

Ist $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ und $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt für alle $x \in I$ die Abschätzung

$$\|\lambda f(x)\| = |\lambda| \|f(x)\| \leq |\lambda| \|f\|_\infty$$

und somit auch $\|\lambda f\|_\infty \leq |\lambda| \|f\|_\infty$. Setzen wir $g = \lambda f$, dann erhalten wir ebenso

$$\|f\|_\infty = \|\frac{1}{\lambda} g\|_\infty \leq |\frac{1}{\lambda}| \|g\|_\infty = \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda f\|_\infty,$$

also $|\lambda| \|f\|_\infty \leq \|\lambda f\|_\infty$ und insgesamt Gleichheit. Für $\lambda = 0$ ist die Gleichung $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty$ offenbar ebenfalls erfüllt. Zum Beweis der Dreiecksungleichung seien $f, g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ vorgegeben. Für alle $x \in I$ ist

$$\|(f + g)(x)\| = \|f(x) + g(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty,$$

also auch $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. Damit sind die Normeigenschaften nachgewiesen.

Sei nun $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$. Dann gibt es für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $K \in \mathbb{N}$, so dass $\|f_k - f_m\|_\infty < \varepsilon$ für alle $k, m \geq K$ erfüllt ist. Es folgt $\|f_k(x) - f_m(x)\| \leq \varepsilon$ für alle $x \in I$ und $k, m \geq K$, d.h. die Folge $(f_m(x))_{m \in \mathbb{N}}$ ist für jedes $x \in I$ eine Cauchyfolge in \mathbb{R}^n . Da der \mathbb{R}^n bezüglich jeder Norm vollständig ist, konvergiert die Folge $(f_m(x))_{m \in \mathbb{N}}$ gegen einen Vektor $f(x) \in \mathbb{R}^n$. Zu zeigen ist, dass die auf diese Weise definierte Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und ein Grenzwert der Folge $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ ist.

Wir beweisen die Stetigkeit von f mit Hilfe des ε - δ -Kriteriums. Seien $c \in I$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Dann existiert ein $K \in \mathbb{N}$ mit $\|f_k - f_m\|_\infty < \frac{1}{3}\varepsilon$ für alle $k, m \geq K$. Auf Grund der Stetigkeit der Normfunktion auf \mathbb{R}^n gilt

$$\|f_K(x) - f(x)\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|f_K(x) - f_m(x)\| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \|f_K - f_m\|_\infty \leq \frac{1}{3}\varepsilon$$

für alle $x \in I$. Weil die Funktion f_K im Punkt c stetig ist, gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ mit $\|f_K(x) - f_K(c)\| < \frac{1}{3}\varepsilon$ für alle $x \in I$ mit $|x - c| < \delta$. Es folgt

$$\|f(x) - f(c)\| \leq \|f(x) - f_K(x)\| + \|f_K(x) - f_K(c)\| + \|f_K(c) - f(c)\| < \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon$$

für alle $x \in I$ mit $|x - c| < \delta$. Damit ist die Stetigkeit von f bewiesen. Wir wenden nun die Cauchyfolgen-Eigenschaft noch einmal an, um zu zeigen, dass f der Grenzwert der Folge $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ ist. Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ gibt es ein $K \in \mathbb{N}$ mit $\|f_k - f_m\|_\infty < \varepsilon$ für alle $k, m \geq K$, also $\|f_k(x) - f_m(x)\| < \varepsilon$ für alle $x \in I$ und $k, m \geq K$. Durch Grenzübergang $m \rightarrow \infty$ erhalten wir $\|f_k(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$ für alle $x \in I$ und $k \geq K$, also $\|f_k - f\|_\infty \leq \varepsilon$ für $k \geq K$. Also ist f tatsächlich der Grenzwert der Folge $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ im \mathbb{R} -Vektorraum $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$. \square

(3.8) Lemma Sei $\bar{B} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Teilmenge. Dann ist die Menge der Funktionen $\mathcal{C}(I, \bar{B})$ abgeschlossen in $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$. Also ist $\mathcal{C}(I, \bar{B})$ bezüglich der Metrik $d(f, g) = \|f - g\|_\infty$ ein vollständiger metrischer Raum.

Beweis: Sei $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{C}(I, \bar{B})$, die in $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ einen Grenzwert f besitzt. Zu zeigen ist, dass $f \in \mathcal{C}(I, \bar{B})$ gilt. Ist $x \in I$ ein beliebiger Punkt, dann bilden die Vektoren $f_m(x)$ eine Folge in \mathbb{R}^n , die wegen

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m(x) - f(x)\| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m - f\|_\infty = 0$$

gegen $f(x)$ konvergiert. Weil \bar{B} in \mathbb{R}^n abgeschlossen ist und alle Vektoren in $f_m(x)$ in \bar{B} liegen, gilt dasselbe auch für den Grenzwert $f(x)$. Damit haben wir gezeigt, dass f eine Funktion $I \rightarrow \bar{B}$ ist. \square

(3.9) Satz (Existenzsatz von Picard-Lindelöf)

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Dann gibt es zu jedem Punkt $(a, b) \in D$ ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ und eine Lösung

$$\varphi :]a - \delta, a + \delta[\rightarrow \mathbb{R}^n$$

der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ mit $\varphi(a) = b$.

Beweis: Sei $(a, b) \in D$ vorgegeben, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein hinreichend kleines kompaktes Intervall mit a in seinem Inneren und $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, so dass die Menge $X = I \times \bar{B}_\varepsilon(b)$ in D enthalten ist und f auf X eine Lipschitz-Bedingung mit einer Lipschitz-Konstanten $L \in \mathbb{R}^+$ genügt. Weil X kompakt und f stetig ist, gibt es ein $m \in \mathbb{R}_+$ mit $\|f(t, x)\| \leq m$ für alle $(t, x) \in X$. Weiter wählen wir $\delta \in \mathbb{R}^+$ so klein, dass das Intervall $J = [a - \delta, a + \delta]$ in I enthalten ist und die Ungleichungen $L\delta < 1$ sowie $m\delta < \varepsilon$ gelten.

Wir definieren nun auf dem Banachraum $V = \mathcal{C}(J, \mathbb{R}^n)$ mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$ die Abbildung

$$\Phi : V \longrightarrow V \quad \text{gegeben durch} \quad \Phi(\varphi)(x) = b + \int_a^x f(t, \varphi(t)) dt$$

sowie die Teilmenge $Y = \mathcal{C}(J, \bar{B}_\varepsilon(b))$ von V . Dann ist Y nach (3.8) mit $d(\varphi, \psi) = \|\varphi - \psi\|_\infty$ ebenfalls ein Banachraum. Für alle $\varphi \in Y$ und $x \in J$ gilt

$$\|\Phi(\varphi)(x) - b\| \leq \left\| \int_a^x f(t, \varphi(t)) dt \right\| \leq m\delta < \varepsilon,$$

also ist auch $\Phi(\varphi)$ in Y enthalten, und folglich ist Φ eine Abbildung $Y \rightarrow Y$. Um den Banachschen Fixpunktsatz anwenden zu können, zeigen wir, dass es sich bei Φ um eine Kontraktion handelt. Seien $\varphi, \psi \in Y$ vorgegeben. Für jedes $t \in J$ gilt nach Voraussetzung $\varphi(t), \psi(t) \in \bar{B}_\varepsilon(b)$, und auf Grund der Lipschitz-Bedingung gilt $\|f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))\| \leq L\|\varphi(t) - \psi(t)\|$. Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} \|\Phi(\varphi) - \Phi(\psi)\|_\infty &= \sup_{x \in J} \left\| \int_a^x (f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))) dt \right\| \\ &\leq \sup_{x \in J} \int_a^x \|f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))\| dt \leq \sup_{x \in J} |x - a| \cdot L \cdot \|\varphi - \psi\|_\infty = \delta L \|\varphi - \psi\|_\infty. \end{aligned}$$

Wegen $\delta L < 1$ ist die Kontraktionseigenschaft damit nachgewiesen. Sei nun $\varphi \in Y$ ein Fixpunkt von Φ . Aus $\Phi(\varphi) = \varphi$ folgt dann

$$\varphi(x) = b + \int_a^x f(t, \varphi(t)) dt \quad \forall x \in J \quad \text{und} \quad \varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad \text{für alle} \quad x \in J. \quad \square$$

(3.10) Folgerung Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt, und $(a, b) \in D$. Dann gibt es ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $a \in I$ und eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, so dass gilt

- (i) $\varphi(a) = b$ und $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ für alle $x \in I$
- (ii) Ist $J \subseteq \mathbb{R}$ ein weiteres offenes Intervall mit $a \in J$ und $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Funktion mit $\psi(a) = b$ und $\psi'(x) = f(x, \psi(x))$ für alle $x \in J$, dann gilt $J \subseteq I$ und $\varphi|_J = \psi$.

Man bezeichnet φ als **maximale Lösung** des Anfangswertproblems gegeben durch die gewöhnliche Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ und das Paar (a, b) .

Beweis: Auf Grund des Existenzsatzes gibt es zumindest ein $\delta \in \mathbb{R}^+$, so dass auf dem offenen Intervall $I_\delta =]a - \delta, a + \delta[$ eine Lösung φ des Anfangswertproblems existiert. Sei x_+ das Supremum über alle $x > a$ mit der Eigenschaft, dass es auf $]a - \delta, x[$ eine solche Lösung gibt. Dann ist $a + \delta \leq x_+ \leq +\infty$, und auf $]a - \delta, x_+[$ existiert eine Lösung.

Ebenso bilden wir das Infimum x_- über alle $x < a$ mit der Eigenschaft, dass auf $]x, a + \delta[$ eine Lösung existiert. Dann gilt $-\infty \leq x_- \leq a - \delta$, und auf $]x_-, a + \delta[$ gibt es eine Lösung φ_- . Auf Grund des Eindeutigkeitsatzes stimmen φ_- und φ_+ auf I_δ überein, so dass wir insgesamt eine Lösung φ auf $I =]x_-, x_+[$ erhalten, mit $\varphi|_{]a - \delta, x_+[} = \varphi_+$ und $\varphi|_{]x_-, a + \delta[} = \varphi_-$.

Sei nun $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ wie unter (ii) angegeben. Ist J keine Teilmenge von I , dann gibt es ein $c \in J$ mit $c > x_+$ oder $c < x_-$. Nehmen wir an, dass der erste Fall eintritt. Wegen des Eindeutigkeitsatzes stimmen φ und ψ auf $]a, x_+[$ überein, und wir erhalten insgesamt eine Lösung auf $]a - \delta, c[$, im Widerspruch zur Definition von x_+ als Supremum. Genauso kann $c < x_-$ ausgeschlossen werden. Die Gleichung $\varphi|_J = \psi$ folgt wiederum aus dem Eindeutigkeitsatz. \square

Wir formulieren den Existenz- und Eindeutigkeitsatz in der letzten Version noch einmal für Differentialgleichungen n -ter Ordnung. Auf Grund der Bemerkung zur Korrespondenz zwischen Lösungen eines Systems erster Ordnung und einer DGL n -ter Ordnung (im Anschluss an (3.3)) folgt diese Aussage unmittelbar aus der soeben bewiesenen (3.10).

(3.11) Folgerung Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt, und $(a, b) \in D$, $b = (b_0, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. Dann gibt es ein offenes Intervall I mit $a \in I$ und eine n -mal stetig differenzierbare Funktion $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit den folgenden Eigenschaften.

- (i) Die Funktion φ ist eine Lösung der DGL $y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)})$ mit $b_k = \varphi^{(k)}(a)$ für $0 \leq k \leq n - 1$.
- (ii) Ist $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine weitere Lösung auf einem offenen Intervall mit den unter (i) genannten Eigenschaften, dann gilt $J \subseteq I$ und $\varphi|_J = \psi$.

Neben dem hier bewiesenen Existenz- und Eindeutigkeitsatz spielt auch der sog. *Existenzsatz von Peano* in der Theorie der Differentialgleichungen eine wichtige Rolle, bei dem für f nur die Stetigkeit, aber keine lokale Lipschitz-Bedingung gefordert wird. Unter diesen Voraussetzungen existiert eine Lösung der DGL. Sie ist aber nicht mehr eindeutig bestimmt, noch nicht einmal lokal, wie das Beispiel nach (3.6) zeigt.

(3.12) Satz (*Existenzsatz von Peano*)

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und $(a, b) \in D$. Dann gibt es ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $a \in I$ und eine Lösung $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ von $y' = f(x, y)$ mit $\varphi(a) = b$.

Aus Zeitgründen verzichten wir auf den Beweis dieses Satzes.

3.2 Elementare Lösungsmethoden

Inhaltsübersicht

- ☆ Differentialgleichungen mit getrennten Variablen
- ☆ Lösung durch Substitution
- ☆ Variation der Konstanten

(a) Differentialgleichungen mit getrennten Variablen

(3.13) Definition Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle und $f : I \rightarrow \mathbb{R}, g : J \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen, wobei $g(y) \neq 0$ für alle $y \in J$ gilt. Dann nennt man

$$y' = f(x)g(y)$$

eine Differentialgleichung mit *getrennten Variablen*.

Seien f, g wie in (3.13) angegeben und $(a, b) \in I \times J$. Dann findet man eine Lösung φ der DGL $y' = f(x)g(y)$ durch Ausführung der folgenden Einzelschritte.

- (1) Zunächst berechnet man Stammfunktionen $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $G : J \rightarrow \mathbb{R}$ der beiden Funktionen f und $1/g$ auf I mit $F(a) = G(b) = 0$.
- (2) Dann bestimmt man die Umkehrfunktion $H : J' \rightarrow J$ von G (mit $J' = G(J)$).
- (3) Sei $I' \subseteq I$ ein Intervall mit $a \in I'$ und $F(I') \subseteq J'$. Dann ist durch $\varphi = H \circ F$ eine Lösung von $y' = f(x)g(y)$ mit $\varphi(a) = b$ gegeben.

Wir überprüfen kurz, dass die drei Schritte in dieser Form durchführbar sind und tatsächlich eine Lösung φ der DGL mit $\varphi(a) = b$ liefern. Weil f und g stetig sind, erhält man durch

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \text{und} \quad G(y) = \int_b^y \frac{dt}{g(t)}$$

Stammfunktionen von f und $1/g$ mit $F(a) = G(b) = 0$. Weil die Funktion $1/g$ nirgends auf dem Intervall J den Wert Null annimmt, gilt entweder $1/g(y) > 0$ oder $1/g(y) < 0$, für alle $y \in J$. Deshalb ist die Funktion G auf dem gesamten Intervall J entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend. Deshalb besitzt $G : J \rightarrow J'$ eine Umkehrfunktion $H : J' \rightarrow J$.

Die Funktion $\varphi = H \circ F$ ist auf dem Intervall I' tatsächlich eine Lösung der DGL. Denn für alle $x \in I'$ gilt $\varphi(x) = (H \circ F)(x) \Leftrightarrow (G \circ \varphi)(x) = F(x)$, und mit der Kettenregel erhält man

$$(G \circ \varphi)'(x) = F'(x) \Leftrightarrow G'(\varphi(x))\varphi'(x) = F'(x) \Leftrightarrow \frac{\varphi'(x)}{g(\varphi(x))} = f(x) \Leftrightarrow \varphi'(x) = f(x)g(\varphi(x)).$$

Außerdem gilt $G(b) = 0 \Leftrightarrow b = H(0)$ und folglich $\varphi(a) = H(F(a)) = H(0) = b$.

Beispiel: Wir bestimmen für jedes $c \in \mathbb{R}^+$ eine Lösung φ_c der Differentialgleichung

$$y' = y^2 \quad \text{mit} \quad \varphi_c(0) = c$$

im Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Dazu betrachten wir die Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1$ und $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto y^2$. Die zugehörigen Funktionen F und G sind dann definiert durch

$$F(x) = \int_0^x dt = x \quad \text{und} \quad G(y) = \int_c^y \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} \Big|_c^y = \frac{1}{c} - \frac{1}{y}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}^+$. Wegen $G(]0, +\infty[) =]-\infty, \frac{1}{c}[$ können wir $I' =]-\infty, \frac{1}{c}[$ wählen; dies ist das maximale offene Intervall mit $F(I') = I' \subseteq G(]0, +\infty[)$. Die Umkehrfunktion H von G erhält man durch die Umformung

$$x = G(y) \Leftrightarrow x = \frac{1}{c} - \frac{1}{y} \Leftrightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{c} - x \Leftrightarrow y = \frac{1}{\frac{1}{c} - x} = \frac{c}{1 - cx},$$

die gesuchte Funktion ist also $y = H(x)$. Für alle $x \in I'$ gilt $H(F(x)) = H(x) = \frac{c}{1 - cx}$. Durch $\varphi_c(x) = \frac{c}{1 - cx}$ ist also eine Lösung $\varphi_c : I' \rightarrow \mathbb{R}$ der DGL mit $\varphi_c(0) = c$ definiert. Tatsächlich gilt

$$\varphi_c'(x) = (-c^2)(-1)(1 - cx)^{-2} = \frac{c^2}{(1 - cx)^2} = \left(\frac{c}{1 - cx}\right)^2 = \varphi_c(x)^2.$$

für alle $x \in I'$.

(b) Lösung durch Substitution

In vielen Fällen kann die DGL durch eine geeignete **Substitution** in eine Form gebracht werden, die leichter gelöst werden kann. Gegeben sei eine stetige Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Gesucht wird für die DGL $y' = f(x, y)$ und für vorgegebenes $(a, b) \in D$ eine Lösung $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi(a) = b$. Die heuristische Vorgehensweise ist nun

- (1) Wähle geeignete Substitutionsfunktion g und definiere eine neue Variable z durch $z = g(x, y)$.
- (2) Bilde durch Umstellen und symbolisches Ableiten eine Gleichung der Form $y' = h(x, z, z')$.
- (3) Setze y und y' in die DGL $y' = f(x, y)$ ein, um eine DGL in z zu erhalten.
- (4) Bestimme eine Lösung ψ dieser DGL mit $\psi(a) = g(a, b)$.
- (5) Stelle die Gleichung $\psi(t) = g(t, \varphi(t))$ nach $\varphi(t)$ um, damit eine Lösung $\varphi(t)$ der ursprünglichen DGL mit $\varphi(a) = b$ zu erhalten.

Beispiel: Wir suchen eine Lösung φ der DGL

$$y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} + 1 \quad \text{mit} \quad \varphi(1) = 1.$$

Hier ist es naheliegend, die DGL durch die Substitution $z = g(x, y) = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = xz$ zu vereinfachen. Symbolisches Ableiten ergibt

$$y' = (xz)' = x'z + xz' = z + xz'$$

und durch Einsetzen in die ursprüngliche DGL erhalten wir

$$z + xz' = z^2 + z + 1 \Leftrightarrow xz' = z^2 + 1 \Leftrightarrow z' = \frac{1}{x}(z^2 + 1).$$

Gesucht wird eine Lösung mit ψ mit $\psi(1) = g(1, 1) = \frac{1}{1} = 1$. Dies kann durch Trennung der Variablen erreicht werden, denn es ist $z' = u(x)v(z)$ mit den Funktionen $u(x) = \frac{1}{x}$ und $v(z) = z^2 + 1$. Durch

$$U(x) = \ln(x) \quad \text{und} \quad V(z) = \arctan(z) - \frac{1}{4}\pi$$

sind Stammfunktionen von u und $1/v$ mit $U(1) = V(1) = 0$ gegeben. Durch die Umformung

$$t = \arctan(z) - \frac{1}{4}\pi \Leftrightarrow \arctan(z) = t + \frac{1}{4}\pi \Leftrightarrow z = \tan(t + \frac{1}{4}\pi)$$

erhalten wir mit $W(t) = \tan(t + \frac{1}{4}\pi)$ eine Umkehrfunktion von V . Nach dem allgemeinen Lösungsschema ist dann

$$\psi(t) = (W \circ U)(t) = W(\ln(t)) = \tan(\ln(t) + \frac{1}{4}\pi)$$

eine Lösung mit $\psi(1) = 1$. Die Gleichung $\psi(t) = g(t, \varphi(t)) = \frac{\varphi(t)}{t}$ wird zu $\varphi(t)$ umgestellt und liefert die Lösung

$$\varphi(t) = t\psi(t) = t \cdot \tan(\ln(t) + \frac{1}{4}\pi).$$

Tatsächlich gilt $\varphi(1) = 1 \cdot \tan(\ln(1) + \frac{1}{4}\pi) = \tan(\frac{1}{4}\pi) = 1$ und wegen $\tan'(x) = \tan(x)^2 + 1$ auch

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \tan(\ln(t) + \frac{1}{4}\pi) + t \cdot (\tan(\ln(t) + \frac{1}{4}\pi)^2 + 1) \cdot \frac{1}{t} = \tan(\ln(t) + \frac{1}{4}\pi)^2 + \tan(\ln(t) + \frac{1}{4}\pi) + 1 \\ &= \psi(t)^2 + \psi(t) + 1 = \frac{\varphi(t)^2}{t^2} + \frac{\varphi(t)}{t} + 1. \end{aligned}$$

(c) Variation der Konstanten

(3.14) Definition Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, und seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann nennt man

$$y' = f(x)y + g(x)$$

eine *lineare DGL* erster Ordnung. Ist $g(x) = 0$ für alle $x \in I$, dann spricht man von einer *homogenen*, ansonsten von einer *inhomogenen* Differentialgleichung.

Für jedes Paar $(a, b) \in I \times \mathbb{R}$ lässt sich eine Lösung $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ der homogenen DGL mit $\varphi(a) = b$ leicht angeben. Definiert man nämlich

$$F : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_a^x f(t) dt \quad \text{und} \quad \varphi(x) = be^{F(x)} \quad \text{für } x \in I,$$

dann gilt auf $F'(x) = f(x)$ auf Grund des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung und $\varphi'(x) = be^{F(x)}F'(x) = be^{F(x)}f(x) = f(x)\varphi(x)$ auf Grund der Kettenregel, jeweils für alle $x \in I$.

Für die Lösung inhomogener linearer DGL der Form $y'(x) = f(x)y + g(x)$ kommt nun die **Variation der Konstanten** zum Einsatz. Sei $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ die bereits gefundene Lösung der homogenen linearen DGL $y'(x) = f(x)y$ mit $\varphi(a) = 1$. Für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist dann $\varphi_c = c\varphi$ eine Lösung mit $\varphi_c(a) = c\varphi(a) = c$. Der entscheidende Ansatz besteht nun darin, die Konstante c durch eine Funktion $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ zu ersetzen (daher der Name des Verfahrens), so dass $\psi(x) = u(x)\varphi(x)$ zu einer Lösung der inhomogenen DGL wird.

Es kommt also daran an, eine passende Funktion u zu finden. Aus $\psi = u\varphi$ folgt $\psi' = u\varphi' + u'\varphi$. Dass es sich bei ψ um eine Lösung der inhomogenen DGL handelt, ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} \psi'(x) = f(x)\psi(x) + g(x) &\Leftrightarrow u(x)\varphi'(x) + u'(x)\varphi(x) = f(x)u(x)\varphi(x) + g(x) \Leftrightarrow \\ u(x)f(x)\varphi(x) + u'(x)\varphi(x) &= u(x)f(x)\varphi(x) + g(x) \Leftrightarrow u'(x)\varphi(x) = g(x) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Die letzte Gleichung ist äquivalent zu

$$u(x) = b + \int_a^x \frac{g(t)}{\varphi(t)} dt \quad \text{für alle } x \in I, \quad (3.16)$$

mit einer geeigneten Konstanten $b \in \mathbb{R}$. Dabei ist zu beachten, dass nach Definition der homogenen Lösung $\varphi(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ gilt. Definieren wir die Funktion u also wie in (3.16) angegeben, und setzen wir $\psi = u\varphi$, dann ist ψ eine Lösung der inhomogenen DGL mit $\psi(a) = b$.

Beispiel: Wir bestimmen für jedes $b \in \mathbb{R}$ eine Lösung $\psi_b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der DGL

$$y' = 2xy + x^3 \quad \text{mit } \psi_b(0) = b.$$

Diese inhomogene lineare DGL ist aus den Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = 2x$ und $g(x) = x^3$ aufgebaut. Die zugehörige Funktion F erhalten wir durch

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x 2t dt = t^2 \Big|_0^x = x^2.$$

Somit ist $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{x^2}$ eine Lösung der homogenen linearen DGL $y' = 2xy$ mit $\varphi(0) = 1$. Um die inhomogene lineare DGL zu lösen, bestimmen wir die Hilfsfunktion u . Mit Hilfe der Substitutionsregel und durch partielle Integration erhalten wir

$$\begin{aligned} u(x) &= b + \int_0^x \frac{g(t)}{\varphi(t)} dt = b + \int_0^x \frac{t^3}{e^{t^2}} dt = b + \frac{1}{2} \int_0^x (2t)t^2 e^{-t^2} dt = \\ b + \frac{1}{2} \int_0^{x^2} s e^{-s} ds &= b - \frac{1}{2} s e^{-s} \Big|_0^{x^2} + \frac{1}{2} \int_0^{x^2} e^{-s} ds = b - \frac{1}{2} s e^{-s} - \frac{1}{2} e^{-s} \Big|_0^{x^2} = \\ b - \frac{1}{2} x^2 e^{-x^2} - \frac{1}{2} e^{-x^2} + \frac{1}{2} &= b + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (x^2 + 1) e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Durch $\psi_b(x) = \varphi(x)u(x) = (b + \frac{1}{2})e^{x^2} - \frac{1}{2}(x^2 + 1)$ ist also eine Lösung mit $\psi_b(0) = b$ gegeben.

3.3 Systeme linearer Differentialgleichungen

Inhaltsübersicht

- ☆ Lineare Systeme von Differentialgleichungen haben die Form $y' = A(x)y + b(x)$ mit einer matrixwertigen Funktion A und einer vektorwertigen Funktion b .
- ☆ Die Lösungen eines n -dimensionalen homogenen Systems (d.h. mit $b(x) = 0$) bilden einen Vektorraum. Eine Basis dieses Vektorraums bezeichnet man als *Fundamentalsystem*.
- ☆ Wie in der Linearen Algebra erhält man alle Lösungen eines inhomogenen Systems, indem man zu einer speziellen inhomogenen Lösung die Lösungen des homogenen Systems addiert. Eine spezielle Lösung erhält man durch die Methode „Variation der Konstanten“.
- ☆ Die Lösung von Systemen der Form $y' = Ay$ (homogen, mit konstanter matrixwertiger Funktion A) erfordert nur Lineare Algebra: Sobald man die Eigenwerte und Eigenvektoren von A kennt, lassen sich alle Lösungen leicht angeben.

(3.15) Definition Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $A : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ eine stetige Abbildung von I in den Raum der reellen $n \times n$ -Matrizen. Sei $b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine weitere stetige Funktion. Dann nennt man

$$y' = A(x)y + b(x)$$

ein *lineares System* von Differentialgleichungen. Ist die Funktion b konstant Null, dann spricht man von einem *homogenen*, sonst von einem *inhomogenen* System.

Neben diesen reellwertigen betrachtet man häufig auch *komplexwertige* lineare Systeme von Differentialgleichungen. Dabei werden A und b durch Abbildungen nach $\mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ bzw. \mathbb{C}^n ersetzt. Der Definitionsbereich der Funktionen ist aber weiterhin ein Intervall in den reellen Zahlen. Im Folgenden bezeichnet \mathbb{K} einen der Körper \mathbb{R} oder \mathbb{C} .

Für lineare Systeme von Differentialgleichungen nimmt der Existenz- und Eindeigkeitssatz die folgende Form an.

(3.16) Satz Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $a \in I$ und $c \in \mathbb{K}^n$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Lösung $\varphi : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ des Systems $y' = A(x)y + b(x)$ mit $\varphi(a) = c$.

Beweis: Sei die Funktion $f : I \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ gegeben durch $f(x, y) = A(x)y + b(x)$ auf $I \times \mathbb{K}^n$. Ist $K \subseteq I$ ein kompaktes Teilintervall, dann ist

$$L = \sup\{\|A(x)\| \mid x \in K\}$$

endlich, wobei $\|A(x)\|$ jeweils die in der Analysis mehrerer Variablen eingeführte *Operatornorm* bezeichnet. Für alle $x \in K$ und $y, \tilde{y} \in \mathbb{K}^n$ gilt dann

$$\|f(x, y) - f(x, \tilde{y})\| = \|A(x)(y - \tilde{y})\| \leq L\|y - \tilde{y}\|.$$

Also genügt f einer lokalen Lipschitz-Bedingung, und somit gibt es nach (3.10) ein eindeutig bestimmtes, maximales offenes Intervall $J \subseteq K$ mit $a \in J$ und eine eindeutig bestimmte Lösung $\varphi : J \rightarrow \mathbb{K}^n$ mit $\varphi(a) = c$.

Nehmen wir nun an, dass $\sup J < \sup K$ gilt. Sei $\delta \in \mathbb{R}^+$ so gewählt, dass $L\delta < 1$ und $\sup J + \delta < \sup K$ gilt. Sei außerdem $a_1 \in J$ ein Punkt mit $a_1 + \delta > \sup J$. Wie im Beweis von (3.9) gezeigt wurde, existiert eine Lösung ψ auf $I_\delta =]a_1 - \delta, a_1 + \delta[$ mit $\psi(a_1) = \varphi(a_1)$. Auf Grund der Eindeutigkeit in Folge der Lipschitz-Bedingung stimmen φ und ψ auf $J \cap I_\delta$ überein. Wir erhalten also insgesamt eine Lösung, die auf $J \cup I_\delta$ definiert ist, was der Maximalität der Lösung φ auf J widerspricht. Also muss $\sup J = \sup K$ gelten. Ebenso beweist man $\inf J = \inf K$. Insgesamt haben wir damit gezeigt, dass die Lösung φ auf das Innere jedes kompakten Teilintervalls $K \subseteq I$ fortgesetzt werden kann. Damit ist φ auf ganz I fortsetzbar. \square

Nun sehen wir uns die Gesamtheit der Lösungen eines homogenen linearen Systems genauer an.

(3.17) Satz Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nichtleeres offenes Intervall, $A : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}$ eine stetige Abbildung und \mathcal{L}_0 die Menge aller Lösungen von $y' = A(x)y$ auf dem Intervall I . Dann ist \mathcal{L}_0 ein n -dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum. Ist $m \in \mathbb{N}$, dann sind für ein m -Tupel $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ von Lösungen die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) Die Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ sind linear unabhängig.
- (ii) Es gibt es $a \in I$, so dass $\varphi_1(a), \dots, \varphi_m(a)$ in \mathbb{K}^n linear unabhängig sind.
- (iii) Für alle $a \in I$ sind die Vektoren $\varphi_1(a), \dots, \varphi_m(a)$ in \mathbb{K}^n linear unabhängig.

Beweis: Zunächst zeigen wir, dass es sich bei \mathcal{L}_0 tatsächlich um einen \mathbb{K} -Vektorraum handelt. Die Nullfunktion $0 : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ erfüllt offensichtlich die Gleichung $0' = A(x)0$, also ist 0 in \mathcal{L}_0 enthalten. Seien nun $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_0$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ vorgegeben. Dann liegen auch $\varphi + \psi$ und $\lambda\varphi$ in \mathcal{L}_0 , denn für alle $x \in I$ gilt

$$(\varphi + \psi)'(x) = \varphi'(x) + \psi'(x) = A(x)\varphi(x) + A(x)\psi(x) = A(x)(\varphi + \psi)(x)$$

und $(\lambda\varphi)'(x) = \lambda\varphi'(x) = \lambda A(x)\varphi(x) = A(x)(\lambda\varphi)(x)$.

Nun beweisen wir die Äquivalenz der Aussagen (i) bis (iii). Die Implikation "(iii) \Rightarrow (ii)" ist offensichtlich. Zum Beweis von "(ii) \Rightarrow (i)" seien $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ mit $\sum_{k=1}^m \lambda_k \varphi_k = 0$ vorgegeben. Dann gilt insbesondere

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k \varphi_k(a) = 0 \quad ,$$

und auf Grund der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\varphi_1(a), \dots, \varphi_m(a)$ folgt $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$. Damit ist die lineare Unabhängigkeit der Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ bewiesen. Nun zeigen wir noch "(i) \Rightarrow (iii)". Angenommen, es gibt ein $a \in I$, so dass die Vektoren $\varphi_1(a), \dots, \varphi_m(a)$ linear abhängig sind. Dann gibt es Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$, nicht alle gleich Null, mit

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k \varphi_k(a) = 0.$$

Sei nun $\varphi = \sum_{k=1}^m \lambda_k \varphi_k \in \mathcal{L}_0$. Dann gilt $\varphi(a) = 0$. Nach (3.16) besitzt das System $y' = A(x)y$ nur eine Lösung ψ mit $\psi(a) = 0$, und das ist die Nullfunktion. Also folgt $\varphi = 0$, im Widerspruch zur Voraussetzung, dass die Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ linear unabhängig sind.

Es bleibt zu zeigen, dass $\dim \mathcal{L}_0 = n$ gilt. Seien dazu e_1, \dots, e_n die Einheitsvektoren im \mathbb{R}^n , und sei $a \in I$ beliebig gewählt. Für $1 \leq k \leq n$ sei $\varphi_k \in \mathcal{L}_0$ das eindeutig bestimmte Element des Lösungsraums mit $\varphi_k(a) = e_k$. Weil die Vektoren $\varphi_1(a), \dots, \varphi_n(a)$ linear unabhängig sind, gilt auf Grund der Implikation "(ii) \Rightarrow (i)" dasselbe auch für die Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Daraus folgt zunächst $\dim \mathcal{L}_0 \geq n$. Nehmen wir nun an, dass $\dim \mathcal{L}_0 > n$ gilt. Dann gibt es $n + 1$ linear unabhängige Funktionen $\psi_1, \dots, \psi_{n+1}$ in \mathcal{L}_0 . Wegen "(i) \Rightarrow (iii)" wären dann auch die Vektoren $\psi_1(a), \dots, \psi_{n+1}(a) \in \mathbb{K}^n$ linear unabhängig. Aber dies ist wegen $\dim \mathbb{K}^n = n$ unmöglich. \square

Jedes Tupel $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ von Elementen aus \mathcal{L}_0 kann mit einer Funktion $\Phi : I \rightarrow \mathcal{M}_{n, \mathbb{K}}$ identifiziert werden, bei der $\varphi_1(a), \dots, \varphi_n(a)$ für jedes $a \in I$ jeweils die Spalten der Matrix $\Phi(a)$ sind. Die Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ bilden nach (3.17) genau dann eine Basis von \mathcal{L}_0 , wenn $\det \Phi(a) \neq 0$ gilt. Ist dies erfüllt, dann bezeichnet man Φ als ein **Fundamentalsystem von Lösungen** des linearen Systems. Durch Vergleich der einzelnen Spalten sieht man, dass

$$\Phi'(x) = A(x)\Phi(x) \quad \text{für alle } x \in I$$

gilt, wobei die Matrix $\Phi'(x)$ durch Differentiation der einzelnen Einträge von $\Phi(x)$ zu Stande kommt.

Beispiel: Für eine beliebige Konstante $\omega \in \mathbb{R}^+$ betrachten wir das lineare System von DGL gegeben durch $y_1' = -\omega y_2$ und $y_2' = \omega y_1$. In Matrixschreibweise ist dies $y' = A(x)y$ mit der konstanten Funktion

$$A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{2, \mathbb{R}} \quad , \quad x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}.$$

Durch $\varphi_1(x) = (\cos(\omega x), \sin(\omega x))$ und $\varphi_2(x) = (-\sin(\omega x), \cos(\omega x))$ sind zwei spezielle Lösungen des Systems gegeben. Denn einerseits gilt $\varphi_1'(x) = (-\omega \sin(\omega x), \omega \cos(\omega x))$ und $\varphi_2'(x) = (-\omega \cos(\omega x), -\omega \sin(\omega x))$, andererseits aber auch

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\omega x) \\ \sin(\omega x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega \sin(\omega x) \\ \omega \cos(\omega x) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin(\omega x) \\ \cos(\omega x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega \cos(\omega x) \\ -\omega \sin(\omega x) \end{pmatrix}$$

Weiter ist

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \cos(\omega x) & -\sin(\omega x) \\ \sin(\omega x) & \cos(\omega x) \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen, denn $\Phi(0)$ ist die Einheitsmatrix mit $\det \Phi(0) = 1 \neq 0$.

Nun wenden wir uns den Lösungsmengen der **inhomogenen** linearen Systeme zu.

(3.18) Satz Sei $y' = A(x)y + b(x)$ eine inhomogene lineare DGL, \mathcal{L} die Menge ihrer Lösungen und \mathcal{L}_0 der \mathbb{K} -Vektorraum der Lösungen von $y' = A(x)y$. Ist $\psi_0 : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems, dann gilt

$$\mathcal{L} = \psi_0 + \mathcal{L}_0.$$

Beweis: “ \subseteq ” Sei $\psi \in \mathcal{L}$ und $\varphi = \psi - \psi_0$. Dann gilt für alle $x \in I$ die Gleichung

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \psi'(x) - \psi_0'(x) = (A(x)\psi(x) + b(x)) - (A(x)\psi_0(x) + b(x)) \\ &= A(x)(\psi - \psi_0)(x) = A(x)\varphi(x).\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $\varphi \in \mathcal{L}_0$ enthalten ist, und folglich gilt $\psi = \psi_0 + \varphi \in \psi_0 + \mathcal{L}_0$.

“ \supseteq ” Sei $\psi \in \psi_0 + \mathcal{L}_0$, also $\psi = \psi_0 + \varphi$ für ein $\varphi \in \mathcal{L}_0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= (\psi_0 + \varphi)'(x) = \psi_0'(x) + \varphi'(x) = A(x)\psi_0(x) + b(x) + A(x)\varphi(x) \\ &= A(x)(\psi_0 + \varphi)(x) + b(x) = A(x)\psi(x) + b(x)\end{aligned}$$

und folglich $\psi \in \mathcal{L}$. □

Die Methode der Variation der Konstanten lässt sich auf den mehrdimensionalen Fall verallgemeinern.

(3.19) Satz Sei $y' = A(x)y + b(x)$ ein inhomogenes lineares System von Differentialgleichungen und Φ ein Fundamentalsystem von Lösungen des zugehörigen homogenen Systems. Dann erhält man eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems durch

$$\psi(x) = \Phi(x)u(x) \quad \text{mit} \quad u(x) = \int_a^x \Phi(t)^{-1}b(t) dt.$$

Beweis: Aus $\psi(x) = \Phi(x)u(x)$ und $u'(x) = \Phi^{-1}(x)b(x)$ für alle $x \in I$ folgt

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= \Phi'(x)u(x) + \Phi(x)u'(x) = \Phi'(x)u(x) + \Phi(x)\Phi(x)^{-1}b(x) = \\ &= \Phi'(x)u(x) + b(x) = A(x)\Phi(x)u(x) + b(x) = A(x)\psi(x) + b(x).\end{aligned}$$
 □

Beispiel: Wir betrachten das System linearer Differentialgleichungen gegeben durch $y_1' = -y_2$, $y_2' = y_1 + x$. In Matrixschreibweise entspricht dies der Gleichung $y' = A(x)y + b(x)$ mit

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}.$$

Wie wir im vorherigen Beispiel gesehen haben, ist

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen DGL $y' = A(x)y$. Es gilt

$$\Phi(x)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$$

Um eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems zu erhalten, berechnen wir zunächst

$$u(x) = \int_0^x \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} dt = \int_0^x \begin{pmatrix} t \sin(t) \\ t \cos(t) \end{pmatrix} dt.$$

Wir bestimmen die beiden Komponenten von $u(x)$ durch partielle Integration. Es gilt

$$\int_0^x t \sin(t) dt = -t \cos(t) \Big|_0^x + \int_0^x \cos(t) dt = -t \cos(t) + \sin(t) \Big|_0^x = \sin(x) - x \cos(x)$$

und

$$\int_0^x t \cos(t) dt = t \sin(t) \Big|_0^x - \int_0^x \sin(t) dt = t \sin(t) + \cos(t) \Big|_0^x = x \sin(x) + \cos(x) - 1.$$

Wir erhalten somit

$$u(x) = \begin{pmatrix} \sin(x) - x \cos(x) \\ \cos(x) + x \sin(x) - 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \Phi(x)u(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(x) - x \cos(x) \\ \cos(x) + x \sin(x) - 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos(x)(\sin(x) - x \cos(x)) - \sin(x)(\cos(x) + x \sin(x) - 1) \\ \sin(x)(\sin(x) - x \cos(x)) + \cos(x)(\cos(x) + x \sin(x) - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + \sin(x) \\ 1 - \cos(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir formulieren die bisher erzielten Ergebnisse noch einmal für Differentialgleichungen höherer Ordnung.

(3.20) Definition Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, und seien $a_k : I \rightarrow \mathbb{K}$ für $0 \leq k < n$ und $b : I \rightarrow \mathbb{K}$ stetige Funktionen. Dann ist

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \quad (3.17)$$

eine **lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung**. Diese wird als **homogen** bezeichnet, wenn $b = 0$ ist, ansonsten als **inhomogen**.

(3.21) Satz Gegeben sei eine lineare DGL n -ter Ordnung der Form (3.17).

- (i) Die Lösungsmenge \mathcal{L}_0 der homogenen linearen DGL ist ein n -dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum.
- (ii) Ein System $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ von Lösungen der homogenen DGL ist genau dann linear unabhängig, wenn für ein (und damit für alle) $x \in I$ die sogenannte **Wronski-Determinante**

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \quad \text{ungleich Null ist.}$$

Man nennt $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ in diesem Fall ein **Fundamentalsystem** von Lösungen der homogenen linearen DGL.

Beweis: Seien $\tilde{\mathcal{L}}_0$ die Lösungen des homogenen Systems linearer Differentialgleichungen gegeben durch

$$y'_0 = y_1 \quad , \quad y'_1 = y_2 \quad , \quad \dots \quad , \quad y'_{n-2} = y_{n-1} \quad , \quad y'_{n-1} = -a_0(x)y_0 - a_1(x)y_1 - \dots - a_{n-1}(x)y_{n-1}.$$

Wie wir in Abschnitt 3.1 gesehen haben, ist durch $\varphi \mapsto (\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n-1)})$ eine Bijektion $\mathcal{L}_0 \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}_0$ gegeben, und diese ist verträglich mit punktweiser Addition und punktweiser skalarer Multiplikation von Funktionen. Damit ergeben sich alle Aussagen unmittelbar aus (3.17). \square

Als wichtigen Spezialfall der Theorie betrachten wir nun lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Jedem komplexen Polynom $p \in \mathbb{C}[t]$ der Form $p = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ mit Koeffizienten $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ kann durch

$$p \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) = \sum_{k=0}^n a_k \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^k$$

eine Abbildung auf dem Raum der n -mal differenzierbaren Funktionen zugeordnet werden, und zwar durch

$$p \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi = \sum_{k=0}^n a_k \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^k \varphi = \sum_{k=0}^n a_k \varphi^{(k)}.$$

Man nennt $p \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)$ einen **Differentialoperator n -ter Ordnung**. Beispielsweise handelt es sich bei der gewöhnlichen Ableitung $\varphi \mapsto \varphi'$ um einen Differentialoperator erster Ordnung.

(3.22) Proposition Seien $p, q \in \mathbb{C}[t]$ Polynome vom Grad $\leq n$, außerdem $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine $2n$ -mal differenzierbare Funktion. Dann gilt

$$(i) \quad (p+q) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi = p \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi + q \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi$$

$$(ii) \quad (pq) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi = \left(p \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \circ q \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \right) \varphi$$

Beweis: Sei $p = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ und $q = \sum_{k=0}^n b_k t^k$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k > n$ setzen wir $a_k = b_k = 0$. Dann erhalten wir durch (i) die Rechnung

$$\begin{aligned} (p+q) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi &= \left(\sum_{k=0}^n (a_k + b_k) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^k \right) \varphi = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) \varphi^{(k)} = \\ \sum_{k=0}^n a_k \varphi^{(k)} + \sum_{k=0}^n b_k \varphi^{(k)} &= \sum_{k=0}^n a_k \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^k \varphi + \sum_{k=0}^n b_k \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^k \varphi = p \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi + q \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi. \end{aligned}$$

Für den Beweis von (ii) bemerken wir zunächst, dass

$$pq = \sum_{k=0}^{2n} c_k t^k \quad \text{mit} \quad c_k = \sum_{i=0}^k a_{i-k} b_i = \sum_{i+j=k} a_i b_j \quad \text{gilt.}$$

Die gewünschte Gleichung erhalten wir nun durch

$$\begin{aligned}
 p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi\right) &= p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\sum_{k=0}^n b_k \varphi^{(k)}\right) = \sum_{\ell=0}^n a_\ell \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\ell \left(\sum_{k=0}^n b_k \varphi^{(k)}\right) = \\
 \sum_{\ell=0}^n \sum_{k=0}^n a_\ell b_k \varphi^{(\ell+k)} &= \sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j\right) \varphi^{(k)} = \sum_{k=0}^{2n} c_k \varphi^{(k)} = (pq)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi. \quad \square
 \end{aligned}$$

(3.23) Lemma

- (i) Für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt $\frac{\partial}{\partial x}(e^{\lambda x}) = \lambda e^{\lambda x}$.
- (ii) Für jedes Polynom $p \in \mathbb{C}[t]$ und jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)e^{\lambda x} = p(\lambda)e^{\lambda x}.$$

Beweis: zu (i) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ folgt die Aussage unmittelbar aus der bekannten Ableitungsregel für die Exponentialfunktion. Sei nun $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\lambda = a + ib$ die Zerlegung von λ in Real- und Imaginärteil. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x}(e^{\lambda x}) &= \frac{\partial}{\partial x}(e^{(a+ib)x}) = \frac{\partial}{\partial x}(e^{ax}(\cos(bx) + i \sin(bx))) = \\
 ae^{ax} \cos(bx) + e^{ax}(-b \sin(bx)) + iae^{ax}(\sin(bx) + bi e^{ax} \cos(bx)) &= \\
 (a + ib)e^{ax} \cos(bx) + i(a + ib)e^{ax} \sin(bx) &= \\
 (a + ib)e^{ax}(\cos(bx) + i \sin(bx)) &= (a + ib)e^{(a+ib)x} = \lambda e^{\lambda x}.
 \end{aligned}$$

zu (ii) Sei $p = \sum_{k=0}^n a_k t^k$. Durch Anwendung von (i) erhalten wir

$$p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)e^{\lambda x} = \sum_{k=0}^n a_k \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k e^{\lambda x} = \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k e^{\lambda x} = p(\lambda)e^{\lambda x}. \quad \square$$

(3.24) Satz Sei $p \in \mathbb{C}[t]$ ein Polynom vom Grad n der Form $p = t^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^k$, mit n paarweise verschiedenen Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Dann bilden die Funktionen

$$\varphi_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto e^{\lambda_k x}$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen der linearen Differentialgleichung n -ter Ordnung

$$p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)y = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Beweis: Nach (3.23) gilt $p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_k = p(\lambda_k)e^{\lambda_k x} = 0$ für $1 \leq k \leq n$. Damit ist jede der Funktionen φ_k jedenfalls eine Lösung der DGL. Zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit des Systems verwenden wir (3.21). Für

$0 \leq m < n$ gilt $\varphi_k^{(m)}(x) = \lambda_k^m e^{\lambda_k x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Wronski-Determinante an der Stelle $x_0 = 0$ ist also gegeben durch

$$W(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Es handelt sich um eine sogenannte **Vandermonde-Determinante**. Durch vollständige Induktion über n zeigt man leicht, dass

$$\det W(0) = \prod_{i>j} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0 \quad \text{gilt.}$$

Also sind die Lösungen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ tatsächlich linear unabhängig. □

Beispiel 1: Wir betrachten die DGL $y''' - y'' - 2y' = 0$. Das entsprechende Polynom p ist gegeben durch

$$p = t^3 - t^2 - 2t = t(t+1)(t-2) \quad ,$$

und die Nullstellen sind $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ und $\lambda_3 = 2$. Also ist durch $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = e^{-x}$ und $\varphi_3(x) = e^{2x}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen gegeben.

Beispiel 2: Für beliebiges $\omega \in \mathbb{R}^+$ betrachten wir die DGL $y'' + \omega^2 y = 0$. Das zugehörige Polynom ist

$$p = t^2 + \omega^2 = (t - i\omega)(t + i\omega)$$

mit den Nullstellen $\lambda_1 = i\omega$ und $\lambda_2 = -i\omega$. Damit ist durch $\varphi_1(x) = e^{i\omega x}$ und $\varphi_2(x) = e^{-i\omega x}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen gegeben.

In physikalischen Anwendungen ist man häufig eher an einem reellwertigen System von Lösungen interessiert. Wir bilden dazu die Linearkombinationen

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \frac{1}{2}\varphi_1(x) + \frac{1}{2}\varphi_2(x) = \frac{1}{2}(\cos(\omega x) + i \sin(\omega x)) + \frac{1}{2}(\cos(\omega x) - i \sin(\omega x)) \\ &= \cos(\omega x) \end{aligned}$$

und

$$\psi_2(x) = \frac{1}{2i}\varphi_1(x) - \frac{1}{2i}\varphi_2(x) = \sin(\omega x).$$

Auch (ψ_1, ψ_2) ist eine Basis des Lösungsraums. Die Matrix des Basiswechsels von (ψ_1, ψ_2) nach (φ_1, φ_2) ist gegeben durch

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

Wir verallgemeinern das Verfahren zur Bestimmung eines Fundamentalsystems von Lösungen nun auf Polynome mit **mehrfachen** Nullstellen, also auf Polynome der Form

$$p = \prod_{i=1}^r (t - \lambda_i)^{e_i} \quad ,$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ paarweise verschiedene komplexe Zahlen und e_1, \dots, e_r natürliche Zahlen bezeichnen.

(3.25) Lemma Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt für jede auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mindestens k -mal stetig differenzierbare Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ die Gleichung

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \lambda\right)^k (f(x)e^{\lambda x}) = f^{(k)}(x)e^{\lambda x}.$$

Beweis: Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion über k . Für $k = 0$ ist nichts zu zeigen. Den Induktionsschritt von k auf $k + 1$ erhält man durch die Rechnung

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \lambda\right)^{k+1} (f(x)e^{\lambda x}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} - \lambda\right) (f^{(k)}(x)e^{\lambda x}) = \\ f^{(k+1)}(x)e^{\lambda x} + f^{(k)}(x)\lambda e^{\lambda x} - \lambda f^{(k)}(x)e^{\lambda x} &= f^{(k+1)}(x)e^{\lambda x}. \quad \square \end{aligned}$$

Wir im reellwertigen Fall bezeichnen wir eine Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ als **Polynomfunktion** vom Grad $k \in \mathbb{N}$, wenn es Koeffizienten $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{C}$ mit $a_k \neq 0$ gibt, so dass

$$g(x) = \sum_{i=0}^k a_i x^i \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \quad \text{erfüllt ist.}$$

(3.26) Lemma Sei $p \in \mathbb{C}[t]$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $p(\lambda) \neq 0$. Ist $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Polynomfunktion vom Grad k , dann gibt es eine weitere Polynomfunktion $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ vom selben Grad mit

$$p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(g(x)e^{\lambda x}) = h(x)e^{\lambda x} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Beweis: Sei p vom Grad n . Wir schreiben p in der Form $p = \sum_{i=0}^n c_i (t - \lambda)^i$, mit geeigneten Koeffizienten $c_i \in \mathbb{C}$. Dies ist möglich, da die Polynome $g_i = (t - \lambda)^i$ mit $0 \leq i \leq n$ über \mathbb{C} linear unabhängig sind. Wegen $p(\lambda) \neq 0$ ist $c_0 \neq 0$. Nun gilt auf Grund des vorherigen Lemmas

$$p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(g(x)e^{\lambda x}) = \sum_{i=0}^n c_i \left(\frac{\partial}{\partial x} - \lambda\right)^i (g(x)e^{\lambda x}) = \sum_{i=0}^n c_i g^{(i)}(x)e^{\lambda x}.$$

Die gesuchte Polynomfunktion h ist also durch $h(x) = \sum_{i=0}^n c_i g^{(i)}(x)$ gegeben. □

(3.27) Satz Sei $p \in \mathbb{C}[t]$ ein Polynom der Form $\prod_{i=1}^r (t - \lambda_i)^{e_i}$, mit paarweise verschiedenen $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ und $e_1, \dots, e_r \in \mathbb{N}$. Dann besitzt die Differentialgleichung $p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)y = 0$ ein Fundamentalsystem von Lösungen bestehend aus den Funktionen

$$\varphi_{im}(x) = x^m e^{\lambda_i x}, \quad 0 \leq m < e_i, \quad 1 \leq i \leq r.$$

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass die Funktionen φ_{im} tatsächlich Lösungen der DGL sind. Für $1 \leq i \leq m$ sei das Polynom $q_i \in \mathbb{C}[t]$ jeweils der Faktor in der Zerlegung $p = (t - \lambda_i)^{e_i} q_i$. Auf Grund von (3.25) und wegen $e_i > m$ gilt

$$p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_{im} = q_i\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - \lambda_i\right)^{e_i} (x^m e^{\lambda_i x}) = q_i\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{e_i} (x^m) \cdot e^{\lambda_i x}\right) = 0.$$

Nun beweisen wir noch die lineare Unabhängigkeit des Systems. Eine beliebige Linearkombination der Funktionen φ_{im} kann in der Form

$$\sum_{i=1}^r g_i(x)e^{\lambda_i x}$$

dargestellt werden, mit geeigneten Polynomfunktionen g_i vom Grad $\leq e_i - 1$. Zu zeigen ist, dass diese Linearkombination nur dann gleich Null ist, wenn alle Polynomfunktionen gleich Null sind. Wir zeigen dies durch vollständige Induktion über r . Aus $g_1(x)e^{\lambda_1 x} = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt offenbar $g_1 = 0$. Setzen wir nun die Aussage für $r - 1$ als gültig voraus, und sei

$$\sum_{i=1}^r g_i(x)e^{\lambda_i x} = 0.$$

Wenn eine der Polynomfunktionen g_i gleich Null ist, folgt die Behauptung unmittelbar aus der Induktionsvoraussetzung. Ansonsten wenden wir den Differentialoperator $D = (\frac{\partial}{\partial x} - \lambda_r)^{e_r}$ auf die Gleichung an. Dann verschwindet der letzte Summand wegen (3.25) und $g_r^{(e_r)}(x) = 0$, und nach (3.26) gibt es Polynomfunktionen h_i desselben Grades wie g_i mit $D(g_i(x)e^{\lambda_i x}) = h_i(x)e^{\lambda_i x}$ für $1 \leq i \leq r - 1$. Wir erhalten die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{r-1} h_i(x)e^{\lambda_i x} = 0.$$

Da alle $h_i \neq 0$ sind, widerspricht dies der Induktionsvoraussetzung. Also muss bereits $g_i = 0$ für $1 \leq i \leq r$ gelten. \square

Beispiel: Wir betrachten die DGL $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$. Das zugehörige Polynom ist

$$p = t^4 + 8t^2 + 16 = (t^2 + 4)^2 = (t - 2i)^2(t + 2i)^2.$$

Die beiden Nullstellen sind also $\lambda_1 = 2i$ und $\lambda_2 = -2i$, mit Vielfachheiten $e_1 = e_2 = 2$. Auf Grund des Satzes ist also durch

$$\varphi_{1,0}(x) = e^{2ix}, \quad \varphi_{1,1}(x) = xe^{2ix}, \quad \varphi_{2,0}(x) = e^{-2ix}, \quad \varphi_{2,1}(x) = xe^{-2ix}$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen gegeben. Um ein System aus reellwertigen Funktionen zu erhalten, bilden wir die Linearkombinationen

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \frac{1}{2}\varphi_{1,0}(x) + \frac{1}{2}\varphi_{2,0}(x) = \frac{1}{2}e^{2ix} + \frac{1}{2}e^{-2ix} = \\ &= \frac{1}{2}(\cos(2x) + i\sin(2x)) + \frac{1}{2}(\cos(2x) - i\sin(2x)) = \cos(2x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_2(x) &= \frac{1}{2i}\varphi_{1,0}(x) - \frac{1}{2i}\varphi_{2,0}(x) = \frac{1}{2i}e^{2ix} - \frac{1}{2i}e^{-2ix} = \\ &= \frac{1}{2i}(\cos(2x) + i\sin(2x)) - \frac{1}{2i}(\cos(2x) - i\sin(2x)) = \sin(2x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_3(x) &= \frac{1}{2}\varphi_{1,1}(x) + \frac{1}{2}\varphi_{2,1}(x) = \frac{1}{2}xe^{2ix} + \frac{1}{2}xe^{-2ix} = \\ &= \frac{1}{2}(x\cos(2x) + ix\sin(2x)) + \frac{1}{2}(x\cos(2x) - ix\sin(2x)) = x\cos(2x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_4(x) &= \frac{1}{2i}\varphi_{1,1}(x) - \frac{1}{2i}\varphi_{2,1}(x) = \frac{1}{2i}xe^{2ix} - \frac{1}{2i}xe^{-2ix} = \\ &= \frac{1}{2i}(x\cos(2x) + ix\sin(2x)) - \frac{1}{2i}(x\cos(2x) - ix\sin(2x)) = x\sin(2x) \end{aligned}$$

Auch $(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$ ist ein Fundamentalsystem von Lösungen, wie man zum Beispiel durch Berechnung der Wronski-Determinante im Nullpunkt unmittelbar überprüft: Die höheren Ableitungen der Funktionen sind gegeben durch

$$\psi_1'(x) = -2 \sin(2x) \quad , \quad \psi_1''(x) = -4 \cos(2x) \quad , \quad \psi_1'''(x) = 8 \sin(2x)$$

$$\psi_2'(x) = 2 \cos(2x) \quad , \quad \psi_2''(x) = -4 \sin(2x) \quad , \quad \psi_2'''(x) = -8 \cos(2x)$$

$$\psi_3'(x) = \cos(2x) - 2x \sin(2x) \quad , \quad \psi_3''(x) = -6 \sin(2x) - 4x \cos(2x) \quad , \quad \psi_3'''(x) = -16 \cos(2x) + 8x \sin(2x)$$

$$\psi_4'(x) = \sin(2x) + 2x \cos(2x) \quad , \quad \psi_4''(x) = 6 \cos(2x) - 4x \sin(2x) \quad , \quad \psi_4'''(x) = -16 \sin(2x) - 8x \cos(2x)$$

und somit

$$W(0) = \det \begin{pmatrix} \psi_1(0) & \psi_2(0) & \psi_3(0) & \psi_4(0) \\ \psi_1'(0) & \psi_2'(0) & \psi_3'(0) & \psi_4'(0) \\ \psi_1''(0) & \psi_2''(0) & \psi_3''(0) & \psi_4''(0) \\ \psi_1'''(0) & \psi_2'''(0) & \psi_3'''(0) & \psi_4'''(0) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & -8 & -16 & 0 \end{pmatrix} = 144 \neq 0.$$

Nach (3.21) ist das System linear unabhängig und somit ein Fundamentalsystem.

Betrachten wir nun *inhomogene* Differentialgleichungen n -ter Ordnung, also Gleichungen der Form

$$p \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) y = b(x)$$

mit einer stetigen Funktion $b : I \rightarrow \mathbb{C}$ auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. In dieser allgemeinen Situation kann eine Lösung bestimmt werden, indem man die Gleichung in ein System erster Ordnung übersetzt und darauf die Variation der Konstanten anwendet (3.19). Besitzt die Funktion b aber eine spezielle Form, gibt es einen einfacheren Weg. Zunächst bemerken wir

(3.28) Lemma Seien $m \in \mathbb{N}$, $b_1, \dots, b_m : I \rightarrow \mathbb{C}$ stetige Funktionen auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und $p \in \mathbb{C}[t]$. Für $1 \leq i \leq m$ sei ψ_j eine Lösung der DGL $p \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) y = b_j(x)$. Dann ist $\psi(x) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \psi_j(x)$ eine Lösung von $p \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) y = b(x)$ mit $b = \sum_{j=1}^m \lambda_j b_j$.

Beweis: Aus der Linearität des Operators $\frac{\partial}{\partial x}$ folgt unmittelbar die Linearität von $p \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)$, d.h. für hinreichend oft differenzierbare Funktionen $\psi, \tilde{\psi}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$p \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) (\psi + \tilde{\psi}) = p \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) (\psi) + p \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) (\tilde{\psi}) \quad \text{und} \quad p \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) (\lambda \psi) = \lambda p \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) (\psi).$$

Damit ergibt sich die Aussage aus der Rechnung

$$p \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j \psi_j(x) \right) = \sum_{j=1}^m \lambda_j p \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) (\psi_j(x)) = \sum_{j=1}^m \lambda_j b_j(x) = b(x). \quad \square$$

(3.29) Satz Seien $p \in \mathbb{C}[t]$, $c \in \mathbb{C}$ und $\mu \in \mathbb{C}$ mit $p(\mu) \neq 0$.

- (i) Die DGL $p \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) y = ce^{\mu x}$ hat $\psi(x) = \frac{c}{p(\mu)} e^{\mu x}$ als Lösung.
- (ii) Sei allgemeiner $m \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Polynomfunktion vom Grad m . Dann hat die DGL $p \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) y = f(x)e^{\mu x}$ eine Lösung der Form $\psi(x) = g(x)e^{\mu x}$, mit einer geeigneten Polynomfunktion g vom Grad m .

Beweis: zu (i) Dies folgt direkt aus der Rechnung

$$p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x) = p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{c}{p(\mu)}e^{\mu x} = \frac{cp(\mu)}{p(\mu)}e^{\mu x} = ce^{\mu x},$$

wobei im zweiten Schritt (3.23) (ii) angewendet wurde.

zu (ii) Hier führen wir den Beweis durch vollständige Induktion über $m = \text{grad}(f)$, wobei der Fall $m = 0$ durch (i) bereits erledigt ist. Sei nun $m \in \mathbb{N}$, und setzen wir die Aussage für Polynomfunktionen vom Grad $\leq m - 1$ voraus. Nach (3.26) existiert eine Polynomfunktion f_0 vom Grad m mit

$$p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(x^m e^{\mu x}) = f_0(x)e^{\mu x}.$$

Für ein geeignetes $c \in \mathbb{C}$ ist $f_1 = f - cf_0$ eine Polynomfunktion vom Grad $\leq m - 1$. Wir können die Induktionsvoraussetzung anwenden und erhalten eine Polynomfunktion g_1 vom Grad $\leq m - 1$ mit

$$p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(g_1(x)e^{\mu x}) = f_1(x)e^{\mu x}.$$

Setzen wir nun $g(x) = cx^m + g_1(x)$, dann ist g eine Polynomfunktion vom Grad m , und es gilt

$$\begin{aligned} p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(g(x)e^{\mu x}) &= cp\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(x^m e^{\mu x}) + p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(g_1(x)e^{\mu x}) = \\ &cf_0(x)e^{\mu x} + f_1(x)e^{\mu x} = f(x)e^{\mu x}. \end{aligned} \quad \square$$

Beispiel: Wir bestimmen eine Lösung der DGL dritter Ordnung

$$y''' - 2y'' - 2y' + 2y = 2\sin(x).$$

Setzen wir $p = x^3 - 2x^2 - 2x + 2$, dann erhält man diese Gleichung wegen $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ als Imaginärteil von

$$p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)y = 2e^{ix}.$$

Es gilt $p(i) = i^3 - 2i^2 - 2i + 2 = -i + 2 - 2i + 2 = 4 - 3i \neq 0$. Nach (3.29) (i) ist $\psi_{\mathbb{C}}(x) = \frac{2}{p(i)}e^{ix}$ eine Lösung der komplexen DGL. Wegen

$$\frac{2}{p(i)} = \frac{2}{4 - 3i} = \frac{2(4 + 3i)}{(4 - 3i)(4 + 3i)} = \frac{1}{25}(8 + 6i)$$

gilt

$$\psi_{\mathbb{C}}(x) = \frac{1}{25}(8 + 6i)(\cos(x) + i\sin(x)) = \left(\frac{8}{25}\cos(x) - \frac{6}{25}\sin(x)\right) + i\left(\frac{6}{25}\cos(x) + \frac{8}{25}\sin(x)\right).$$

Also ist der Imaginärteil von $\psi_{\mathbb{C}}(x)$, und damit eine Lösung der reellen Ausgangsgleichung, gegeben durch

$$\psi(x) = \frac{6}{25}\cos(x) + \frac{8}{25}\sin(x).$$

(3.30) Definition Ein homogenes System linearer DGL mit konstanten Koeffizienten ist eine Gleichung der Form $y' = Ay$, wobei $A = (a_{ij})$ eine komplexe $n \times n$ -Matrix bezeichnet. In ausgeschriebener Form handelt es sich also um das System

$$y'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \quad , \quad 1 \leq i \leq n$$

von Differentialgleichungen.

Aus (3.17) ist bekannt, dass der Lösungsraum von $y' = Ay$ ein n -dimensionaler \mathbb{C} -Vektorraum ist. Um diesen zu beschreiben, wiederholen wir einige Begriffe aus der Linearen Algebra. Ist $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$, so nennt man $v \in \mathbb{C}^n$ einen **Eigenvektor** der Matrix A zum **Eigenwert** λ , wenn $Av = \lambda v$ und $v \neq 0_{\mathbb{C}^n}$ gilt. Man bezeichnet A als **diagonalisierbar**, wenn A ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist. Dies bedeutet, dass eine Diagonalmatrix $D \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ und eine invertierbare Matrix $S \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ existieren, so dass

$$D = SAS^{-1} \quad \text{erfüllt ist.}$$

Eine Matrix A ist genau dann diagonalisierbar, wenn eine Basis von \mathbb{C}^n existiert, die ausschließlich aus Eigenvektoren von A besteht.

(3.31) Satz Sei $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$.

- (i) Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A und $v \in \mathbb{C}^n$ ein zugehöriger Eigenvektor, dann ist $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n, x \mapsto e^{\lambda x} v$ eine Lösung von $y' = Ay$.
- (ii) Setzen wir nun voraus, dass A diagonalisierbar ist. Sei (v_1, \dots, v_n) eine Basis von bestehend aus Eigenvektoren $v_k \in \mathbb{C}^n$ von A , und seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ die zugehörigen Eigenwerte. Dann bilden die Funktionen $\varphi_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ gegeben durch $\varphi_k(x) = e^{\lambda_k x} v_k$ für $1 \leq k \leq n$ ein Fundamentalsystem für $y' = Ay$.
- (iii) Sei $S \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ und $B = SAS^{-1}$. Genau dann ist $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ eine Lösung von $y' = Ay$, wenn $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ gegeben durch $\psi(x) = S\varphi(x)$ eine Lösung von $z' = Bz$ ist.

Beweis: zu (i) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\varphi'(x) = \lambda v e^{\lambda x} = A v e^{\lambda x} = A \varphi(x).$$

zu (ii) Dies folgt aus der Tatsache, dass die Startvektoren $\varphi_k(0) = v_k$ und somit auch die Lösungsfunktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ linear unabhängig sind, siehe (3.17).

zu (iii) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\psi'(x) = S\varphi'(x)$. Daraus folgt die Äquivalenz

$$\varphi'(x) = A\varphi(x) \Leftrightarrow S^{-1}\psi'(x) = AS^{-1}\psi(x) \Leftrightarrow SS^{-1}\psi'(x) = SAS^{-1}\psi(x) \Leftrightarrow \psi'(x) = B\psi(x). \quad \square$$

Aus Teil (iii) des Satzes ergibt sich das folgende Lösungsschema für Systeme der Form $y' = Ay$ mit diagonalisierbarer Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$: Zunächst bestimmt man mit den Methoden der Linearen Algebra eine Matrix $S \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, so dass $D = SAS^{-1}$ eine Diagonalmatrix ist. Sind dann $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Einträge auf der Diagonalen von D , dann bilden die Funktionen

$$\varphi_k(x) = e^{\lambda_k x} S e_k, \quad 1 \leq k \leq n$$

ein Fundamentalsystem für $y' = Ay$.

Zur Illustration diskutieren wir die möglichen Lösungen für eine DGL der Form $y' = Ay$ mit $A \in \mathcal{M}_{2,\mathbb{R}}$.

1. Fall: A ist über \mathbb{R} diagonalisierbar

In diesem Fall besitzt A zwei linear unabhängige Eigenvektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ mit zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Nach (3.31) (ii) bilden die Funktionen $\varphi_1(x) = e^{\lambda_1 x} v_1$ und $\varphi_2(x) = e^{\lambda_2 x} v_2$ ein Fundamentalsystem für $y' = Ay$. Dabei ist sowohl $\lambda_1 = \lambda_2$ als auch $\lambda_1 \neq \lambda_2$ möglich.

2. Fall: A ist über \mathbb{C} , aber nicht über \mathbb{R} diagonalisierbar

Hier besitzt A ein Paar $(\lambda, \bar{\lambda})$ von konjugiert-komplexen Eigenvektoren, mit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Ist $v = u + iw \in \mathbb{C}^2$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ (mit $u, w \in \mathbb{R}^2$), dann ist der konjugiert-komplexe Vektor $\bar{v} = u - iw$ ein Eigenvektor zu Eigenwert $\bar{\lambda}$. Die Funktionen

$$\varphi_1(x) = e^{\lambda x} v, \quad \varphi_2(x) = e^{\bar{\lambda} x} \bar{v}$$

bilden ein komplexes Fundamentalsystem für $y' = Ay$. Zerlegen wir den Eigenwert λ in Real- und Imaginärteil, $\lambda = \mu + i\omega$ mit $\mu, \omega \in \mathbb{R}$, dann erhält man durch

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \frac{1}{2}(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) = \frac{1}{2}e^{\lambda x} v + \frac{1}{2}e^{\bar{\lambda} x} \bar{v} = \frac{1}{2}e^{(\mu+i\omega)x}(u+iw) + \frac{1}{2}e^{(\mu-i\omega)x}(u-iw) \\ &= \frac{1}{2}e^{\mu x}(\cos(\omega) + i\sin(\omega))(u+iw) + \frac{1}{2}e^{\mu x}(\cos(\omega) - i\sin(\omega))(u-iw) \\ &= \frac{1}{2}e^{\mu x}(\cos(\omega)u - \sin(\omega)w + i\sin(\omega)u + i\cos(\omega)w) + \frac{1}{2}e^{\mu x}(\cos(\omega)u - \sin(\omega)w - i\sin(\omega)u - i\cos(\omega)w) \\ &= e^{\mu x}(\cos(\omega x)u - \sin(\omega x)w) \end{aligned}$$

und $\psi_2(x) = \frac{1}{2i}(\varphi_1(x) - \varphi_2(x)) = e^{\mu x}(\sin(\omega x)u + \cos(\omega x)w)$ ein reelles Fundamentalsystem.

3. Fall: A ist über \mathbb{C} nicht diagonalisierbar

Dann hat A nur einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$. Aus der Theorie der Jordanschen Normalformen ist bekannt, dass eine Matrix $S \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ mit

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{existiert.}$$

Sei $B = SAS^{-1}$. Wie man leicht nachrechnet, bilden dann die Funktionen

$$\psi_1(x) = e^{\lambda x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_2(x) = e^{\lambda x} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein (reelles) Fundamentalsystem für $z' = Bz$. Mit (3.31) (iii) erhält man das Fundamentalsystem $\varphi_1(x) = S\psi_1(x)$, $\varphi_2(x) = S\psi_2(x)$ für die Ausgangsgleichung $y' = Ay$.

Das letzte Beispiel soll nun auf beliebige Dimension verallgemeinert werden. In der Linearen Algebra wurde der Begriff der *Jordanmatrix* eingeführt. Dabei handelt es sich um eine $n \times n$ -Matrix der Form

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

wobei $\lambda \in \mathbb{C}$ ist. Eine Funktion $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ ist genau dann Lösung des Systems $y' = Jy$, wenn die n Komponenten von ψ die Gleichungen

$$\psi'_1 = \lambda\psi_1 + \psi_2 \quad , \quad \psi'_2 = \lambda\psi_2 + \psi_3 \quad , \quad \dots \quad , \quad \psi'_{n-1} = \lambda\psi_{n-1} + \psi_n \quad , \quad \psi'_n = \lambda\psi_n$$

erfüllen. Ein Fundamentalsystem eines solchen Systems in Matrixschreibweise, also eine matrix-wertige Funktion $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ mit $\Phi'(t) = J\Phi(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{1}{2!}t^2e^{\lambda t} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \cdots & \frac{1}{(n-2)!}t^{n-2}e^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & \cdots & \frac{1}{(n-3)!}t^{n-3}e^{\lambda t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

Diese Matrix kann in kompakter Form als Bild der matrix-wertigen Exponentialfunktion angegeben: Es gilt

$$\Phi(t) = e^{tJ} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (tJ)^m \quad ,$$

d.h. die rechts angegebene Reihe konvergiert im \mathbb{C} -Vektorraum $\mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ gegen $\Phi(t)$. Wir werden dies aus Zeitgründen hier aber nicht näher ausführen. Die einzelnen Spalten $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ von Φ sind gegeben durch

$$\varphi_\ell(t) = \sum_{j=1}^{\ell} \frac{1}{(\ell-j)!} t^{\ell-j} e^{\lambda t} e_j \quad ,$$

wobei e_1, \dots, e_n die Einheitsvektoren im \mathbb{C}^n bezeichnen. Jede Spalte ist tatsächlich eine Lösung von $y' = Jy$. Denn für $1 \leq j \leq \ell$ ist die j -te Komponente von φ_ℓ gegeben durch $\varphi_{j\ell}(t) = \frac{1}{(\ell-j)!} t^{\ell-j} e^{\lambda t}$, und durch $\varphi_{j\ell}(t) = 0$ für $j > \ell$. Für $1 \leq j < \ell$ gilt jeweils

$$\begin{aligned} \varphi'_{j\ell}(t) &= \frac{\ell-j}{(\ell-j)!} t^{\ell-j} e^{\lambda t} + \frac{1}{(\ell-j)!} t^{\ell-j} \lambda e^{\lambda t} = \frac{1}{(\ell-j-1)!} t^{\ell-j-1} e^{\lambda t} + \frac{1}{(\ell-j)!} t^{\ell-j} \lambda e^{\lambda t} \\ &= \varphi_{j+1,\ell}(t) + \lambda \varphi_{j\ell}(t). \end{aligned}$$

Ebenso erfüllt $\varphi_{\ell,\ell}(t) = e^{\lambda t} e_\ell$ die Gleichung $\varphi'_{\ell\ell}(t) = \lambda e^{\lambda t} e_\ell = \lambda \varphi_{\ell\ell}(t) + \varphi_{\ell+1,\ell}(t)$ für $\ell < n$ bzw. $\varphi'_{\ell\ell}(t) = \lambda \varphi_{\ell\ell}(t)$ für $\ell = n$. Außerdem ist $\Phi(0)$ die Einheitsmatrix, für die Wronski-Determinante gilt also $W(0) = \det \Phi(0) = 1 \neq 0$. Dies zeigt, dass es sich bei Φ tatsächlich um ein Fundamentalsystem handelt.

Wie in der Linearen Algebra definiert wurde, befindet sich eine $n \times n$ -Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ in **Jordanscher Normalform**, wenn sie aus Jordanmatrizen entlang der Hauptdiagonalen zusammengesetzt ist. Man bezeichnet diese Jordanmatrizen dann auch als **Jordanblöcke**. Zum Beispiel ist

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

eine solche Matrix. Auch für das System $y' = Ay$ zu einer solchen Matrix A kann leicht ein Fundamentalsystem angegeben werden: Die Blockgestalt ermöglicht eine Zerlegung in mehrere Teilsysteme, eines für jeden Jordanblock. Jedes dieser Teilsysteme kann dann mit dem oben angegebenen Fundamentalsystem gelöst werden.

Bekanntlich ist jede $n \times n$ -Matrix A über \mathbb{C} ähnlich zu einer Matrix in Jordanscher Normalform; es gibt also stets eine Matrix $S \in GL_n(\mathbb{C})$ mit der Eigenschaft, dass $B = SAS^{-1}$ sich in Jordanscher Normalform befindet. Die Lösung von $y' = Ay$ kann dann wie in Satz (3.31) auf die Lösung von $y' = By$ zurückgeführt werden.

Beispiel: Wir betrachten das lineare System $y'_1 = y_1 + y_2$, $y'_2 = y_2$, $y'_3 = 2y_3 + y_4$, $y'_4 = 2y_4$. In Matrixschreibweise lautet das System $y' = Ay$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es handelt sich also um eine Matrix in Jordanscher Normalform. Auf Grund der allgemeinen Formel von oben ist durch

$$\varphi_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2(t) = e^t \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_3(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_4(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen definiert. Wir überprüfen exemplarisch, dass φ_4 eine Lösung ist, wobei die einzelnen Komponenten durch $\varphi_{14}(t) = \varphi_{24}(t) = 0$, $\varphi_{34}(t) = te^{2\lambda t}$ und $\varphi_{44}(t) = e^{2t}$ gegeben sind. Die Gleichungen $\varphi'_{14}(t) = \varphi_{14}(t) + \varphi_{24}(t)$ und $\varphi'_{24}(t) = \varphi_{24}(t)$ sind offenbar erfüllt, und ebenso leicht sieht man

$$\varphi'_{34}(t) = e^{2\lambda t} + 2te^{2\lambda t} = 2\varphi_{34}(t) + \varphi_{44}(t)$$

und $\varphi'_{44}(t) = 2e^{\lambda t} = 2\varphi_{44}(t)$.

3.4 Exakte Differentialgleichungen und autonome Systeme

Inhaltsübersicht

- ☆ Exakte Differentialgleichungen lassen sich schnell durch Bestimmung einer Stammfunktion lösen.
- ☆ Nicht-exakte DGLs können gelegentlich durch Multiplikation mit einem sog. integrierenden Faktor in exakte DGLs überführt werden.
- ☆ Ebene autonome Systeme sind zweidimensionale Systeme von DGLs der Form $y' = f(y)$, bei denen die rechte Seite nicht explizit von x abhängt. Ähnlich wie die exakten DGLs können diese durch Bestimmung von sog. Erhaltungsgrößen gelöst werden.

Bisher haben wir nur Differentialgleichungen (oder Systeme von Differentialgleichungen) mit y' als Einzelterm auf der linken Seite der Gleichung betrachtet. Für die Anwendungen in diesem Abschnitt ist es zweckmäßig, von dieser starren Vorgabe abzuweichen und auch DGLs der Form

$$f(x, y)y' + g(x, y) = 0$$

zuzulassen, mit reellwertigen, stetigen Funktionen f, g auf einer offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Als **Lösung** einer solchen DGL bezeichnen wir eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $f(t, \varphi(t))\varphi'(t) + g(t, \varphi(t)) = 0$ für alle $t \in I$.

(3.32) Definition Eine Differentialgleichung der oben angegebenen Form wird *exakt* genannt, wenn eine stetig differenzierbare Funktion $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\partial_1 F = g$ und $\partial_2 F = f$ existiert. Eine solche Funktion wird *Stammfunktion* der DGL genannt.

Die einfache Lösbarkeit exakter DGLs mit Stammfunktion ist eine Konsequenz aus der folgenden, elementaren Beobachtung.

(3.33) Proposition Sei $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion der DGL $f(x, y)y' + g(x, y) = 0$. Eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $(t, \varphi(t)) \in D$ für alle $t \in I$ ist genau dann eine Lösung der DGL, wenn $t \mapsto F(t, \varphi(t))$ auf ganz I konstant ist.

Beweis: Wir definieren die Funktion $u : I \rightarrow D$ durch $u(t) = (t, \varphi(t))$. Dann gilt $u'(t) = (1, \varphi'(t))$, $F(t, \varphi(t)) = (F \circ u)(t)$, und mit der mehrdimensionalen Kettenregel erhalten wir

$$\begin{aligned} (F \circ u)'(t) &= F'(u(t))u'(t) = \begin{pmatrix} \partial_1 F(u(t)) & \partial_2 F(u(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(t) \end{pmatrix} = \\ &\partial_1 F(t, \varphi(t)) + \partial_2 F(t, \varphi(t))\varphi'(t) = g(t, \varphi(t)) + f(t, \varphi(t))\varphi'(t). \end{aligned}$$

für alle $t \in I$. Ist nun $t \mapsto F(t, \varphi(t))$ konstant, dann folgt $(F \circ u)'(t) = 0$ und $g(t, \varphi(t)) + f(t, \varphi(t))\varphi'(t) = 0$ für alle $t \in I$. Also ist φ dann eine Lösung der DGL. Setzen wir umgekehrt die Lösungseigenschaft voraus, dann folgt $(F \circ u)'(t) = 0$ für alle $t \in I$ und somit die Konstanz von $t \mapsto F(t, \varphi(t))$. \square

Eine Lösung der exakten DGL erhält man also, in dem man für eine beliebige Konstante c die Gleichung $F(t, y) = C$ nach y auflöst. Es stellt nun natürlich die Frage, unter welchen Bedingungen eine Stammfunktion existiert, und wie man sie im Falle der Existenz ermittelt. Der folgende Satz beantwortet diese Frage in der speziellen Situation, dass die Funktionen f und g stetig differenzierbar und auf einem rechteckigen Bereich definiert sind.

(3.34) Satz Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a < b, c < d$ und $D =]a, b[\times]c, d[$. Außerdem seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen. Unter diesen Voraussetzungen ist die DGL

$$f(x, y)y' + g(x, y) = 0$$

genau dann exakt, wenn $\partial_2 g = \partial_1 f$ auf ganz D erfüllt ist. Für beliebig vorgegebenes $(u, v) \in D$ ist dann durch

$$F(x, y) = \int_u^x g(s, y) ds + \int_v^y f(u, t) dt$$

eine Stammfunktion der DGL definiert.

Beweis: Setzen wir voraus, dass die DGL exakt und F eine Stammfunktion ist. Dann ist die Funktion F stetig partiell differenzierbar, und mit dem Satz von Schwarz aus der Analysis mehrerer Variablen erhalten wir

$$\partial_2 g - \partial_1 f = \partial_2(\partial_1 F) - \partial_1(\partial_2 F) = \partial_{21} F - \partial_{12} F = 0.$$

Nun setzen wir die Gleichung $\partial_2 g = \partial_1 f$ voraus und zeigen, dass durch die angegebene Gleichung für F eine Stammfunktion der DGL gegeben ist. Auf Grund des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung gilt $\partial_1 F(x, y) = g(x, y)$ für alle $(x, y) \in D$. Durch Differentiation unter dem Integralzeichen und erneute Anwendung des Hauptsatzes erhalten wir außerdem

$$\begin{aligned} \partial_2 F(x, y) &= \int_u^x \partial_2 g(s, y) ds + f(u, y) \\ &= \int_u^x \partial_1 f(s, y) ds + f(u, y) = f(x, y) - f(u, y) + f(u, y) = f(x, y) \quad \square \end{aligned}$$

Alternativ hätte man die Stammfunktion auch durch

$$F(x, y) = \int_u^x g(s, v) ds + \int_v^y f(x, t) dt$$

definieren können. Der Nachweis, dass es sich hierbei tatsächlich um eine Stammfunktion der DGL handelt, läuft vollkommen analog.

Zur Illustration der bisher behandelten Sätze betrachten wir die DGL

$$2xyy' + y^2 = 0.$$

Der Definitionsbereich ist in diesem Fall $D = \mathbb{R}^2$, und die definierenden Funktionen der DGL sind gegeben durch $f(x, y) = 2xy$ und $g(x, y) = y^2$. Wegen $\partial_2 g = 2y = \partial_1 f$ ist die DGL exakt. Sei nun $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ beliebig vorgegeben. Wir bestimmen eine Stammfunktion F mit $F(a, b) = 0$. Für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$F(x, y) = \int_u^x y^2 ds + \int_v^y 2ut dt = (x-u)y^2 + [ut^2]_v^y = (x-u)y^2 + uy^2 - uv^2 = xy^2 - uv^2.$$

Ist nun $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösungsfunktion durch den Punkt (u, v) , also definiert auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $u \in I$ und $v = \varphi(u)$, dann ist F auf der Menge $\{(t, \varphi(t)) | t \in I\}$ konstant Null. Es gilt also $t\varphi(t)^2 - uv^2 = 0$ für alle $t \in I$.

Durch Umstellen dieser Gleichung nach φ erhalten wir nun tatsächlich in jedem Fall eine Lösungsfunktion. Ist $u = 0$, dann ist die Nullfunktion offenbar eine Lösung durch den Punkt $(0, 0)$. Im Fall $u > 0$ definieren wir $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ durch $\varphi(t) = \sqrt{uv}t^{-\frac{1}{2}}$. Für jedes $t \in \mathbb{R}^+$ gilt $\varphi'(t) = (-\frac{1}{2})\sqrt{uv}t^{-\frac{3}{2}}$, also zeigt die Rechnung

$$2t\varphi(t)\varphi'(t) + \varphi(t)^2 = 2t \cdot \sqrt{uv}t^{-\frac{1}{2}} \cdot (-\frac{1}{2})\sqrt{uv}t^{-\frac{3}{2}} + uv^2t^{-1} = -tuv^2 \cdot t^{-2} + uv^2t^{-1} = 0,$$

dass es sich bei ϕ tatsächlich um eine Lösungsfunktion handelt, mit $\varphi(u) = \sqrt{uv}u^{-\frac{1}{2}} = v$. Im Fall $u < 0$ erhält man eine Lösungsfunktion entsprechend durch $\varphi(t) = \sqrt{-uv}(-t)^{-\frac{1}{2}}$. Es gilt dann $\varphi'(t) = -(-\frac{1}{2})\sqrt{-uv}(-t)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{-uv}(-t)^{-\frac{3}{2}}$ und

$$\begin{aligned} 2t\varphi(t)\varphi'(t) + \varphi(t)^2 &= 2t\sqrt{-uv}(-t)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{-uv}(-t)^{-\frac{3}{2}} + (-u)v^2(-t)^{-1} = \\ 2t(-u)v^2(-t)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}(-t)^{-\frac{3}{2}} + uv^2t^{-1} &= -tuv^2t^{-2} + uv^2t^{-1} = 0, \end{aligned}$$

außerdem $\varphi(u) = \sqrt{-uv}(-u)^{-\frac{1}{2}} = v$.

Zum Abschluss sei noch erwähnt, dass die meisten DGLs der Form $f(x, y)y' + g(x, y)y = 0$ nicht exakt sind, einiger aber durch Multiplikation mit einer geeigneten stetig differenzierbaren Funktion in eine exakte DGL umgewandelt werden können. Dies bedeutet, dass eine stetig differenzierbare Funktion $m : D \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$m(x, y)f(x, y)y' + m(x, y)g(x, y)y = 0$$

eine exakte DGL ist. Man nennt eine solche Funktion m einen *integrierenden Faktor*. Wenden wir uns nun einem weiteren wichtigen Typ von Differentialgleichungen zu.

(3.35) Definition Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine stetige Funktion. Ein System von Differentialgleichungen der Form

$$y' = f(y)$$

wird *ebenes autonomes System* genannt.

Ein ebenes autonomes System ist gegenüber einem allgemeinen zweidimensionalen System $y' = g(x, y)$ dadurch ausgezeichnet, dass die rechte Seite nicht explizit von x abhängt. Ein allgemeines System der angegebenen Form, mit einer Funktion $g : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert auf einer offenen Teilmenge $\tilde{D} \subseteq \mathbb{R}^3$, ist also genau dann ein autonomes System, wenn $\tilde{D} = \mathbb{R} \times D$ für eine offene Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und $g(t_1, y) = g(t_2, y)$ für alle $y \in D$ und $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ gilt.

Daraus folgt, dass für jede Lösung $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ des Systems, definiert auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}^2$, und für jedes $c \in \mathbb{R}$ auch die Funktion $\varphi_c : I_c \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $\varphi_c(x) = \varphi(x + c)$ auf dem Intervall $I_c = \{x + c \mid x \in I\}$ eine Lösung des Systems ist. Anschaulich formuliert kann jede Lösungskurve also beliebig nach links oder rechts verschoben werden.

(3.36) Definition Sei $y' = f(y)$ ein autonomes System wie in (3.35). Eine stetig differenzierbare Funktion $E : D \rightarrow \mathbb{R}$ wird *Erhaltungsgröße* oder *Erstes Integral* des Systems genannt, wenn die Gleichung

$$\partial_1 E \cdot f_1 + \partial_2 E \cdot f_2 = 0$$

auf ganz D erfüllt ist.

Lösungskurven von autonomen Systeme mit Erhaltungsgrößen liegen stets in Teilmengen von D , auf denen die Erhaltungsgröße einen konstanten Wert annimmt. (Dies erklärt den Namen.) Aus diesem Grund können solche Systeme häufig auf ähnliche Weise wie exakte Differentialgleichungen mit Stammfunktion gelöst werden.

(3.37) Satz Sei E eine Erhaltungsgröße des autonomen Systems $y' = f(y)$ und $\varphi : I \rightarrow D$ eine Lösung des Systems definiert auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist E auf der Bildmenge $\varphi(I)$ konstant, es gibt also ein $c \in \mathbb{R}$ mit $E(\varphi(t)) = c$ für alle $t \in I$.

Beweis: Durch Anwendung der mehrdimensionalen Kettenregel erhält man für alle $t \in I$ jeweils

$$\begin{aligned} (E \circ \varphi)'(t) &= E'(\varphi(t))\varphi'(t) = \begin{pmatrix} \partial_1 E(\varphi(t)) & \partial_2 E(\varphi(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1'(t) \\ \varphi_2'(t) \end{pmatrix} = \\ \partial_1 E(\varphi(t))\varphi_1'(t) + \partial_2 E(\varphi(t))\varphi_2'(t) &= \partial_1 E(\varphi(t))f_1(\varphi(t)) + \partial_2 E(\varphi(t))f_2(\varphi(t)) = 0 \end{aligned}$$

wobei im dritten Schritt verwendet wurde, dass φ eine Lösung des Systems $y_1' = f_1(y_1, y_2)$, $y_2' = f_2(y_1, y_2)$ ist, und im letzten Schritt die definierende Eigenschaft von E als Erhaltungsgröße. \square

(3.38) Definition Eine stetig differenzierbare Funktion $H : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine *Hamilton-Funktion* des autonomen Systems $y' = f(y)$, wenn $\partial_1 H = -f_2$ und $\partial_2 H = f_1$ auf ganz D erfüllt ist.

Offenbar ist jede Hamilton-Funktion $H : D \rightarrow \mathbb{R}$ eines Systems $y' = f(y)$ auch eine Erhaltungsgröße, denn nach Definition gilt

$$\partial_1 H \cdot f_1 + \partial_2 H \cdot f_2 = (-f_2) \cdot f_1 + f_1 \cdot f_2 = 0$$

auf ganz D . Im letzten Abschnitt zur Funktionentheorie haben wir *einfach zusammenhängende Gebiete* als offene Teilmengen von \mathbb{C} definiert. Die Definition lässt sich ohne wesentliche Änderung auf den \mathbb{R}^n übertragen. Mit diesem Begriff lässt sich ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Existenz von Hamilton-Funktionen formulieren.

(3.39) Satz Sei $y' = f(y)$ ein autonomes System, wobei die Funktion f auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet $D \subseteq \mathbb{R}^2$ definiert sei. Genau dann existiert eine Hamilton-Funktion des Systems, wenn

$$\partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 = 0$$

auf ganz D erfüllt ist.

Beweis: „ \Rightarrow “ Ist H eine Hamilton-Funktion des Systems $y' = f(y)$, dann gilt auf Grund der stetigen Differenzierbarkeit der Funktion H und des Satzes von Schwarz

$$\partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 = \partial_1(\partial_2 H) + \partial_2(-\partial_1 H) = \partial_{12} H - \partial_{21} H = 0.$$

„ \Leftarrow “ Für den Beweis müssen wir auf den Differentialformen-Kalkül zurückgreifen, den wir aus Zeitgründen leider nicht einführen können. Wir betrachten die auf D definierte Differentialform $\omega = -f_2 dx + f_1 dy$. Diese Differentialform ist *geschlossen*, d.h. es gilt $d\omega = 0$, wie die Rechnung

$$\begin{aligned} d\omega &= d(-f_2 dx + f_1 dy) = -df_2 \wedge dx + df_1 \wedge dy = \\ &= -\partial_1 f_2 dx \wedge dx - \partial_2 f_2 dy \wedge dx + \partial_1 f_1 dx \wedge dy + \partial_2 f_1 dy \wedge dy = \\ &= -\partial_2 f_2 dy \wedge dx + \partial_1 f_1 dx \wedge dy = (\partial_1 f_1 + \partial_2 f_2) dx \wedge dy = 0 \end{aligned}$$

zeigt. Nach dem sog. Poincaré-Lemma ist jede geschlossene Differentialform auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet *exakt*, d.h. es gibt eine stetig differenzierbare Funktion $H : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $dH = \omega$. Aus der Gleichung

$$\partial_1 H dx + \partial_2 H dy = dH = \omega = -f_2 dx + f_1 dy$$

folgt $\partial_1 H = -f_2$ und $\partial_2 H = f_1$. Also ist H eine Hamilton-Funktion des Systems. □

Wir beenden den Abschnitt mit einem klassischen Anwendungsbeispiel aus der Physik und betrachten eine Masse m an einem Fadenpendel der Länge $\ell = 1$. (Der Einfachheit halber verzichten wir auf die Verwendung physikalischer Einheiten.) Ziel ist die Bestimmung des Auslenkungswinkels α von m als zeitabhängige Funktion. Zu jedem Zeitpunkt t wirkt auf m die Gewichtskraft $F_g(t) = -mg$ in z -Richtung (der Höhe), mit der Erdbeschleunigung $g \approx 9,81$. Diese Kraft setzt sich zusammen aus einer Komponente $mg \cos(\alpha(t))$ in Richtung des Fadens, die durch die Fadenspannung kompensiert wird, und einer Komponente $F(t) = -mg \sin(\alpha(t))$ entgegen der Bewegungsrichtung. Letztere ist die auf m wirkende Gesamtkraft. Auf Grund des Newtonschen Gesetzes $F = ma$ gilt nun

$$m\alpha''(t) = F(t) = -mg \sin(\alpha(t)) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha''(t) = -g \sin(\alpha(t)).$$

An dieser Stelle wird (beispielsweise im Physikunterricht der Oberstufe) zur Vereinfachung häufig angenommen, dass die Pendelausschläge klein bleiben, so dass $\sin(\alpha(t)) \approx \alpha(t)$ angenommen werden kann. Man erhält dann α als Lösung der linearen DGL zweiter Ordnung $y'' = -gy$ mit konstanten Koeffizienten, die sich (wie wir im letzten Abschnitt gesehen haben) leicht mit Hilfe der Sinus- und Kosinusfunktion lösen lässt.

Ohne diese Vereinfachung ist α Lösung der *nichtlinearen* DGL $y'' = -g \sin(y)$. Diese entspricht dem ebenen autonomen System $y'_1 = y_2, y'_2 = -g \sin(y_1)$, also $y' = f(y)$ mit der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ bestehend aus den beiden Komponenten $f_1(y_1, y_2) = y_2, f_2(y_1, y_2) = -g \sin(y_1)$. Eine Hamilton-Funktion $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ muss nach Definition die Gleichungen

$$\partial_1 H(y_1, y_2) = -g \sin(y_1) \quad , \quad \partial_2 H(y_1, y_2) = y_2$$

erfüllen. Zum Beispiel ist $H(y_1, y_2) = -g \cos(y_1) + \frac{1}{2}y_2^2$ eine solche Funktion.

Die Funktion H besitzt auch eine physikalische Interpretation: Jeder Punkt $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ entspricht einem „Zustand“ des Systems, wobei y_1 den Auslenkungswinkel der Masse am Faden und y_2 dessen Änderung (die momentane Winkelgeschwindigkeit) angibt. Bis auf den konstanten Faktor m ist dann $-g \cos(y_1)$ die potentielle und $\frac{1}{2}y_2^2$ die kinetische Energie der Masse. Der Wert $H(y_1, y_2)$ der Hamiltonfunktion gibt dann die Gesamtenergie des Systems an. Ist nun $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Lösung von $y' = f(y)$, dann ist $(H \circ \beta)(t)$ nach Satz (3.37) auf I konstant. Wir haben auf diese Weise den *Energieerhaltungssatz* für dieses System hergeleitet. Eine Lösung $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ des Systems mit Komponenten β_1, β_2 erfüllt also

$$-g \cos(\beta_1(t)) + \frac{1}{2}\beta_2(t)^2 = E \quad \forall t \in I$$

für einen bestimmten Energiewert $E \in \mathbb{R}^+$. Leider kann für ein solches β in dieser Situation im Allgemeinen keine geschlossene Formel angegeben werden. Man kann aber Aufschluss über das qualitative Verhalten der Lösungen erhalten, indem man in der Ebene die Mengen $\{y \in \mathbb{R}^2 \mid H(y) = E\}$ (die sog. „Niveaulinien“ von H) für einzelne Werte von E skizziert.

Literaturverzeichnis

[Ba] M. Barner, F. Flor, *Analysis II*. de Gruyter Lehrbuch.

[FL] W. Fischer, I. Lieb, *Funktionentheorie*. vieweg studium - Aufbaukurs Mathematik.

[Fo] O. Forster, *Analysis 3*. vieweg studium - Grundkurs Mathematik.

[Fr] K. Fritsche, *Grundkurs Funktionentheorie*. Spektrum Akademischer Verlag.

[He] H. Heuser, *Lehrbuch der Analysis, Teil 2*. Teubner-Verlag.

[Hi] S. Hildebrandt, *Analysis 2*. Springer-Verlag.

[Kö] K. Königsberger, *Analysis 2*. Springer-Verlag.

[Wa] W. Walter, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Springer-Verlag.