Schnitte senkrecht zu den Koordinatenachsen

Definition (8.6)

Sei $C \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$ eine beliebige Teilmenge, $x \in \Omega_1$ und $y \in \Omega_2$. Dann definieren wir

$$C_x^1 \;=\; \{y \in \Omega_2 \mid (x,y) \in C\} \quad \text{und} \quad C_y^2 \;=\; \{x \in \Omega_1 \mid (x,y) \in C\}.$$

Wir nennen C_x^1 bzw. C_y^2 einen Schnitt durch C senkrecht zur x- bzw. zur y-Achse.

Notation:

Für jedes $C \in \mathscr{A}$ definieren wir die Funktion

$$s_C : \Omega_1 \to \bar{\mathbb{R}}_+, x \mapsto \mu_2(C_x^1).$$

Existenz des Produktmaßes

Satz (8.11)

Es gibt auf $\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$ ein eindeutig bestimmtes Maß μ mit

$$\mu(A_1 \times A_2) \;=\; \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) \qquad \text{für alle} \quad A_1 \in \mathscr{A}_1 \;,\; A_2 \in \mathscr{A}_2.$$

Dabei gilt

$$\mu(C) \;=\; \int \mu_2(C_x^1)\; d\mu_1(x) \;=\; \int \mu_1(C_y^2)\; d\mu_2(y)$$

für alle $C \in \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$. Das Maß μ ist ebenfalls σ-endlich. Wir bezeichnen es als das Produktmaß $\mu_1 \otimes \mu_2$ von μ_1 und μ_2.

Die Gleichungen für $\mu(C)$ bezeichnet man auch als Cavalierisches Prinzip.

Beweis von Satz 8.11

z.zg. Die Funktion μ auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ geg. durch

$$C \mapsto \int s_C \, d\mu_1 = \int \mu_2(C^1_x) \, d\mu_1(x) \text{ ist ein Maß.}$$

Nach Def gilt $\mu(\emptyset) = \int \mu_2(\emptyset^1_x) \, d\mu_1(x) = \int \mu_2(\emptyset) \, d\mu_1(x) = \int 0 \, d\mu_1(x) = 0$. Zur Überprüfung der σ-Additivität sei $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarw. disj. Mengen in $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.

bereits gezeigt: Für $C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$ gilt $s_C = \sum_{n=1}^{\infty} s_{C_n}$.

$$\Rightarrow \mu(C) = \int s_C \, d\mu_1 = \int \sum_{n=1}^{\infty} s_{C_n} \, d\mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \int s_{C_n} \, d\mu_1$$

$\Rightarrow \mu(C) = \int s_C \, d\mu_1 = \int \sum_{n=1}^{\infty} s_{C_n} \, d\mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \int s_{C_n} \, d\mu_1$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n)$. $\Rightarrow \mu$ ist tatsächlich ein Maß

Nachweis von $\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$ für bel. vorgeg. $A_1 \in \mathcal{A}_1$, $A_2 \in \mathcal{A}_2$: $s_{A_1 \times A_2} = \mu_2(A_2) \cdot 1_{A_1}$ (letzte Vl)

$\Rightarrow \mu(A_1 \times A_2) = \int s_{A_1 \times A_2} \, d\mu_1 = \int \mu_2(A_2) \cdot 1_{A_1} \, d\mu_1 \underset{\text{[Stufenfkt}}{=}$

$\mu_2(A_2)\mu_1(A_1) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$.

Zum Bew. der zweiten Gl. betrachte die Fkt. $\tilde{\mu} : \mathcal{A} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ geg. durch $C \mapsto \int \mu_1(C_y^2) \, d\mu_2(y)$. Zeige wie oben, dass $\tilde{\mu}$ ein Maß auf $\mathcal{A}$ mit $\tilde{\mu}(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) \; \forall A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2$ ist.

Eindeutigkeit des Produktmaßes $\Rightarrow \mu = \tilde{\mu}$

μ_1, μ_2 σ-endlich $\Rightarrow$ $\exists$ Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}_1$ und $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}_2$ mit $\Omega_1 = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $\Omega_2 = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n$, $\mu_1(A_n) < +\infty$, $\mu_2(B_n) < +\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei beide Folge mon. wachsend sind. überprüfe: Die Folge $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ geg. durch $C_n = A_n \times B_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ist mon. wachsend, und es gilt $\Omega_1 \times \Omega_2 = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n$.

außerdem $\mu(C_n) = \mu(A_n \times B_n) = \mu_1(A_n)\mu_2(B_n) < +\infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

__Anwendung:__ Kreisflächeninhalt, Kugelvolumen

Für $r \in \mathbb{R}_+$ definiere $C_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq r^2\}$ (Kreisscheibe vom Radius r. Bestimmung der Schnitte senkrecht zur x-Achse: Für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt die Äquiv. $y \in (C_r)^1_x \iff (x,y) \in C_r \iff x^2+y^2 \leq r^2$ $\iff y^2 \leq r^2 - x^2$. Ist $|x| > r$, ist diese Ungl. nie erfüllt, und somit $(C_r)^1_x = \emptyset$. Ansonsten ist die Ungl. äquivalent zu $|y| \leq \sqrt{r^2-x^2} \iff y \in [-\sqrt{r^2-x^2}, \sqrt{r^2-x^2}]$, es gilt also $(C_r)^1_x = [-\sqrt{r^2-x^2}, \sqrt{r^2-x^2}]$. $\rightarrow$ erhalte

$$s_{C_r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto \begin{cases} 2\sqrt{r^2-x^2} & \text{falls } |x| \leq r \\ 0 & \text{falls } |x| > r \end{cases}$$

$\leq r^2\}$

Schnitte

gilt

$+y^2 \leq r^2$

ie erfüllt,

äquivalent

es gilt

alte

$$\Rightarrow \mu_2(C_r) = \int S_{C_r}(x)\, d\mu_1(x) = \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2-x^2}\, dx$$

$$= 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\, dx = 2r\int_{-r}^{r} \sqrt{1-\left(\tfrac{x}{r}\right)^2}\, dx \underset{\uparrow \text{ Substitution } t \mapsto rt}{=}$$

$$2r^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx \underset{\uparrow \text{ siehe Skript}}{=}$$

$$2r^2 \cdot \left[\tfrac{1}{2} x\sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{2}\arcsin(x)\right]_{-1}^{1} = \pi r^2$$

Kugelvolumen: Sei $B_r = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq r^2\}$, die Kugel vom Radius r.

überprüfe: $(B_r)_x^1 = C_{\sqrt{r^2-x^2}}$ für $|x| \leq r$

und $(B_r)_x^1 = \emptyset$ für $|x| > r$.

A_1

$< +\infty$

wachsend

A

on.

C_n,

$\mu_2(B_n)$

$\square$

$$\Rightarrow \mu_3(B_r) = \int \mu_2\big((B_r)^1_x\big)\, d\mu_1(x) =$$

$$\int_{-r}^{r} \mu_2\big(C_{\sqrt{r^2-x^2}}\big)\, dx = \int_{-r}^{r} \pi(r^2-x^2)\, dx =$$

$$\pi\Big[r^2x - \tfrac{1}{3}x^3\Big]_{-r}^{r} = \pi\Big(r^3 - \tfrac{1}{3}r^3 + r^3 - \tfrac{1}{3}r^3\Big)$$

$$= \pi\Big(\tfrac{2}{3}r^3 + \tfrac{2}{3}r^3\Big) = \tfrac{4}{3}\pi r^3$$

$\square$

Messbarkeit entlang von Koordinatenachsen

Notation:

- Seien $(\Omega_1, \mathscr{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathscr{A}_2, \mu_2)$ zwei Maßräume. Es sei $(\Omega', \mathscr{A}')$ ein weiterer Messraum und $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \Omega'$ eine Abbildung.
- Für jedes $x \in \Omega_1$ bezeichnen wir mit f_x^1 die Funktion gegeben durch $f_x^1 : \Omega_2 \to \Omega'$, $y \mapsto f(x, y)$.
- Entsprechend sei für jedes $y \in \Omega_2$ die Funktion $f_y^2 : \Omega^1 \to \Omega'$ gegeben durch $f_y^2(x) = f(x, y)$ für alle $x \in \Omega_1$.

Lemma (8.12)

Sei $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \Omega'$ eine $(\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2)$-$\mathscr{A}'$-messbare Funktion. Dann gilt

(i) Die Funktion f_x^1 ist $\mathscr{A}_2$-$\mathscr{A}'$-messbar für jedes $x \in \Omega_1$.

(ii) Die Funktion f_y^2 ist $\mathscr{A}_1$-$\mathscr{A}'$-messbar für jedes $y \in \Omega_2$.

Beweis von Lemma 8.12, nur (i):

geg: $\mathcal{A}-\mathcal{A}'$-messbare Fkt. $f: \Omega_1 \times \Omega_2 \to \Omega'$

wobei $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ Sei $x \in \Omega_1$.

Beh. $f_x^1 : \Omega_2 \to \Omega'$ ist $\mathcal{A}_2-\mathcal{A}'$-messbar

Sei $A' \in \mathcal{A}'$. z.zg.: $(f_x^1)^{-1}(A') \in \mathcal{A}_2$

Für jedes $y \in \Omega_2$ gilt die Äquivalenz

$$y \in (f_x^1)^{-1}(A') \Leftrightarrow f_x^1(y) \in A' \Leftrightarrow f(x,y) \in A'$$

$$\Leftrightarrow (x,y) \in f^{-1}(A') \Leftrightarrow y \in (f^{-1}(A'))_x^1$$

also: $(f_x^1)^{-1}(A') = (f^{-1}(A'))_x^1$

f $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$-messbar, $A' \in \mathcal{A}'$ $\Rightarrow$ $f^{-1}(A') \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow$ $(f^{-1}(A'))^1_x$ ist $\mathcal{A}^2$-messbar, da Schnitte von messbaren Mengen messbar sind.

$\square$

Der Satz von Tonelli

Satz (8.13)

Sei $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}_+$ eine $(\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2)$-messbare Funktion. Dann gilt

(i) Die Abbildung $\Omega_2 \to \bar{\mathbb{R}}_+$, $y \mapsto \int f_y^2 \, d\mu_1$ ist $\mathscr{A}_2$-messbar.

(ii) Die Abbildung $\Omega_1 \to \bar{\mathbb{R}}_+$, $x \mapsto \int f_x^1 \, d\mu_2$ ist $\mathscr{A}_1$-messbar.

(iii) Es gilt
$$\int f \, d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int \left(\int f_y^2 \, d\mu_1 \right) d\mu_2(y) = \int \left(\int f_x^1 \, d\mu_2 \right) d\mu_1(x).$$

Beweis von Satz 8.13:

geg: $f: \Omega_1 \times \Omega_2 \to \bar{\mathbb{R}}_+$, $\mathcal{A}$-messbar, wobei $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$

Betrachte zunächst den Fall, dass f eine Stufenfkt ist, $f = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i 1_{C_i}$ mit $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}_+$ und $C_1, \dots, C_r \in \mathcal{A}$ paarw disjunkt. Für $y \in \Omega_2$ gilt

$$f_y^2 = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i (1_{C_i})_y^2 \overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{r} \alpha_i 1_{(C_i)_y^2}$$

zu (*): Für alle $x \in \Omega_1$ gilt die Äquiv.

$$(1_{C_i})_y^2(x) = 1 \Leftrightarrow 1_{C_i}(x,y) = 1 \Leftrightarrow (x,y) \in C_i$$

$\Leftrightarrow x \in (C_i)^2_y \Leftrightarrow 1_{(C_i)^2_y}(x) = 1.$

$$\Rightarrow \int f^2_y \, d\mu_1 = \sum_{i=1}^r \alpha_i \underbrace{\mu_1((C_i)^2_y)}_{= s_{C_i}(y)}$$

Weil s_{C_i} eine messbare Fkt. auf Ω_2 ist, ist auch $y \mapsto \int f^2_y \, d\mu_1$ messbar.

Ebenso beweist man die Messbarkeit von $\Omega_1 \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $x \mapsto \int f^1_x \, d\mu_2$.

Schließlich gilt

$$\int \left(\int f^2_y \, d\mu_1 \right) d\mu_2(y) = \int \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i \mu_1((C_i)^2_y) \right) d\mu_2(y)$$

$$= \sum_{i=1}^r \alpha_i \cdot \int \mu_1((C_i)^2_y) \, d\mu_2(y) \underset{\uparrow \text{Satz 8.11}}{=} \sum_{i=1}^r \alpha_i \mu(C_i)$$

$= \int f \, d\mu$.

Sei nun f eine bel. nichtneg. messbare Fkt.

Wähle eine monoton w. Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stu-fenfkt. mit der Eig. $\sup_n f_n = f$.

überprüfe: $\sup_n (f_n)^2_y = f^2_y \quad \forall y \in \Omega_2$

außerdem ist $((f_n)^2_y)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend

$\Rightarrow \int f^2_y \, d\mu_1 = \sup_n \int (f_n)^2_y \, d\mu_1 \quad \forall y \in \Omega_2$

und die Folge der Integrale ist mon. wachsend.

s.o. $\Rightarrow y \mapsto \int (f_n)^2_y \, d\mu_1$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine messbare Fkt. Damit ist auch $y \mapsto$

$)^2_y)\, d\mu_2(y))$

$\mu(C_i)$

$\int f^2_y \, d\mu_1$ messbar (weil das Supremum messb. Fkt. messbar ist). Genauso beweist man die Messbarkeit von $x \mapsto \int f^1_x \, d\mu_2$.

Herleitung der Gleichung für das Integral:

$$\int \left(\int f^2_y \, d\mu_1 \right) d\mu_2(y) = \sup_n \int \left(\int (f_n)^2_y \, d\mu_1 \right) d\mu_2(y)$$

$$\stackrel{\text{o.}}{=} \sup_n \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu .$$

□

Der Satz von Fubini

Satz (8.14)

Sei $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \bar{\mathbb{R}}$ eine $\mu_1 \otimes \mu_2$-integrierbare Funktion.
Dann gilt

(i) Die Funktion f_x^1 ist für μ_1-fast alle $x \in \Omega_1$ μ_2-integrierbar.

(ii) Die Funktion f_y^2 ist für μ_2-fast alle $y \in \Omega_2$ μ_1-integrierbar.

(iii) Die μ_1-fast überall definierte Funktion $x \mapsto \int f_x^1 \, d\mu_2$ ist μ_1-integrierbar, und die μ_2-fast überall definierte Funktion $y \mapsto \int f_y^2 \, d\mu_1$ ist μ_2-integrierbar. Es gilt

$$\int f \, d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int \left(\int f_y^2 \, d\mu_1 \right) d\mu_2(y) = \int \left(\int f_x^1 \, d\mu_2 \right) d\mu_1(x).$$

Anwendung: Stetige Funktionen auf Rechtecken

Folgerung (8.15)

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c < d$, sei $Q = [a, b] \times [c, d]$, und sei $f : Q \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist f Lebesgue-integrierbar, die Funktion $[c, d] \to \mathbb{R}$, $y \mapsto f(x, y)$ ist für jedes $x \in [a, b]$ Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\int_Q f \, d\mu_2 \quad = \quad \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx.$$

einfache Anwendung des Satzes von Fubini:

$f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto xy$

Sei $Q = [0,1]^2$. Dann gilt $\int_Q f \, d\mu_2 \overset{(8.15)}{=}$

$\int_0^1 \left(\int_0^1 xy \, dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}xy^2\right]_0^1 dx = \int_0^1 \frac{1}{2}x \, dx$

$= \left[\frac{1}{4}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{4}.$

Achtung: Die Gleichheit der beiden verschachtelten Integrale im Satz von Fubini ist im Allg. falsch, wenn die Integrierbarkeit bzgl. des Produktmaßes nicht geg. ist.

Bsp: $f:]0,1] \times]0,1] \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$$\int_{]0,1]} \left(\int_{]0,1]} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)} \, d\mu(x) \right) d\mu(y) = \int_{]0,1]} \left[-\frac{x}{x^2+y^2} \right]_0^1 d\mu(y)$$

$$= -\int_{]0,1]} \frac{1}{1+y^2} \, d\mu(y) = \left[-\arctan(y) \right]_0^1 = -\frac{1}{4}\pi$$

$$\int_{]0,1]} \left(\int \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)} \, d\mu(y) \right) d\mu(x) = \int_{]0,1]} \left[\frac{y}{x^2+y^2} \right]_0^1 d\mu(x) = \int_{]0,1]} \frac{1}{1+x^2} \, d\mu(x)$$

$$= \left[\arctan(x) \right]_0^1 = \frac{1}{4}\pi$$