§8. Produktmaße und Satz von Fubini

Seien $(\Omega_k, \mathscr{A}_k)$ Messräume für $k \in \{1,2\}$, außerdem $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, und es bezeichen $\pi_1 : \Omega \to \Omega_1$ und $\pi_2 : \Omega \to \Omega_2$ die zugehörigen Projkektionsabbildungen.

Definition (8.1)

Als Produkt $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$ der beiden σ-Algebren $\mathscr{A}_1$ und $\mathscr{A}_2$ bezeichnet man die von dem System

$$\left\{\pi_k^{-1}(A) \mid k \in \{1,2\}\ ,\ A \in \mathscr{A}_k\right\}$$

erzeugte σ-Algebra. Das Paar $(\Omega, \mathscr{A})$ wird dann das Produkt der beiden Messräume $(\Omega_1, \mathscr{A}_1)$ und $(\Omega_2, \mathscr{A}_2)$ genannt.

Man sieht unmittelbar, dass $\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$ die kleinste σ-Algebra in $\Omega_1 \times \Omega_2$ ist, bezüglich der die beiden Projektionsabbildungen π_1, π_2 messbar sind.

Erzeugendensystem vom Produktmaßen

Satz (8.2)

Für $k = 1, 2$ sei $\mathscr{E}_k$ jeweils ein Erzeugendensystem von $\mathscr{A}_k$, wobei wir zusätzlich annehmen, dass in $\mathscr{E}_k$ jeweils eine monoton wachsende Folge mit $(E_{km})_{m\in\mathbb{N}}$ mit $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} E_{km} = \Omega_k$ exstiert. Dann bilden die Mengen der Form $E_1 \times E_2$ mit $E_1 \in \mathscr{E}_1$ und $E_2 \in \mathscr{E}_2$ ein Erzeugendensystem von $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$.

Der Satz zeigt auch, dass unter der angegebenen Voraussetzung die Mengen der Form $A_1 \times A_2$ mit $A_k \in \mathscr{A}_k$ für $k \in \{1, 2\}$ in $\mathscr{A}$ enthalten sind und ein Erzeugendensystem dieser σ-Algebra bilden.

Beweis von Satz 8.2

Σ_k Erzeugendensystem der σ-Algebra $\mathcal{A}_k$ $(k=1,2)$

$(E_{km})_{m\in\mathbb{N}}$ jeweils mon. wachsende Folge in Σ_k

mit $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} E_{km} = \Omega_k$, für $k=1,2$

Sei $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ und $\mathcal{A}'$ die von $\{E_1 \times E_2 \mid E_1 \in \mathcal{A}_1, E_2 \in \mathcal{A}_2\}$ erzeugte σ-Algebra. z.zg. $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$

„$\supseteq$" Es reicht, $E_1 \times E_2 \in \mathcal{A}$ $\forall E_1 \in \mathcal{A}_1, E_2 \in \mathcal{A}_2$ zu überprüfen. Seien also solche E_1, E_2 vorgeg.

$\pi_1^{-1}(E_1) = E_1 \times \Omega_2$, $\pi_2^{-1}(E_2) = \Omega_1 \times E_2$

Nach Def von $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ sind diese Mengen in $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ enthalten, und es gilt $(E_1 \times \Omega_2) \cap (\Omega_1 \times E_2) = E_1 \times E_2$.
Als Durchschnitt liegt $E_1 \times E_2$ ebenfalls in $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.

„$\subseteq$" Es genügt zu zeigen, dass π_1, π_2 messbar bzgl. $\mathcal{A}'$ und $\mathcal{A}_1$ bzw. $\mathcal{A}_2$ sind (weil $\mathcal{A}$ die kleinste σ-Algebra mit dieser Eigenschaft ist). Zeige dies nur für π_1 (Nachweis für π_2 analog).
Wir müssen nur überprüfen, dass $\pi_1^{-1}(E) \in \mathcal{A}'$ für jedes E aus $\mathcal{E}_1$ gilt. Sei also $E \in \mathcal{E}_1$ vorgeg. Dann gilt

$$\pi_1^{-1}(E) = E \times \Omega_2 = E \times \Big(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} E_{2m}\Big) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} E \times E_{2m}.$$

Jedes $E \times E_{2m}$ liegt im Erz.-system von $\mathcal{A}'$, also auch in $\mathcal{A}'$.
Also liegt auch $\pi_1^{-1}(E)$ als abzählbare Vereinigung in $\mathcal{A}'$. $\square$

Die Borelsche σ-Algebra als Produktmaß

Wie man sich leicht überzeugt, kann das Produkt der Messräume von zwei auf endlich viele Faktoren ausgedehnt werden.

Folgerung (8.3)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ stimmt die Borelsche σ-Algebra $\mathscr{B}_n$ in $\mathbb{R}^n$ stimmt mit der σ-Algebra $\bigotimes_{k=1}^{n} \mathscr{B}_1$ überein.

Zur Eindeutigkeit des Produktmaßes

Satz (8.4)

Für $k = 1, 2$ sei $\mathscr{E}_k$ jeweils ein $\cap$-stabiles Erzeugendensystem von $\mathscr{A}_k$, das eine monoton wachsende Folge $(E_{km})_{m\in\mathbb{N}}$ mit $\bigcup_{m=1}^{\infty} E_{km} = \Omega_k$ und $\mu_k(E_{km}) < +\infty$ für alle $m \in \mathbb{N}$ enthält. Dann gibt es höchstens ein Maß μ auf $(\Omega, \mathscr{A})$ mit

$$\mu(E_1 \times E_2) \quad = \quad \mu_1(E_1)\mu_2(E_2) \qquad \text{für alle} \quad E_1 \in \mathscr{E}_1 \text{ und } E_2 \in \mathscr{E}_2.$$

Erinnerung §4: Kriterium zur Eindeutigkeit von Maßen

$(\Omega, \mathcal{A})$ Messraum, $\overbrace{\mathcal{E}}^{\cap\text{-stabiles}}$ Erzeugendensystem der σ-Algebra $\mathcal{A}$, $(E_m)_{m\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathcal{E}$ mit

$$\Omega = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} E_m$$

Seien $\mu, \tilde{\mu}$ Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit $\mu(E) = \tilde{\mu}(E)$, wobei μ und $\tilde{\mu}$ auf den Elementen E_m nur endliche Werte annehmen.

Dann folgt $\mu = \tilde{\mu}$.

Beweis von Satz 8.4

Vor.: Sei μ_k ein Maß auf $(\Omega_k, \mathcal{A}_k)$ für $k = 1, 2$. Seien $(E_{km})_{m \in \mathbb{N}}$ mon. wachsende Folgen mit $\Omega_k = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} E_{km}$, $\mu_k(E_{km}) < +\infty$ $\forall m \in \mathbb{N}$, für $k = 1, 2$.

Sei $\mathcal{E}_k$ ein $\cap$-stabiles Erz-system von $\mathcal{A}_k$, das $(E_{km})_{m \in \mathbb{N}}$ enthält, für $k = 1, 2$.

Seien $\mu, \tilde{\mu}$ Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit

$\mu(E \times E') = \mu_1(E)\mu_2(E') = \tilde{\mu}(E \times E')$

für alle $E \in \mathcal{E}_1$, $E' \in \mathcal{E}_2$. z.zg.: $\mu = \tilde{\mu}$

Satz 8.2 $\Rightarrow \Sigma = \{ E \times E' \mid E \in \Sigma_1,\ E' \in \Sigma_2 \}$
ist ein Erz.-system von $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$

Sind $E, F \in \Sigma_1$, $E', F' \in \Sigma_2$, dann gilt

$$(E \times F) \cap (E' \times F') = \underbrace{(E \cap E')}_{\in \Sigma_1} \times \underbrace{(F \cap F')}_{\in \Sigma_2} \in \Sigma$$

$\Rightarrow \Sigma$ ist $\cap$-stabil.

Betrachte die Folge $(E_{1m} \times E_{2m})_{m \in \mathbb{N}}$. Diese ist mon. wachsend. Wegen $\mu(E_{1m} \times E_{2m}) = \mu_1(E_{1m})\, \mu_2(E_{2m})$ nimmt μ auf der Folge nur endl. Werte an, und dasselbe gilt für $\tilde{\mu}$. Also folgt $\mu = \tilde{\mu}$ aus dem Eindeutigkeitskriterium von oben. $\square$

Zur Eindeutigkeit des Produktmaßes (Forts.)

Folgerung (8.5)

Ist μ_k für $1 \le k \le n$ jeweils ein σ-endliches Maß auf $\mathscr{A}_k$, dann gibt es höchstens ein Maß μ auf $\bigotimes_{k=1}^{n} \mathscr{A}_k$ mit

$$\mu(A_1 \times \ldots \times A_n) \quad = \quad \prod_{k=1}^{n} \mu_k(A_k) \qquad \text{für} \quad A_k \in \mathscr{A}_k \ , \ 1 \le k \le n.$$

Schnitte senkrecht zu den Koordinatenachsen

Von nun an setzen wir voraus, dass $(\Omega_1, \mathscr{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathscr{A}_2, \mu_2)$ zwei Maßräume mit σ-endlichen Maßen μ_1, μ_2 sind.

Definition (8.6)

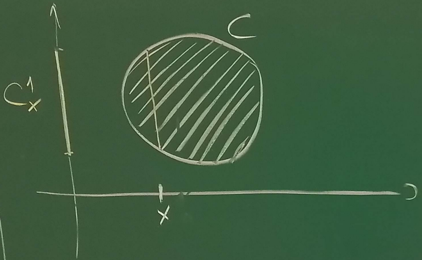
Sei $C \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$ eine beliebige Teilmenge, $x \in \Omega_1$ und $y \in \Omega_2$. Dann definieren wir

$$C_x^1 \;=\; \{y \in \Omega_2 \mid (x,y) \in C\} \quad \text{und} \quad C_y^2 \;=\; \{x \in \Omega_1 \mid (x,y) \in C\}.$$

Wir nennen C_x^1 bzw. C_y^2 einen Schnitt durch C senkrecht zur x- bzw. zur y-Achse.

mir
nde
$) < +\infty$
on $\mathcal{A}_k$
$\times E')$
$= \tilde{\mu}$

Beispiel: Schnitte senkrecht zur x-Achse



Schnitte und Mengenoperationen

Lemma (8.7)

Sei $C \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$ und $(C_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\Omega_1 \times \Omega_2$. Dann gelten für alle $x \in \Omega_1$ die Gleichungen $(\Omega \setminus C)^1_x = \Omega_2 \setminus C^1_x$ und $\left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} C_m\right)^1_x = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} (C_m)^1_x$. Analoge Gleichungen gelten auch für die Schnitte senkrecht zur y-Achse.

Lemma (8.8)

Sei $C \in \mathscr{A}$. Dann ist für jedes $x \in \Omega_1$ die Menge C^1_x in $\mathscr{A}_2$ enthalten. Ebenso gilt $C^2_y \in \mathscr{A}_1$ für alle $y \in \Omega_2$.

Beweis von Lemma 8.7, nur für Vereinigungen

Sei $(C_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $x \in \Omega_1$.

Beh.: $$\Big(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} C_m\Big)^1_x = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} (C_m)^1_x$$

Sei $y \in \Omega_2$. Dann gilt die Äquivalenz

$$y \in \Big(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} C_m\Big)^1_x \iff (x,y) \in \bigcup_{m\in\mathbb{N}} C_m \iff$$

$$\exists m \in \mathbb{N} : (x,y) \in C_m \iff \exists m \in \mathbb{N} : y \in (C_m)^1_x$$

$$\iff y \in \bigcup_{m\in\mathbb{N}} (C_m)^1_x .$$

$\square$

Maß der Schnittmengen als Funktion der Koordinate

Notation:

Für jedes $C \in \mathscr{A}$ definieren wir die Funktion

$$s_C : \Omega_1 \to \bar{\mathbb{R}}_+, x \mapsto \mu_2(C_x^1).$$

Lemma (8.9)

Die Abbildungen s_C erfüllen wir alle $C \in \mathscr{A}$ und alle $x \in \Omega_1$ die folgenden Rechenregeln.

(i) $s_\Omega(x) = \mu_2(\Omega_2)$

(ii) $s_{\Omega \setminus C}(x) = \mu_2(\Omega_2) - s_C(x)$.

(iii) Gilt $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ für eine Folge $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathscr{A}$ bestehend aus paarweise disjunkten Mengen, dann folgt $s_C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} s_{C_n}(x)$.

(iv) Ist $A_1 \in \mathscr{A}_1$ und $A_2 \in \mathscr{A}_2$, dann gilt $s_{A_1 \times A_2} = \mu_2(A_2) \cdot 1_{A_1}$

Beweis von Lemma 8.9, nur für (iii), (iv)

zu (iii) geg. Folge $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus paarweise disj. Mengen $C_n \in \mathcal{A}$

Sei $C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ und $x \in \Omega_1$. z.zg. $s_C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} s_{C_n}(x)$

Die Gleichung ist äquivalent zu $\mu_2(C^1_x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2((C_n)^1_x)$.

Da μ_2 ein Maß ist, ergibt sich die Gleichung aus $C^1_x = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (C_n)^1_x$ (siehe Lemma 8.7) und der paarweisen Disjunktheit der Mengen $(C_n)^1_x$. Um dies zu überprüfen, seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \neq n$. Ang. $(C_m)^1_x \cap (C_n)^1_x \neq \emptyset$. Sei y ein Punkt im Durchschnitt. $y \in (C_m)^1_x \Rightarrow (x,y) \in C_m$, $y \in (C_n)^1_x \Rightarrow (x,y) \in C_n$

$\Rightarrow (x,y) \in C_m \cap C_n$ ↯ da $C_m \cap C_n = \emptyset$

<u>zu (iv)</u> ggf. $A_1 \in \mathcal{A}_1$, $A_2 \in \mathcal{A}_2$. z.zg.:

$s_{A_1 \times A_2} = \mu_2(A_2) \cdot 1_{A_1}$. Sei $x \in \Omega_1$.

z.zg: $s_{A_1 \times A_2}(x) = \mu_2(A_2) \cdot 1_{A_1}(x)$.

gleichbedeutend: $\mu_2((A_1 \times A_2)^1_x) = \mu_2(A_2)\, 1_{A_1}(x)$

<u>1. Fall</u>: $x \notin A_1 \Rightarrow \mu_2(A_2) \cdot 1_{A_1}(x) = \mu_2(A_2) \cdot 0$

$= 0$. Es gilt $(A_1 \times A_2)^1_x = \emptyset$, denn

ang. $\exists\, y \in (A_1 \times A_2)^1_x \Rightarrow (x,y) \in A_1 \times A_2$

$\Rightarrow x \in A_1$ ↯

<u>2. Fall</u>: $x \in A_1 \Rightarrow 1_{A_1}(x) = 1$. Dann gilt

$\mu_2(A_2) \cdot 1_{A_1}(x) = \mu_2(A_2)$ Es gilt $(A_1 \times A_2)^1_x = A_2$, denn für alle $y \in \Omega_2$ gilt die Äquivalenz $y \in (A_1 \times A_2)^1_x \Longleftrightarrow (x, y) \in A_1 \times A_2 \overset{x \in A_1}{\Longleftrightarrow} y \in A_2$. Also erhalten wir auf der linken Seite $\mu_2((A_1 \times A_2)^1_x) = \mu_2(A_2)$

Messbarkeitseigenschaft von s_C

Erinnerung:
Ein Dynkin-System in einer Menge Ω ist ein Mengensystem $\mathscr{D}$ mit $\varnothing \in \mathscr{D}$, dass abgeschlossen unter Komplementen und abzählbaren disjunkten Vereinigungen ist.

Lemma (8.10)

Sei $C \in \mathscr{A}$. Dann gilt

(i) Die Funktion $s_C : \Omega_1 \to \bar{\mathbb{R}}_+, x \mapsto \mu_2(C_x^1)$ ist $\mathscr{A}_1$-messbar.
(ii) Die Funktion $s'_C : \Omega_2 \to \bar{\mathbb{R}}_+, y \mapsto \mu_1(C_y^2)$ ist $\mathscr{A}_2$-messbar.

Beweis von Lemma 8.10, nur Teil (i) (Skizze)

Zunächst überprüft man mit Hilfe der Regeln (i), (ii) und (iii) aus Lemma 8.9, dass das Mengensystem

$$\mathscr{D} \;=\; \{C \in \Omega_1 \mid s_C \text{ ist } \mathscr{A}_1\text{-messbar } \}$$

ein Dynkin-System ist. Auf Grund der Regel (iv) ist das System

$$\mathscr{E} \;=\; \{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \mathscr{A}_1, A_2 \in \mathscr{A}_2\}$$

in $\mathscr{D}$ enthalten. Daraus folgt $\delta(\mathscr{E}) \subseteq \mathscr{D}$. Außerdem ist es $\cap$-stabil, und nach Satz 4.3 folgt daraus $\sigma(\mathscr{E}) = \delta(\mathscr{E})$. Wegen $\sigma(\mathscr{E}) = \mathscr{A}$ folgt daraus wiederum $\mathscr{D} = \mathscr{A}$. Dies bedeutet, dass s_C für jedes $C \in \mathscr{A}$ eine messbare Funktion ist.

Existenz des Produktmaßes

Satz (8.11)

Es gibt auf $\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$ ein eindeutig bestimmtes Maß μ mit

$$\mu(A_1 \times A_2) \;=\; \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) \qquad \text{für alle} \quad A_1 \in \mathscr{A}_1 \;,\; A_2 \in \mathscr{A}_2.$$

Dabei gilt

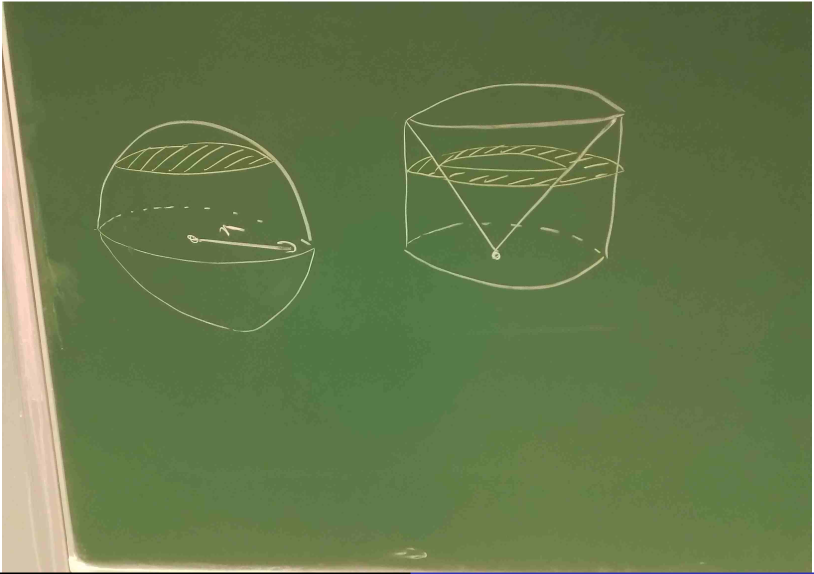
$$\mu(C) \;=\; \int \mu_2(C_x^1)\, d\mu_1(x) \;=\; \int \mu_1(C_y^2)\, d\mu_2(y)$$

für alle $C \in \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$. Das Maß μ ist ebenfalls σ-endlich. Wir bezeichnen es als das Produktmaß $\mu_1 \otimes \mu_2$ von μ_1 und μ_2.

Die Gleichungen für $\mu(C)$ bezeichnet man auch als Cavalierisches Prinzip.

Historische Anwendung des Cavalierischen Prinzips

(Erläuterung auf der nächsten Seite)



- Das Ziel ist der Nachweis, dass die Kugel mit Radius r das Volumen $\frac{4}{3}\pi r^3$ besitzt.
- Für diesen Nachweis setzte Cavalieri neben eine Halbkugel H vom Radius r einen Zylinder Z der Höhe r mit Grundflächenradius r. In den Zylinder setzte er einen auf der Spitze stehenden Kegel K, ebenfalls mit Höhe r und Grundflächenradius r.
- Bereits bekannt waren die Volumina $\mu_3(Z) = \pi r^3$ und $\mu_3(K) = \frac{1}{3}\pi r^3$ besitzt. Das Komplement $Z \setminus K$ des Kegels innerhalb des Zylinders hat also das Volumen $v_3(Z \setminus K) = \pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$.

- Cavalieris Idee bestand nun darin, sowohl H als auch $Z \setminus K$ in jeder Höhe $h \in [0, r]$ mit einer Ebene parallel zur xy-Ebene zu schneiden. Aus der Halbkugel wird ein Kreis vom Radius $\sqrt{r^2 - h^2}$ ausgeschnitten, wie man durch Anwendung des Satzes des Pythagoras leicht erkennt. Dieser Kreis hat den Flächeninhalt $\pi(r^2 - h^2)$.
- Dieselbe Ebene schneidet aus Z einen Kreis vom Radius r aus, und aus dem Kegel einen Kreis vom Radius h (weil der Radius dieses Kreises linear anwächst, wenn h von 0 nach r läuft). Die Differenz dieser beiden Kreise ist ein Kreisring vom Flächeninhalt $\pi(r^2 - h^2)$.
- Aus der Tatsache, dass aus H und $Z \setminus K$ auf jeder Höhe eine gleich größe Fläche ausgeschnitten wird, konnte Cavalieri schließen, dass $v_3(H) = v_3(Z \setminus K) = \frac{2}{3}\pi r^3$ gilt.