Erinnerung:
Monotone Konvergenz nichtnegativer Funktionen

Satz (6.12)

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge $\mathscr{A}$-messbarer Funktionen $f_n : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}_+$, und sei $f = \sup f_n$. Dann ist auch f eine $\mathscr{A}$-messbare Funktion, und es gilt

$$\int f \; d\mu \quad = \quad \sup \int f_n \; d\mu.$$

Satz von Beppo Levi über die monotone Konvergenz

Satz (7.1)

Sei $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge von μ-fast überall monoton wachsenden, μ-integrierbaren Funktionen $f_m : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ mit der Eigenschaft, dass die Folge der Integral $\int f_m \, d\mu$ in $\mathbb{R}$ beschränkt ist. Dann existiert eine μ-integrierbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ punktweise μ-fast überall gegen f konvergiert, und es gilt $\lim_m \int f_m \, d\mu = \int f \, d\mu$.

Anmerkungen:

- Der Satz von Beppo Levi gilt auch für monoton fallende Folgen μ-integrierbarer Funktionen.
- Für Riemann-integrierbare Funktionen ist eine entsprechende Aussage falsch.

Beweis von Satz 7.1

geg.: $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ vollständiger Maßraum, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge μ-integrierbarer Fkt. $f_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, μ-fast überall monoton wachsend

Vor.: Die Folge der Integrale $\int f_n \, d\mu$ ist nach oben beschränkt.

Beh.: Es gibt eine μ-integrierbare Fkt. $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ μ-fast überall und

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

Nach Voraussetzung gibt es eine Nullmenge $N_1 \subseteq \Omega$, so dass $(f_m(x))_{m\in\mathbb{N}}$ für alle $x \in \Omega \setminus N_1$ monoton wachsend ist. Ändere f_m für jedes $m \in \mathbb{N}$ so ab, dass $f_m(x) = 0$ für jedes $x \in N_1$. Dann ist $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ überall monoton wachsend, und die Integrale der $\int f_m \, d\mu$ bleiben unverändert.

Setze $g_m = f_m - f_1 \;\forall m \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow$ $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ist dann eine Folge nicht-negativer, μ-integrierbarer und damit auch $\mathcal{A}$-messbarer Fkt. Setze $g = \sup_m g_m$. Nach Satz 6.12 ist auch g $\mathcal{A}$-messbar, und $\int g \, d\mu = \sup_m \int g_m \, d\mu$.

Mit $(\int f_m \, d\mu)_{m\in\mathbb{N}}$ ist auch $(\int g_m \, d\mu)_{m\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt, da $\int g_m \, d\mu = \int f_m \, d\mu - \int f_1 \, d\mu$. Daraus folgt, dass g sogar μ-integrierbar ist.

Setze $f = g + f_1$. Aus $g(x) = \sup_m g_m(x) = \lim_{m \to \infty} g_m(x)$ für alle $x \in \Omega$ folgt jeweils

$$\lim_{m \to \infty} f_m(x) = \lim_{m \to \infty} g_m(x) + f_1(x) = g(x) + f_1(x) = f(x).$$

Daraus folgt, dass $\lim f_m = f$ μ-fast überall auch für die ursprüngliche Folge $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ gilt. Mit g ist auch f μ-integrierbar. Außerdem gilt

$$\int f \, d\mu = \int g \, d\mu + \int f_1 \, d\mu = \sup_m \int g_m \, d\mu + \int f_1 \, d\mu$$

$$\int g \, d\mu + \int f_1 \, d\mu = \sup_m \int g_m \, d\mu + \int f_1 \, d\mu$$

$$= \lim_{m \to \infty} \int g_m \, d\mu + \int f_1 \, d\mu =$$

$$\lim_{m \to \infty} \int f_m \, d\mu - \int f_1 \, d\mu + \int f_1 \, d\mu =$$

$$\lim_{m \to \infty} \int f_m \, d\mu$$

$\square$

Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz

Satz (7.2)

Sei $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge μ-integierbarer Funktionen $f_m : \Omega \to \mathbb{R}$, die fast überall gegen eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ konvergiert. Sei ferner $g : \Omega \to \mathbb{R}_+$ eine μ-integrierbare Funktion mit der Eigenschaft, dass μ-fast überall jeweils $|f_m| \le g$ erfüllt ist, für jedes $m \in \mathbb{N}$. Dann ist auch f μ-integrierbar, und es gilt

$$\int f \, d\mu \quad = \quad \lim_{m \to \infty} \int f_m \, d\mu.$$

Beweis von Satz 7.2

geg.: vollständiger Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$

Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μ-integrierbarer Funktionen

$f_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, konvergiert punktweise μ-fast überall gegen eine Fkt. $f : \Omega \to \mathbb{R}$

$g : \Omega \to \mathbb{R}_+$ μ-integrierbare Fkt. mit

$|f_n| \leq g$ μ-fast überall $\forall n \in \mathbb{N}$

Beh.: f ist μ-integrierbar und

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu$$

ist auch $|f_m| \le g$ μ-fast überall $\forall m \in \mathbb{N}$

Ändere die Fkt. f_m und g auf einer Nullmenge so ab, dass alle Bedingungen auf ganz Ω erfüllt sind.

$\square$

Definiere $g_{m,\nu} = \max\{f_m, f_{m+1}, \dots, f_{m+\nu}\}$ und $g_m = \sup_\nu g_{m,\nu}$ für alle $m, \nu \in \mathbb{N}$.

Dann ist $(g_{m,\nu})_{\nu \in \mathbb{N}}$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ monoton wachsend. Für alle $m, \nu \in \mathbb{N}$ gilt $|g_{m,\nu}| \le g$, somit ist $\left(\int g_{m,\nu}\, d\mu\right)_{\nu \in \mathbb{N}}$ nach oben durch $\int g\, d\mu$ beschränkt. Nach Def. gilt $g_m = \lim_{\nu \to \infty} g_{m,\nu}$.

Satz 7.1 $\Longrightarrow$ Jedes g_m ist μ-integrierbar, und $\int g_m\, d\mu = \lim_{\nu \to \infty} \int g_{m,\nu}\, d\mu$.

Nach Def. gilt $\forall m \in \mathbb{N}: g_m = \sup\{f_k \mid k \geq m\}$.

Daraus folgt, dass $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist.

Aus $|g_{m,\nu}| \leq g \ \forall m, \nu \in \mathbb{N}$ folgt $|g_m| \leq g \ \forall m \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow g_m \geq -g \ \forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow$ Die Folge der Integrale $\left(\int g_m \, d\mu\right)_{m\in\mathbb{N}}$ ist nach unten beschränkt. Satz 7.1 $\Rightarrow$ $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise μ-fast überall gegen eine μ-integrierbare Fkt $\tilde{f}$, und es gilt $\lim_{m\to\infty} \int g_m \, d\mu = \int \tilde{f} \, d\mu$.

<u>Beh</u>: $\tilde{f} = f$ μ-fast überall

Zeige dafür, dass $(g_m(x))_{m\in\mathbb{N}}$ für alle $x \in \Omega$ gegen $f(x)$

konvergiert. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Wegen $\lim_{m\to\infty} f_m(x) = f(x)$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|f_m(x) - f(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon \ \forall m \geq N$, d.h. $f(x) - \frac{1}{2}\varepsilon < f_m(x) < f(x) + \frac{1}{2}\varepsilon \ \forall m \geq N$. $\Rightarrow f(x) - \frac{1}{2}\varepsilon < g_{m,\nu}(x) < f(x) + \frac{1}{2}\varepsilon \ \forall m \geq N, \nu \in \mathbb{N}$

Wegen $\lim_{\nu\to\infty} g_{m,\nu}(x) = g_m(x)$ folgt $f(x) - \frac{1}{2}\varepsilon \leq g_m(x) \leq f(x) + \frac{1}{2}\varepsilon$ $\forall m \geq N \Rightarrow f(x) - \varepsilon < g_m(x) < g(x) + \varepsilon \quad \forall m \geq N \Rightarrow$ $|g_m(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall m \geq N$. ($\Rightarrow$ Beh.)

Wir erhalten $\lim_{m\to\infty} \int g_m \, d\mu = \int f \, d\mu$, und $f(x) \leq g_m(x)$ für alle $x \in \Omega$.

Definiere nun $h_{m,\nu} = \min\{f_m, f_{m+1}, \ldots, f_{m+\nu}\}$ und $h_m = \inf_\nu h_{m,\nu}$. Zeige genauso wie oben: Die Folge $(h_m)_{m\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise monoton wachsend gegen f.

es gilt $h_m \leq f$ und $\lim_{m\to\infty} \int h_m \, d\mu = \int f \, d\mu$.
(Die Existenz von $\int f \, d\mu$ wurde schon gezeigt, siehe oben.)

$\square$ Es gilt $h_m \leq f \leq g_m \ \forall m \in \mathbb{N}$, andererseits (offensichtlich) $h_m \leq f_m \leq g_m$.

$\longrightarrow \int h_m \, d\mu \leq \int f_m \, d\mu \leq \int g_m \, d\mu$

und $\lim_{m\to\infty} \int g_m \, d\mu = \lim_{m\to\infty} \int h_m \, d\mu = \int f \, d\mu$.

Aus dem Sandwich-Lemma folgt also, dass auch der Grenzwert $\lim_{m\to\infty} \int f_m \, d\mu$ existiert und mit $\int f \, d\mu$ übereinstimmt. $\square$

Stetigkeit parameterabhängiger Integrale

Sei (T, d) ein metrischer Raum.

Satz (7.3)

Sei $f : \Omega \times T \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften.

(i) Für jedes $t \in T$ ist $\Omega \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x, t)$ eine $\mathscr{A}$-messbare Funktion.

(ii) Es gibt ein $t_0 \in T$, so dass $T \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x, t)$ für μ-fast alle $x \in \Omega$ in t_0 stetig ist.

(iii) Es gibt eine Umgebung $U \subseteq T$ von t_0 und eine μ-integrierbare Funktion $g : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}_+$, so dass für alle $t \in U$ jeweils $|f(x, t)| \leq g(x)$ für μ-fast alle $x \in \Omega$ erfüllt ist.

Dann ist $F : U \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \int f(x, t)\, d\mu(x)$ eine auf ganz U definierte, reellwertige, in t_0 stetige Funktion.

Beweis von Satz 7.3

geg: Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, metrischer Raum (T, d), $t_0 \in T$

$f : \Omega \times T \to \mathbb{R}$, Voraussetzungen:

(i) $\Omega \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x,t)$ ist $\mathcal{A}$-messbar $\forall\, t \in T$

(ii) $T \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x,t)$ ist stetig in t_0 für μ-fast alle $x \in \Omega$

(iii) $\exists\, g : \Omega \to \mathbb{R}_+$ mit $|f(x,t)| \leq g(x)$ für μ-fast alle $x \in \Omega$, für alle t in einer Umgebung U von t_0, wobei g μ-integrierbar

Sei $F : U \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \int f(x,t)\, d\mu(x)$

Sei $F: U \to \mathbb{R},\ t \mapsto \int f(x,t)\, d\mu(x)$

z.zg: F ist auf ganz U definiert und stetig in t_0

Sei $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in U. z.zg: $F(t_n)$ ist definiert für alle $n \in \mathbb{N}$, ebenso $F(t_0)$, und $\lim_{n\to\infty} F(t_n) = F(t_0)$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\Omega \to f(x,t_n)$ $\mathcal{A}$-messbar, nach (i) und $|f(x,t_n)| \leq g(x)$ für μ-fast alle $x \in \Omega$, nach (iii).

Da g μ-integrierbar ist, folgt daraus, dass $\Omega \to f(x,t_n) =: f_n(x)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ auch μ-integrierbar ist. Damit ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge μ-integrierbarer Funktionen mit $|f_n| \leq g$ μ-fast überall. Nach (ii) gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f(x,t_n) = f(x,t_0)$ für μ-fast alle $x \in \Omega$. $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n = f_0$ μ-fast überall, wobei $f_0(x) = f(x,t_0)\ \forall x \in \Omega$.

Nach Satz 7.2 ist f_0 also μ-integrierbar, und es gilt $F(t_0) = \int f(x, t_0)\, d\mu(x) = \int f_0\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f(x, t_n)\, d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} F(t_n)$. $\square$

Differenzierbarkeit parameterabhängiger Integrale

Satz (7.4)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : \Omega \times I \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind.

(i) Für jedes $t \in I$ ist $\Omega \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x,t)$ eine $\mathscr{A}$-messbare Funktion.

(ii) Es gibt ein $t_0 \in I$, so dass $\Omega \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x,t_0)$ μ-integrierbar ist.

(iii) Auf dem gesamten Definitionsbereich $\Omega \times I$ existiert die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial t}$.

(iv) Es gibt eine μ-integrierbare Funktion $g : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}_+$, so dass für alle $t \in I$ jeweils $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \le g(x)$ für μ-fast alle $x \in \Omega$ erfüllt ist.

Dann ist $F : I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \int f(x,t)\, d\mu(x)$ eine reellwertige, auf ganz I definierte und differenzierbare Funktion, und es gilt $F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, d\mu(x)$ für alle $t \in I$.

Anwendungsbeispiel zu Satz 7.4

Betrachte die Funktion $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,t) = xt$. Dann ist die zugehörige Integralfunktion Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(t) = \int_0^1 f(x,t)\,dx = \int_0^1 xt\,dx = \left[\tfrac{1}{2}tx^2\right]_0^1 = \tfrac{1}{2}t.$$

Außerdem ist $\frac{\partial}{\partial t}F(x,t) = x$ für alle $(x,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}$, also gilt tatsächlich

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}F(x,t)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \tfrac{1}{2} = F'(t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. (Bei der Rechnung haben wir schon als bekannt vorausgesetzt, dass bei einer Riemann-integrierbaren Funktion auf einem endlichen abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ das Riemann- und das Lebesgue-Integral übereinstimmen.)