Definition der Stufenfunktionen

Definition (6.1)

Als $\mathscr{A}$-Stufenfunktion bezeichnen wir eine nichtnegative, $\mathscr{A}$-messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$, die nur endlich viele reelle Werte annimmt. Die Menge der $\mathscr{A}$-Stufenfunktionen bezeichnen wir mit $E(\Omega, \mathscr{A})$.

Definition des μ-Integrals von Stufenfunktionen

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum.

Definition (6.5)

Das μ-Integral einer Funktion $f \in E(\Omega, \mathscr{A})$ der Form $f = \sum_{i=1}^m u_i 1_{A_i}$ mit $u_1, ..., u_m \in \mathbb{R}_+$ und paarweise disjunkten $A_1, ..., A_m \in \mathscr{A}$ mit $\Omega = A_1 \cup ... \cup A_m$ ist definiert durch

$$\int f \; d\mu \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} u_i \mu(A_i),$$

wobei wir $u_i \mu(A_i)$ im Fall $u_i = 0$, $\mu(A_i) = +\infty$ gleich Null setzen.

Ein neues Messbarkeitskriterium

Weiterhin sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein festgewählter Maßraum.

Satz (6.7)

Eine Funktion $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}_+$ ist genau dann $\mathscr{A}$-messbar, wenn eine monoton wachsende Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $E(\Omega, \mathscr{A})$ mit $f = \sup f_n$ existiert.

Das μ-Integral einer nichtnegativen messbaren Funktion

Definition (6.10)

Sei $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}_+$ eine $\mathscr{A}$-messbare Funktion und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge in $E(\Omega, \mathscr{A})$ mit $\sup f_n = f$. Dann ist das μ-Integral von f definiert durch

$$\int f \, d\mu \quad = \quad \sup \int f_n \, d\mu.$$

Rechenregeln für Integrale nicht-neg. messb. Funktionen

Satz (6.11)

Für alle $\mathscr{A}$-messbaren Funktionen f, g und alle $\alpha \in \mathbb{R}_+$ gilt

(i) $\int (\alpha f)\ d\mu = \alpha \int f\ d\mu$

(ii) $\int (f + g)\ d\mu = \int f\ d\mu + \int g\ d\mu$

(iii) Ist $f \leq g$, dann folgt $\int f\ d\mu \leq \int g\ d\mu$.

Satz über die monotone Konvergenz

Satz (6.12)

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge $\mathscr{A}$-messbarer Funktionen $f_n : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}_+$, und sei $f = \sup f_n$. Dann ist auch f eine $\mathscr{A}$-messbare Funktion, und es gilt

$$\int f \; d\mu \quad = \quad \sup \int f_n \; d\mu.$$

Beweis von Satz 6.12

geg.: Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge nicht-negativer messbarer Funktionen auf $(\Omega, \mathcal{A})$

Sei $f = \sup f_n$. Bereits bekannt: Auch f ist eine messbare Funktion auf $(\Omega, \mathcal{A})$.

Beh.: $\int f \, d\mu = \sup \int f_n \, d\mu$

Vorgehensweise: (1) Zeige $\sup \int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu$

(2) Definition einer Folge $(v_p)_{p\in\mathbb{N}}$ von Stufenfunktionen mit Hilfe der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(3) Nachweis von $f = \sup v_p$

(4) Nachweis von $\int f \, d\mu \leq \sup \int f_n \, d\mu$

<u>zu (1)</u> Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f_n \leq f$ (nach Def. des Supremums).
Monotonie des Integrals $\Rightarrow \int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu \Rightarrow$
$\sup \int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu$ (wieder nach Def. des Supremums)

<u>zu (2)</u> Da jedes f_n messbar ist, existiert jeweils eine Folge $(u_{np})_{p \in \mathbb{N}}$ von Stufenfunktionen mit $\sup_p u_{np} = f_n$.
Setze $v_p = \max\{u_{1p}, \ldots, u_{np}\}$ für alle $p \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow$ erhalte eine Folge $(v_p)_{p \in \mathbb{N}}$ von Stufenfunktionen

<u>zu (3)</u> Für jedes $p \in \mathbb{N}$ gilt $v_p \leq \max\{f_1, \ldots, f_p\} = f_p$.
$\Rightarrow \sup_p v_p \leq \sup_p f_p = f$ andererseits: Für alle $n \leq p$ gilt $u_{np} \leq v_p$. $\Rightarrow \sup_p u_{np} \leq \sup_p v_p \Rightarrow f_n \leq \sup_p v_p$

$\Rightarrow \sup_n f_n \leq \sup_p v_p \Rightarrow f \leq \sup_p v_p$

Insgesamt gilt also $f = \sup_p v_p$.

<u>Zu (4)</u> Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $v_n \leq f_n$.

$\Rightarrow \int f \, d\mu = \sup_n \int v_n \, d\mu \leq$

$\sup_n \int f_n \, d\mu$ $\square$

E

Ze

Es

f^+

$\int f$

$\int g$

$\int f^+$

μ-Integrierbarkeit reellwertiger Funktionen

Definition (6.13)

Eine Funktion $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ wird μ-integrierbar genannt, wenn f eine $\mathscr{A}$-messbare Funktion und die Integrale $\int f^+ \, d\mu$, $\int f^- \, d\mu$ endlich sind. In diesem Fall nennt man

$$\int f \, d\mu \quad = \quad \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu$$

das μ-Integral von f.

Ist der Maßraum gegeben durch $(\mathbb{R}^d, \mathscr{A}_d, \mu_d)$, dann nennt man die μ_d-integrierbaren Funktionen auch Lebesgue-integrierbar und spricht vom Lebesgue-Integral der Funktion.

Charakterisierung der integrierbaren Funktionen

Satz (6.14)

Für eine $\mathscr{A}$-messbare Funktion sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(i) Die Funktion f ist μ-integrierbar.

(ii) Es gibt μ-integrierbare Funktionen $g, h : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}_+$ mit $f = g - h$.

(iii) Es gibt eine μ-integrierbare Funktion $g_1 : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}_+$ mit $|f| \leq g_1$.

(iv) Die Funktion $|f|$ ist μ-integrierbar.

Ist Bedingung (ii) mit den Funktionen g und h erfüllt, dann gilt $\int f \; d\mu = \int g \; d\mu - \int h \; d\mu$.

Beweis von Satz 6.14:

geg: Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, f messbare Funktion auf $(\Omega, \mathcal{A})$.

z.zg: Äquivalenz der Aussagen

(1) f μ-integrierbar

(2) $\exists$ nicht-neg. μ-int. Fkt. g, h mit $f = g - h$

(3) $\exists$ nicht-neg. μ-int. Fkt. g_1 mit $|f| \leq g_1$

(4) $|f|$ ist μ-integrierbar

„(1) $\Rightarrow$ (2)" klar, setze $g = f^+$, $h = f^-$

„(2) $\Rightarrow$ (3)" Seien g, h wie unter (2) festgelegt. Setze $g_1 = g + h$

m

end

=

„(3)

Sei

$\int |f$

selbe

„(4) =

Es g

Mono

$\int g \, d\mu$, $\int h \, d\mu$ sind endlich nach Vor.

und $\int g_1 \, d\mu = \int g \, d\mu + \int h \, d\mu \Rightarrow \int g_1 \, d\mu$ ist endlich. außerdem: $|f| = |g + (-h)| \leq |g| + |-h|$
$= g + h = g_1$

„(3) $\Rightarrow$ (4)" z.zg.: $\int |f| \, d\mu$ ist endlich
Sei g_1 wie unter (3) beschrieben. Monotonie $\Rightarrow$
$\int |f| \, d\mu \leq \int g_1 \, d\mu$. Da $\int g_1 \, d\mu$ endlich ist, gilt dasselbe für das Integral $\int |f| \, d\mu$.

„(4) $\Rightarrow$ (1)" z.zg.: $\int f^+ \, d\mu$, $\int f^- \, d\mu$ sind endlich
Es gilt $|f| = f^+ + f^-$. $\Rightarrow f^+, f^- \leq |f|$
Monotonie $\Rightarrow \int f^+ \, d\mu, \int f^- \, d\mu \leq \int |f| \, d\mu$

$p_f \vee p$

$\vee p$.

f_n

$\square$

Aus der Endlichkeit von $\int |f| \, d\mu$ folgt also die Endlichkeit der Integrale über f^+ und f^-.

Zeige noch: $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu - \int h \, d\mu$, falls g, h wie unter (2) angeg. definiert sind

Es gilt $f^+ - f^- = f = g - h \Rightarrow f^+ + h = g + f^-$

f^+, h, g, f^- nichtnegativ (und messbar) $\Rightarrow$

$\int f^+ d\mu + \int h \, d\mu = \int (f^+ + h) \, d\mu = \int (g + f^-) \, d\mu =$

$\int g \, d\mu + \int f^- d\mu$ umstellen $\Rightarrow \int g \, d\mu - \int h \, d\mu =$

$\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu = \int f \, d\mu$. $\square$

Rechenregeln für das μ-Integral

Satz (6.15)

Seien $f, g : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ zwei μ-integrierbare Funktionen und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen $f + g$, αf, $\min\{f, g\}$ und $\max\{f, g\}$, sofern sie auf ganz Ω definiert sind, jeweils μ-integrierbar. Es gilt dann

$$\int (f+g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu$$

und

$$\int (\alpha f)\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu.$$

Die reellwertigen μ-integrierbaren Funktionen bilden also einen $\mathbb{R}$-Vektorraum, den wir mit $\mathscr{L}^1(\mu)$ bezeichnen.

Beweis von Satz 6.15:

geg: μ-integrierbare Funktionen f, g und $\alpha \in \mathbb{R}$

(1) Integral von αf

f μ-integrierbar $\Rightarrow$ Die Integrale $\int f^+ d\mu$, $\int f^- d\mu$ sind beide endlich. <u>1. Fall:</u> $\alpha \geq 0$ Dann gilt $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$, $(\alpha f)^- = \alpha f^-$. Es gilt $\int (\alpha f)^+ d\mu = \int \alpha f^+ d\mu = \alpha \int f^+ d\mu$, d.h. $\int (\alpha f)^+ d\mu$ ist endlich ebenso: $\int (\alpha f)^- d\mu = \alpha \int f^- d\mu$, insb. ist das Integral endlich $\Rightarrow$ αf ist μ-integrierbar. und

$$\int (\alpha f)\,d\mu = \int (\alpha f)^+ d\mu - \int (\alpha f)^- d\mu = \alpha \int f^+ d\mu$$
$$- \alpha \int f^- d\mu = \alpha \left(\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \right) = \alpha \int f\,d\mu.$$

<u>2. Fall:</u> $\alpha < 0$ Dann gilt $(\alpha f)^+ = (-\alpha) f^-$, $(\alpha f)^- = (-\alpha) f^+$.
Wie im 1. Fall überprüft man $\int (\alpha f)^+ d\mu = (-\alpha) \int f^- d\mu$,
$\int (\alpha f)^- d\mu = (-\alpha) \int f^+ d\mu$, woraus inb. die Endlichkeit der
Integrale folgt. $\Rightarrow$ αf ist μ-integrierbar. $\int (\alpha f)\,d\mu =$
$$\int (\alpha f)^+ d\mu - \int (\alpha f)^- d\mu = (-\alpha) \int f^- d\mu - (-\alpha) \int f^+ d\mu =$$
$$\alpha \int f^+ d\mu - \alpha \int f^- d\mu = \alpha \left(\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \right) = \alpha \int f\,d\mu.$$

(2) Integral von $f+g$

Es gilt $f+g = f^+ - f^- + g^+ - g^- =$
$(f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$. Wende die Char. (2)
aus Satz 6.14 auf die beiden nichtneg.
Funktionen $f^+ + g^+$ und $f^- + g^-$ an.

Es gilt $\int (f^+ + g^+)\, d\mu = \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu$,
$\int (f^- + g^-)\, d\mu = \int f^- d\mu + \int g^- d\mu$, insbesondere sind alle Integrale endlich.

Satz 6.14 (2) $\Rightarrow$ $f+g$ ist μ-integrierbar

S
en
f
$\int$

und $\int (f+g)\,d\mu = \int (f^+ + g^+)\,d\mu - \int (f^- + g^-)\,d\mu$

$= \int f^+ \,d\mu + \int g^+ \,d\mu - \int f^- \,d\mu - \int g^- \,d\mu =$

$\int f^+ \,d\mu - f^- \,d\mu + \int g^+ \,d\mu - \int g^- \,d\mu =$

$\int f \,d\mu - \int g \,d\mu$. Rest siehe Skript $\square$

F

f

w

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$

Be

$\Rightarrow$

Für

f i

Produkte integrierbarer Funktionen

Das Produkt fg zweier μ-integrierbarer Funktionen ist im Allgemeinen nicht μ-integrierbar. Es gilt aber

Proposition (6.16)

Ist $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ μ-integrierbar und $g : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ beschränkt und messbar, dann ist auch das Produkt μ-integrierbar.

Beispiel für eine μ-integrierbare Funktion, deren Potenzen im Allg. nicht μ-integrierbar

Betrachte den Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu_p)$ wobei $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mu_p(A) = \sum_{n \in A} n^{-p-1}$ wobei $p \in \mathbb{N}$ ist.

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ eine Funktion, die nur an endlich vielen Stellen ungleich null ist. $\Rightarrow$ $f \in E(\Omega, \mathcal{A})$. Es gilt

$$\int f \, d\mu_p = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n) \mu_p(\{n\}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n) n^{-p-1}$$

$+\bar{g})d\mu$

Sei nun f eine bel. nichtneg. Fkt. auf $\mathbb{N}$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $M_n = \{1, \dots, n\}$ und $f_n = f \cdot 1_{M_n}$. Überprüfe: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine monoton wachsende Folge von Stufenfunktionen mit $\sup f_n = f$.

$$\Rightarrow \int f \, d\mu_p = \sup_n \int f_n \, d\mu_p = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu_p$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in M_n} f(k) k^{-p-1} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) n^{-p-1}$$

Betrachte nun speziell $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n$.

$$\Rightarrow \int f \, d\mu_p = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot n^{-p-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$$

Für $p \geq 2$ ist dies ein endlicher Wert, d.h. f ist eine μ_p-integrierbare Funktion.

$\square$

andererseits: $\int f^p \, d\mu_p = \sum_{n=1}^{\infty} n^p \cdot n^{-p-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} = +\infty$

(Divergenz der harmonischen Reihe)

Stetige Funktionen mit kompaktem Träger

Ist $(X, \mathscr{T})$ ein topologischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so wird der Abschluss der Menge $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ der Träger der Funktion genannt.

Satz (6.17)

Jede stetige Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger ist Lebesgue-integrierbar.