Definition der Mengenhalbringe

Sei Ω eine beliebige Menge.

Definition (2.1)

Eine Teilmenge $\mathscr{H} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ wird Mengenhalbring in Ω genannt, wenn $\varnothing \in \mathscr{H}$ gilt und folgende Bedingungen erfüllt sind.

(i) Sind $A, B \in \mathscr{H}$, dann liegt auch $A \cap B$ in $\mathscr{H}$.

(ii) Für alle $A, B \in \mathscr{H}$ gibt es ein $r \in \mathbb{N}_0$ und Mengen $C_1, ..., C_r \in \mathscr{H}$, so dass $A \setminus B$ als disjunkte Vereinigung $A \setminus B = C_1 \cup ... \cup C_r$ dargestellt werden kann.

Gilt zusätzlich $\Omega \in \mathscr{H}$, dann nennt man $\mathscr{H}$ eine Halbalgebra.

Definition der Mengenringe

Definition (2.3)

Ein Mengenring ist eine Teilmenge $\mathscr{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ mit den Eigenschaften, dass $\varnothing \in \mathscr{R}$ gilt und mit $A, B \in \mathscr{R}$ auch $A \cup B$ und $A \setminus B$ in $\mathscr{R}$ liegen. Gilt zusätzlich $\Omega \in \mathscr{R}$, dann spricht man von einer Mengenalgebra.

Sind A, B Elemente eines Mengenrings $\mathscr{R}$, dann sind auch die symmetrische Differenz gegeben durch $A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ und der Durchschnitt $A \cap B = (A \cup B) \setminus (A \,\Delta\, B)$ in $\mathscr{R}$ enthalten.

Inhalte auf Mengenhalbringen

Definition (2.7)

Ein Inhalt auf einem Halbring $\mathscr{H}$ ist eine Abbildung $c : \mathscr{H} \to \mathbb{R}_+$ mit $c(\varnothing) = 0$ und

$$c\left(A_1 \cup \ldots \cup A_r\right) \quad = \quad \sum_{i=1}^{r} c(A_i)$$

für $r \in \mathbb{N}_0$ und paarweise disjunkte Mengen $A_1, \ldots, A_r \in \mathscr{H}$ mit der Eigenschaft, das auch die Vereinigung $A_1 \cup \ldots \cup A_r$ in $\mathscr{H}$ enthalten ist. Man bezeichnet diese Eigenschaft als endliche Additivität.

Der Begriff des Inhalts ist auf Mengenringen genauso definiert wie auf Mengenhalbringen.

Proposition (2.8)

Sei $c : \mathscr{H} \to \mathbb{R}_+$ ein Inhalt auf einem Mengenhalbring $\mathscr{H}$.

(i) Für $A, B \in \mathscr{H}$ mit $A \subseteq B$ gilt $c(A) \leq c(B)$.
(Diese Eigenschaft bezeichnet man als Monotonie.)

(ii) Ist $\mathscr{H}$ ein Mengenring, dann gilt $c(A \cup B) \leq c(A) + c(B)$ für alle $A, B \in \mathscr{H}$.
(Diese Eigenschaft wird Subadditivität genannt.)

Beweis von Proposition 2.8

zu (i) wurde bereits am 28.11. gezeigt

zu (ii) geg: Mengenring $\mathcal{R}$, $A, B \in \mathcal{R}$

z.zg: $c(A \cup B) \leq c(A) + c(B)$

Die Menge $A \cup B$ lässt sich disjunkt zerlegen in $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$, und $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cap B$ liegen in $\mathcal{R}$. Additivität $\Rightarrow$ $c(A \cup B) =$

$$c(A \setminus B) + c(B \setminus A) + c(A \cap B) =$$

$$c(A \setminus B) + c(A \cap B) + c(B \setminus A) + c(A \cap B) - c(A \cap B)$$

$$c(A) + c(B) - c(A \cap B) \leq c(A) + c(B) \qquad \square$$

$(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$

$(B \setminus A) \cup (A \cap B) = B$

Fortsetzungen von Inhalten auf Mengenringe

Satz (2.11)

Sei $\mathscr{H}$ ein Halbring in Ω und $\mathscr{R}$ der von $\mathscr{H}$ erzeugte Ring. Dann gibt es für jeden Inhalt $c : \mathscr{H} \to \mathbb{R}_+$ einen eindeutig bestimmten Inhalt $\tilde{c}$ auf $\mathscr{R}$ mit $\tilde{c}|_{\mathscr{H}} = c$ (also eine Fortsetzung von c auf $\mathscr{R}$).

Definition von innerem und äußerem Maß

Definition (2.12)

Sei $\mathscr{R}$ ein Ring in Ω, $c : \mathscr{R} \to \mathbb{R}_+$ ein Inhalt und $A \subseteq \Omega$ eine beliebige Teilmenge. Dann sind das innere Maß $c_*(A)$ bzw. das äußere Maß $c^*(A)$ von A bezüglich c definiert durch

$$c_*(A) = \sup\{c(B) \mid B \in \mathscr{R}, B \subseteq A\}$$

und

$$c^*(A) = \inf\{c(B) \mid B \in \mathscr{R}, B \supseteq A\}.$$

Sowohl beim inneren als auch beim äußeren Maß ist auch der Wert $+\infty$ möglich. Es gilt $c^*(A) = +\infty$ genau dann, wenn kein $B \in \mathscr{R}$ mit $B \supseteq A$ existiert.

Eigenschaften von innerem und äußerem Maß

Lemma (2.13)

Sei $\mathscr{R}$ ein Ring in Ω, $c : \mathscr{R} \to \mathbb{R}_+$ ein Inhalt, und seien $A, B \subseteq \Omega$ beliebig.

(i) Aus $A \subseteq B$ folgt $c_*(A) \leq c_*(B)$ und $c^*(A) \leq c^*(B)$.

(ii) Allgemein gilt $c^*(A \cup B) \leq c^*(A) + c^*(B)$.

(iii) Sind A und B disjunkt, dann gilt $c_*(A \cup B) \geq c_*(A) + c_*(B)$.

Eigenschaften von innerem und äußerem Maß (Forts.)

Lemma (2.14)

Für jede Teilmenge $A \subseteq \Omega$ gilt $c_*(A) \leq c^*(A)$.

Lemma (2.15)

Sei $\mathscr{R}$ ein Ring in Ω und $c : \mathscr{R} \to \mathbb{R}_+$ ein Inhalt. Dann gilt $c_*(A) = c^*(A) = c(A)$ für alle $A \in \mathscr{R}$.

Definition der c-messbaren Mengen

Definition (2.16)

Sind die Werte $c_*(A)$ und $c^*(A)$ beide endlich und gilt $c_*(A) = c^*(A)$, dann bezeichnen wir A als c-messbar und definieren $c(A) = c^*(A)$. Die c_n-messbaren Teilmengen $E \subseteq \mathbb{R}^n$ werden auch als Jordan-messbar bezeichnet, und man nennt $c_n(E)$ den Jordan-Inhalt der Teilmenge E.

Lemma (2.17)

Sei $\mathscr{R}$ ein Ring in Ω und $c : \mathscr{R} \to \mathbb{R}_+$ ein Inhalt. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $E \subseteq \Omega$ beliebig und $A \in \mathscr{R}$ mit $c^*(A \,\Delta\, E) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Dann gibt es Mengen $A', B' \in \mathscr{R}$ mit $A' \subseteq E \subseteq B'$, $A' \subseteq A \subseteq B'$ und der Abschätzung $c(B' \setminus A') < \varepsilon$.

liegen in R. Additivität $\Rightarrow c(A \cup B) =$

Beweis von Lemma 2.17

geg.: Mengenring $R \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, $c : R \to \mathbb{R}_+$ Inhalt

$A \in R$, $E \subseteq \Omega$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, mit $c^*(A \Delta E) < \frac{1}{2}\varepsilon$

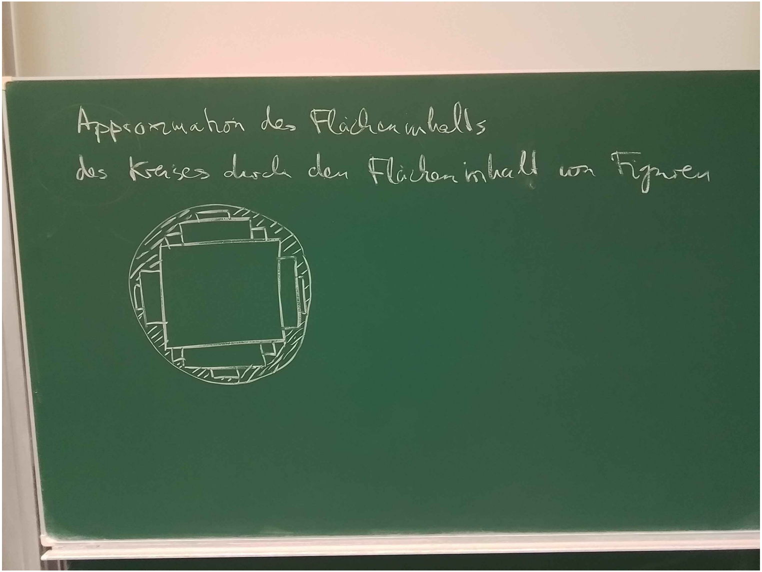
Nach Def. von c^* gibt es ein $B \in R$ mit $B \supseteq A \Delta E$ und $c(B) < \varepsilon$. Setze $B' = A \cup B$ und $A' = A \setminus B$.

$\Rightarrow B', A' \in R$ klar: $A \subseteq B'$, $A' \subseteq A$

ebenso: $E \subseteq A \cup (A \Delta E) \subseteq A \cup B = B'$

$E \supseteq A \setminus (A \Delta E) \supseteq A \setminus B = A'$

$B' \setminus A' = B \Rightarrow c(B' \setminus A') = c(B) < \varepsilon$ $\square$


Approximation des Flächeninhalts
des Kreises durch den Flächeninhalt von Figuren

Charakterisierung der c-messbaren Mengen

Satz (2.18)

Sei $\mathscr{R}$ ein Ring in Ω und $c : \mathscr{R} \to \mathbb{R}_+$ ein Inhalt. Für eine Teilmenge $E \subseteq \Omega$ sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(i) Die Menge E ist c-messbar.

(ii) Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ gibt es $A, B \in \mathscr{R}$ mit $A \subseteq E \subseteq B$ und $c(B \setminus A) < \varepsilon$.

(iii) Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ gibt es ein $A \in \mathscr{R}$ mit $c^*(A \, \Delta \, E) < \varepsilon$.

Beweis von Satz 2.18

geg: Mengenring $\mathcal{R}$ in Ω, $c: \mathcal{R} \to \mathbb{R}_+$ ein Inhalt, $E \subseteq \Omega$, z.zg.:

Äquivalenz der drei Aussagen

(i) E ist c-messbar (d.h. $c_*(E) = c^*(E) < +\infty$)

(ii) Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ gibt es $A, B \in \mathcal{R}$ mit $A \subseteq E \subseteq B$ und $c(B \setminus A) < \varepsilon$

(iii) Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ gibt es ein $T \in \mathcal{R}$ mit $c^*(T \Delta E) < \varepsilon$

„(i) $\Rightarrow$ (ii)" Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Def. von c^* $\Rightarrow$

$\exists B \in \mathcal{R}$ mit $E \subseteq B$ und $c(B) < c^*(A) + \frac{1}{2}\varepsilon$

Def. von c_* $\Rightarrow \exists A \in \mathcal{R}$ mit $A \subseteq E$ und

$c(A) > c_*(A) - \frac{1}{2}\varepsilon \quad A \subseteq E \subseteq B \Rightarrow$

$c(B) = c(A) + c(B \setminus A) \Rightarrow$

$c(B \setminus A) = c(B) - c(A) < c^*(A) + \frac{1}{2}\varepsilon$

$- \left(c_*(A) - \frac{1}{2}\varepsilon\right) = \varepsilon$

$\llcorner\; c_*(A) = c^*(A)$

„(ii) $\Rightarrow$ (i)" Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgeg. Vor. $\Rightarrow \exists A, B$ aus $\mathcal{R}$ mit $A \subseteq E \subseteq B$ und $c(B \setminus A) < \varepsilon$

$\Rightarrow c^*(E) \leq c^*(B) = c(B) = c(A) + c(B \setminus A)$

$< c(A) + \varepsilon$, ebenso $c_*(E) \geq c_*(A) = c(A)$

$\Rightarrow c(A) \leq c_*(E) \leq c^*(E) < c(A) + \varepsilon$

$\Rightarrow c^*(E)-c_*(E)<\varepsilon$ Da $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ bel. vorgeg. war, folgt $c_*(E)=c^*(E)$, außerdem $c^*(E)<+\infty$ wg $c^*(E)\le c(B)$

also: E ist c-messbar

„(ii) $\Rightarrow$ (iii)" Sei $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$, und seien $A,B\in\mathcal{R}$ wie unter (ii). Setze $T=A$. $(A\subseteq E\subseteq B)$

$$T\triangle E = A\triangle E = (E\setminus A)\cup(A\setminus E)$$
$$=(B\setminus A)\cup\emptyset \Rightarrow c^*(T\triangle E)\le c^*(B\setminus A)$$
$$=c(B\setminus A)<\varepsilon.$$

„(iii) $\Rightarrow$ (ii)" Sei $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$. Vor. $\Rightarrow \exists T\in\mathcal{R}$ mit $c^*(T\triangle E)<\frac{1}{2}\varepsilon$ Lemma 2.17 $\Rightarrow \exists A',B'\in\mathcal{R}$

mit $c(B' \setminus A') < \varepsilon$ und $A' \subseteq E \subseteq B'$.

$\square$

Folgerung (2.19)

Sei $\mathscr{R}$ ein Ring in Ω, $c : \mathscr{R} \to \mathbb{R}_+$ ein Inhalt auf $\mathscr{R}$ und $E \subseteq \Omega$ eine c-messbare Menge. Dann gibt es eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathscr{R}$ mit $\lim_n c^*(A_n \bigtriangleup E) = 0$, und für jede solche Folge gilt

$$\lim_{n \to \infty} c(A_n) = c(E).$$

Beweis von Folgerung 2.19

geg.: Ring R in Ω, $c : R \to \mathbb{R}_+$ Inhalt

$E \subseteq \Omega$ c-messbare Teilmenge

(i) z.zg.: Es gibt eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in R mit

$$\lim_{n\to\infty} c^*(E \Delta A_n) = 0 \quad (*)$$

Satz 2.18 $\Rightarrow$ Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $A_n \in R$ mit $c^*(E \Delta A_n) = \frac{1}{n}$. Dann ist $(*)$ erfüllt.

(ii) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in R mit $\lim_{n\to\infty} c^*(E \Delta A_n) = 0$. z.zg.: $c(E) = \lim_{n\to\infty} c(A_n)$

$$\lim_{n\to\infty} c^*(E \Delta A_n) = 0 \quad (*)$$

Satz 2.18 $\Rightarrow$ Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $A_n \in \mathcal{R}$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : c^*(E \Delta A_n) < \frac{1}{2}\varepsilon$

$\Rightarrow$ erhalte $c(E) - c(A_n) = c^*(E) - c^*(A_n)$

Lemma 2.17 $\Rightarrow \exists A', B' \in \mathcal{R}$ mit $A' \subseteq E, A_n \subseteq B'$ und $c(B' \setminus A') < \varepsilon$

$$\Rightarrow c(E) - c(A_n) \leq c^*(B') - c^*(A') = c(B') - c(A')$$
$$= c(B' \setminus A') < \varepsilon$$

ebenso: $c(A_n) - c(E) = c^*(A_n) - c^*(E) \leq c^*(B') - c^*(A')$
$= c(B' \setminus A' < \varepsilon$ insgesamt: $|c(A_n) - c(E)| < \varepsilon$

$\square$

Der Ring der c-messbaren Mengen

Satz (2.20)

Sei $\mathscr{R}$ ein Ring in Ω und $c : \mathscr{R} \to \mathbb{R}_+$ ein Inhalt. Dann bilden die c-messbaren Mengen einen Ring $\mathscr{R}_c$, der $\mathscr{R}$ als Teilmenge enthält. Durch $A \mapsto c(A)$ ist ein Inhalt auf $\mathscr{R}_c$ definiert.

Insbesondere bilden die Jordan-messbaren Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ also einen Mengenring in $\mathbb{R}^n$, der die Figuren enthält.

Beweis von Satz 2.20

geg.: Ring R in Ω. $c: R \to \mathbb{R}_+$ Inhalt

Sei R_c die Menge der c-messbaren Teilmengen von R. z.zg.:

(1) R_c ist ein Mengenring in Ω

(2) c ist ein Inhalt auf R_c

zu (1) zu überprüfen: $\emptyset \in R_c$ und

$\forall A, B \in R_c: A \cup B,\ A \setminus B \in R_c$

Da R ein Mengenring ist, gilt $\emptyset \in R$, und es ist $R \subseteq R_c$. $\Rightarrow \emptyset \in R_c$

Seien nun $A, B \in \mathcal{R}_c$ vorgeg. Nach Satz 2.18 reicht es, für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ die Existenz von Mengen $C, D \in \mathcal{R}$ mit $C \subseteq A \cup B \subseteq D$ und $c(D \setminus C) < \varepsilon$ nachzuweisen, um zu zeigen, dass $A \cup B$ in $\mathcal{R}_c$ liegt. Entsprechendes gilt für $A \setminus B$. Sei also $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$.

$A, B \in \mathcal{R}_c \overset{\text{Satz 2.18}}{\Longrightarrow} \exists A', B', A'', B'' \in \mathcal{R}$ mit

$A' \subseteq A \subseteq A''$, $B' \subseteq B \subseteq B''$, $c(A'' \setminus A') < \frac{1}{2}\varepsilon$ und $c(B'' \setminus B') < \frac{1}{2}\varepsilon$

Setze $C = A' \cup B'$, $D = A'' \cup B'' \Longrightarrow$

$C \subseteq A \cup B \subseteq D$, außerdem: $D \setminus C =$

$(A'' \cup B'') \setminus (A' \cup B') = (A'' \setminus A') \cup (B'' \setminus B')$

$\Rightarrow c(D \setminus C) \leq c(A'' \setminus A') + c(B'' \setminus B') < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$

Damit ist die Messbarkeit von $A \cup B$ nachgewiesen.

Für die Messbarkeit von $A \setminus B$ sei wiederum $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, und seien A', B', A'', B'' wie oben.

Setze $C' = A' \setminus B''$, $D' = A'' \setminus B'$. $\rightarrow$

$C' \subseteq A \setminus B \subseteq D'$, außerdem:

$D' \setminus C' = (A'' \setminus B') \setminus (A' \setminus B'') =$

$\subseteq (A'' \setminus A') \cup (B'' \setminus B')$

$\Rightarrow c(D' \setminus C') \leq c(A'' \setminus A) + c(B'' \setminus B)$

$< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$ also: $A \setminus B \in R_c$

Zeige nun, dass c ein Inhalt auf $\mathcal{R}_c$ ist.

Lemma 2.15 $\rightarrow$ $c(\emptyset) = c^*(\emptyset) = 0$

Seien nun $A, B \in \mathcal{R}_c$ disjunkt. z.zg.:

$$c(A \cup B) = c(A) + c(B).$$

Lemma 2.13: $c(A \cup B) = c^*(A \cup B) \leq c^*(A) + c^*(B) = c(A) + c(B)$

ebenso $c(A \cup B) = c_*(A \cup B) \underset{A \cap B = \emptyset}{\geq} c_*(A) + c_*(B) = c(A) + c(B)$

insgesamt: $c(A) + c(B) \leq c(A \cup B) \leq c(A) + c(B)$

also gilt Gleichheit $\square$

Bewegungsinvarianz des Jordan-Inhalts

Satz (2.21)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge und $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Bewegung. Genau dann ist A Jordan-messbar, wenn $\psi(A)$ Jordan-messbar ist, und in diesem Fall gilt $c_n(\psi(A)) = c_n(A)$.

Satz (2.22)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge $A = [0,1]^n \cap \mathbb{Q}^n$ nicht Jordan-messbar.

Beweis von Satz 2.22

<u>Beh</u>: $A = [0,1]^n \cap \mathbb{Q}^n$ ist keine Jordan-messbare Teilmenge des $\mathbb{R}^n$

zeige dafür: $c_*(A) = 0$ und $c^*(A) = 1$

Ang. $c_*(A) > 0 \Rightarrow \exists$ Figur F mit $F \subseteq A$ und $c_n(F) > \frac{1}{2} c_*(A)$, insb. $c_n(F) > 0$

Als Figur ist F disjunkte Vereinigung $F = Q_1 \cup \dots \cup Q_r$ von Quadern, und $c_n(Q_j) > 0$. Stelle Q_j als kartesisches Produkt $Q_j = I_1 \times \dots \times I_n$ von Intervallen von Quadern, und $c_n(Q_j) > 0$. Stelle Q_j als kartesisches Produkt $Q_j = I_1 \times \dots \times I_n$ von Intervallen

$I_k \subseteq \mathbb{R}$ dar. Wegen $c_n(Q_j) > 0$ hat eines der Intervalle I_k positive Länge. $F \subseteq A \subseteq \mathbb{Q}^n \Rightarrow Q_j \subseteq \mathbb{Q}^n$

$\Rightarrow I_k \subseteq \mathbb{Q}$. Da die irrationalen Zahlen dicht in $\mathbb{R}$ liegen, existiert ein $a \in I_k$ mit $a \notin \mathbb{Q}$. $\lightning$ also: $c_*(A) = 0$

Der Nachweis von $c^*(A) = 1$ verwendet, dass $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt und läuft ansonsten weitgehend analog (siehe Skript).

$\square$