Die Darstellungsmatrix einer Bilinearform

Definition (16.1)

Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ eine geordnete Basis und b eine Bilinearform auf V. Dann nennt man die reelle $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ mit den Einträgen

$$a_{ij} \quad = \quad b(v_i, v_j) \qquad \text{für} \quad 1 \leq i, j \leq n$$

die Darstellungsmatrix $M_{\mathcal{B}}(b)$ von b bezüglich $\mathcal{B}$.

Existenz und Eindeutigkeit von Bilinearformen

Satz (16.2)

Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ eine geordnete Basis von V. Dann existiert für jede Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ eine eindeutig bestimmte Bilinearform b auf V mit $M_{\mathcal{B}}(b) = A$.

Berechnung der Werte einer Bilinearform

Proposition (16.3)

Unter den angegebenen Voraussetzungen gilt für alle $v, w \in V$ jeweils

$$b(v,w) \quad = \quad {}^{\mathrm{t}}\Phi_{\mathcal{B}}(v)\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(b)\Phi_{\mathcal{B}}(w).$$

Transformationsformel für Bilinearformen

Satz (16.4)

Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und b eine Bilinearform auf V. Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei geordnete Basen von V und

$$A = M_{\mathcal{A}}(b) \quad , \quad B = M_{\mathcal{B}}(b)$$

die Darstellungsmatrizen von b bezüglich dieser Basen. Sei $T = T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ die Matrix des Basiswechsels von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$. Dann gilt

$$A \quad = \quad {}^{\mathrm{t}}TBT.$$

Beweis von Satz 16.4

geg. n-dim $\mathbb{R}$-Vektorraum V, $\mathfrak{G}$ Bilinearform auf V

$\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ geordnete Basis von V

$\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_n)$ " " " "

$A = \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{G})$, $B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathfrak{G})$, $T = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ Matrix des Basiswechsels

__Beh.__ $A = {}^tTBT$. Seien (a_{ij}), (b_{ij}) die Einträge von A bzw. B. Seien $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

z.zg: Der Eintrag von ${}^tTBT$ an der Stelle (i,j) ist gleich a_{ij}.

Nach Def. von $A = M_{\mathcal{A}}(b)$ gilt $a_{ij} = b(v_i, v_j)$.

Berechne zunächst den Eintrag von BT an der Stelle (k, j) für $1 \le k \le n$. Dieser ist geg. durch $\sum_{l=1}^{n} b_{kl} t_{lj}$.

Der Eintrag von ${}^{t}TBT$ an der Stelle (i, j) ist dann geg. durch $\sum_{k=1}^{n} t_{ki} \left(\sum_{l=1}^{n} b_{kl} t_{lj} \right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} t_{ki} t_{lj} b_{kl}$

z. zg.: Dieser Ausdruck stimmt mit $b(v_i, v_j)$ überein.

Nach Def. von $T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ gilt $v_i = \sum_{k=1}^{n} t_{ki} w_k$ und $v_j = \sum_{k=1}^{n} t_{kj} w_k$

$$\Rightarrow b(v_i, v_j) = b\left(\sum_{k=1}^{n} t_{ki} w_k , \sum_{l=1}^{n} t_{lj} w_l \right) \underset{b \text{ bilinear}}{=} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} t_{ki} t_{lj} \, b(w_k, w_l) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} t_{ki} t_{lj} b_{kl}$$

□

Erinnerung: Orthogonalprojektion auf einen Untervektorraum

Sei V ein Vektorraum, $U \subseteq V$ ein Untervektorraum und b eine symmetrische Bilinearform auf V.

- Eine Orthogonalprojektion auf U ist eine lineare Abbildung $\pi_U : V \to U$ mit $(v - \pi_U(v)) \perp_b U$ für alle $v \in V$.
- Ist $n = \dim U$ endlich und $(u_1, \ldots, u_n)$ eine Orthonormalbasis (ON-Basis) von U, dann ist durch

$$\pi_U(v) \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} b(u_k, v) u_k$$

eine Orthogonalprojektion $\pi_U : V \to U$ definiert.

Satz über die Gram-Schmidt-Orthonormalisierung

Satz (16.5)

(i) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum der Dimension $m \in \mathbb{N}_0$ von V, $(u_1, \ldots, u_m)$ eine ON-Basis und $U' \supseteq U$ ein $(m+1)$-dimensionaler Untervektorraum. Dann existiert ein Vektor $u_{m+1} \in U'$, so dass $(u_1, \ldots, u_m, u_{m+1})$ eine ON-Basis von U' ist.

(ii) Jeder Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ besitzt eine ON-Basis.

Es ist leicht zu sehen, dass Satz 16.5 für beliebige endlich-dimensionale euklidische Vektorräume gültig ist.

Algorithmus zur Bestimmung einer ON-Basis

Sei U ein m-dimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$. Das folgende Verfahren liefert eine ON-Basis von U.

(1) Wähle eine beliebige Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_m)$ von U und und setze $k = 0$, $\mathcal{B}' = \varnothing$.

(2) Im Fall $k = m$ ist das Verfahren beendet. Ansonsten nehmen wir an, dass $\mathcal{B}' = (u_1, \ldots, u_k)$ bereits eine *ON*-Basis von $U_k = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle_{\mathbb{R}}$ ist.

(3) Berechne die Orthogonalprojektion von v_{k+1} auf U_k durch

$$w_{k+1} \quad = \quad \sum_{\ell=1}^{k} \langle u_\ell, v_{k+1} \rangle u_\ell .$$

(4) Definiere den Vektor $\tilde{u}_{k+1} = v_{k+1} - w_{k+1}$ und normiere ihn zu $u_{k+1} = \|\tilde{u}_{k+1}\|^{-1} \tilde{u}_{k+1}$.

(5) Erweitere $\mathcal{B}'$ um den Vektor u_{k+1}, ersetze k durch $k + 1$, und gehe zurück zu Schritt (2).

Kurzform: „projizieren - Differenz bilden - normieren“

Beispiel zur Anwendung der Gram-Schmidt-Orthonormalisierung

Sei $V = \mathbb{R}^3$, $u_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$. <u>Ziel</u>: Erweitere das einelementige Tupel (u_1) zu einer ON-Basis des $\mathbb{R}^3$. Gehe dazu von der Basis (u_1, e_2, e_3) des $\mathbb{R}^3$ aus.

(1) Projiziere e_2 auf $\langle u_1 \rangle_{\mathbb{R}}$.

$$w_2 = \langle e_2, u_1 \rangle \cdot u_1 = \frac{1}{9} \cdot \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{2}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(2) Bilde die Differenz $e_2 - w_2$

$$\tilde{u}_2 = e_2 - w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

(3) Normiere den Vektor $\tilde{u}_2$.

$$\left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{4+25+16} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$\|\tilde{u}_2\| = \frac{1}{9} \cdot 3\sqrt{5} = \frac{1}{3}\sqrt{5}$$

$$u_2 = \frac{1}{\|\tilde{u}_2\|} \cdot \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

(4) Projiziere e_3 auf $\langle u_1, u_2 \rangle_{\mathbb{R}}$.

$$\langle u_1, e_3 \rangle u_1 + \langle u_2, e_3 \rangle \cdot u_2 =$$

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \left(-\frac{4}{3\sqrt{5}}\right) \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix} + \left(-\frac{4}{45}\right)\begin{pmatrix}-2\\5\\-4\end{pmatrix} = \frac{1}{45}\begin{pmatrix}18\\0\\36\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix} =: w_3$$

(5) Bilde die Differenz $e_3 - w_3$

$$\tilde{u}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

(6) Normiere den Vektor $\tilde{u}_3$

$$\|\tilde{u}_3\| = \frac{1}{5}\sqrt{(-2)^2 + 0 + 1^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$u_3 = \frac{1}{\|\tilde{u}_3\|}\tilde{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

Ergebnis: $(u_1, u_2, u_3) = \left(\begin{pmatrix}1/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\5\\-4\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} \right)$

ist eine ON-Basis des $\mathbb{R}^3$

Kriterium für symmetrische Bilinearformen

Proposition (16.6)

Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und b eine Bilinearform auf V. Sei $\mathcal{B}$ eine beliebige Basis von V und $A = M_{\mathcal{B}}(b)$. Unter diesen Voraussetzungen ist b genau dann symmetrisch, wenn A symmetrisch ist.

Definition (16.7)

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und b eine symmetrische Bilinearform auf V. Man bezeichnet b als

(i) positiv semidefinit, wenn $b(v, v) \geq 0$

(ii) negativ semidefinit, wenn $b(v, v) \leq 0$

(iii) negativ definit, wenn $b(v, v) < 0$

jeweils für alle $v \in V \setminus \{0_V\}$ gilt. Eine Bilinearform die weder positiv noch negativ semidefinit ist, bezeichnet man als indefinit.

Literaturhinweis

In der Vorlesung habe ich kurz darüber gesprochen, dass in der Speziellen Relativitätstheorie der Physik indefinite Bilinearformen zum Einsatz kommten, mit der „zeitartige“, „raumartige“ und „lichtartige“ Vektoren unterschieden werden. Wer mehr über die Geometrie der Speziellen Relativitätstheorie erfahren möchte, kann sich in dem Buch

Roger Penrose, „Road to Reality“

einmal die Kapitel 17 und 18 durchlesen. (Bei Roger Penrose handelt sich um den engsten Forschungskollegen des berühmten Physikers Stephen Hawking. Das Buch unternimmt den Versuch, einem allgemeinen Leserkreis einen fundierten Gesamtüberblick über die Theoretische Physik bis hin zu den neuesten Entwicklungen, wie z.B. der Stringtheorie, zu bieten. Meiner Meinung ein wirklich herausragendes Werk, hinter dem die meisten übrigen populärwissenschaftlichen Darstellungen verblassen.)

(Semi-)Definite und indefinite Matrizen

Sei $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ eine symmetrische Matrix. Dann ist die eindeutig bestimmte, symmetrische Bilinearform b auf dem $\mathbb{R}^n$ mit

$$\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(b) \quad = \quad A$$

gegeben durch

$$b(v,w) \quad = \quad {}^{\mathrm{t}}vAw \quad \text{für alle } v,w \in \mathbb{R}^n.$$

Definition (16.8)

Eine symmetrische Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ wird als positiv definit (bzw. positiv semidefinit, negativ (semi-)definit, indefinit) bezeichnet, wenn die Bilinearform b_A gegeben durch

$$b_A(v,w) \quad = \quad {}^{\mathrm{t}}vAw$$

diese Eigenschaft besitzt.

Das Hurwitz-Kriterium

Satz (16.9)

Sei $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ eine symmetrische Matrix und A_k jeweils die linke obere $k \times k$-Teilmatrix, für $1 \leq k \leq n$. Genau dann ist A positiv definit, wenn

$$\det(A_k) > 0 \text{ für } 1 \leq k \leq n$$

erfüllt ist.

Anwendungsbeispiel für das Hurwitz-Kriterium

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 9 \\ 1 & 19 & 10 \\ 9 & 10 & 30 \end{pmatrix}$$

Frage: Ist A positiv definit, d.h. gilt ${}^t v A v > 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\}$?

$\det A_1 = 5 > 0$, $\det A_2 = \det \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 19 \end{pmatrix} = 94 > 0$.

$\det A_3 = 961 > 0$ alle positiv $\overset{\text{Hurwitz-}}{\underset{\text{Kriterium}}{\Longrightarrow}}$

A ist positiv definit.

A ist positiv definit.

Beweis des Hurwitz-Kriteriums

geg. $A \in M_{n,\mathbb{R}}$ symmetrisch, $A_k \in M_{k,\mathbb{R}}$ linke obere $k \times k$-Teilmatrix. Beh: A positiv definit $\Leftrightarrow$ $\det(A_k) > 0$ für $1 \le k \le n$

Sei $\mathcal{E}$ die Einheitsbasis des $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{E}_k = (e_1, \dots, e_k)$, $U_k = \langle \mathcal{E}_k \rangle_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}$ für $1 \le k \le n$.

Außerdem sei b_k die Einschränkung von b auf U_k.

„$\Rightarrow$" Mit b ist auch b_k positiv definit, für $1 \le k \le n$.

Es existiert somit eine ON-Basis B_k von U_k bzgl. b_k.

Für diese gilt $M_{B_k}(b_k) = E_k$ (Einheitsmatrix)

Außerdem gilt $\mathcal{M}_{\mathcal{E}_k}(b_k) = A_k$.

Sei $T = T^{\mathcal{E}_k}_{\mathcal{B}_k}$. Die Matrix T ist invertierbar (als Transformationsmatrix)!

$$\Rightarrow \det(T) \neq 0 \Rightarrow \det(T)^2 > 0$$

Es gilt

$$A_k = \mathcal{M}_{\mathcal{E}_k}(b_k) \overset{\text{Satz vom Basiswechsel}}{=} {}^tT^{\mathcal{E}_k}_{\mathcal{B}_k}\, \mathcal{M}_{\mathcal{B}_k}(b_k)\, T^{\mathcal{E}_k}_{\mathcal{B}_k} = {}^tT E_k T = {}^tT T. \Rightarrow \det(A_k) = \det({}^tT)\cdot\det(T) = \det(T)^2 > 0$$