

Zwei Polynome $f, g \in K[x]$ werden **teilerfremd** genannt, wenn es kein Polynom $h \in K[x]$ vom Grad ≥ 1 gibt, dass sowohl f als auch g teilt.

Satz (15.21)

Sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum und $\phi \in \text{End}_K(V)$. Seien $f, g \in K[x]$ teilerfremde Polynome mit $\mu_\phi = fg$. Dann gilt $\ker f(\phi) = \text{im } g(\phi)$, $\text{im } f(\phi) = \ker g(\phi)$ und

$$V = \text{im } f(\phi) \oplus \text{im } g(\phi) = \ker f(\phi) \oplus \ker g(\phi).$$

Definition (15.22)

Sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum, $\phi \in \text{End}_K(V)$ und $\lambda \in K$. Dann wird

$$\text{Hau}(\phi, \lambda) = \bigcup_{r=0}^{\infty} \ker((\phi - \lambda \text{id}_V)^r)$$

der **Hauptraum** zum Wert λ genannt.

Anmerkung:

Der Hauptraum $\text{Hau}(\phi, \lambda)$ ist ein Untervektorraum von V .

Proposition (15.23)

Seien die Bezeichnungen wie in Definition 15.22 gewählt, und sei r die Vielfachheit von λ als Nullstelle von μ_ϕ . Dann gilt

$$\text{Hau}(\phi, \lambda) = \ker((\phi - \lambda \text{id}_V)^r).$$

Beweis von Proposition 15.23

geg: endl.-dim. K -Vektorraum V , $\phi \in \text{End}_K(V)$

$\lambda \in K$, $r = \text{Vielfachh von } \lambda \text{ als Nullstelle von } \mu_\phi$

$$\text{z.zg: } \bigcup_{n=0}^{\infty} \ker((\phi - \lambda \text{id}_V)^n) = \ker((\phi - \lambda \text{id}_V)^r)$$

" $\supseteq$ " ist offensichtlich " $\subseteq$ " Sei $v \in \bigcup_{n=0}^{\infty} \ker((\phi - \lambda \text{id}_V)^n)$

$$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} \text{ mit } v \in \ker((\phi - \lambda \text{id}_V)^m) \Rightarrow f(\phi)(v) = 0_V$$

wobei $f = (x - \lambda)^m \xrightarrow{\text{Prop 15.6}} \mu_{\phi, v}$ teilt $f \Rightarrow$

$\mu_{\phi, v} = (x - \lambda)^s$ für ein $s \leq m$, außerdem: $\mu_{\phi, v} \mid \mu_\phi$

$$\Rightarrow s \leq r \quad \mu_{\phi, v}(\phi)(v) = 0 \Rightarrow (\phi - \lambda \text{id}_V)^s(v) = 0_V$$

$$\stackrel{\text{SST}}{\Rightarrow} (\phi - \lambda \cdot \text{id}_V)^{\tau}(v) = 0_V \Rightarrow v \in \ker((\phi - \lambda \cdot \text{id}_V)^{\tau})$$



Lemma (15.24)

Sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum, $\phi \in \text{End}_K(V)$, $f \in K[x]$ und $U = \ker f(\phi)$. Dann gilt $\phi(U) \subseteq U$.

Beweis von Lemma 15.24

geg. V endl.-dim. K -Vektorraum, $\phi \in \text{End}_K(V)$
 $f \in K[x]$, $U = \ker f(\phi)$

Beh. $\phi(U) \subseteq U$

Betrachte $g = x \cdot f$. Es gilt $g(\phi) = \phi \circ f(\phi)$

$= f(\phi) \circ \phi$. Sei $v \in U$, z.zg. $\phi(v) \in U$

$$v \in U \Rightarrow f(\phi)(v) = 0_v \Rightarrow f(\phi)(\phi(v))$$

$$= (f(\phi) \circ \phi)(v) = (\phi \circ f(\phi))(v) =$$

$$\phi(f(\phi)(v)) \underset{v \in U}{=} \phi(0_v) = 0_v \rightarrow$$

$$\phi(v) \in \ker f(\phi) \Rightarrow \phi(v) \in U. \quad \square$$

Satz (15.25)

Sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum und $\phi \in \text{End}_K(V)$ ein Endomorphismus mit der Eigenschaft, dass das charakteristische Polynom $\chi_\phi \in K[x]$ oder das Minimalpolynom μ_ϕ in Linearfaktoren zerfällt. Dann gilt

$$V = \text{Hau}(\phi, \lambda_1) \oplus \dots \oplus \text{Hau}(\phi, \lambda_r) \quad ,$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die verschiedenen Eigenwerte von ϕ bezeichnen.

Beweis von Satz 15.25 (Skizze)

(v) V endl.-dim. K -Vektorraum, $\phi \in \text{End}_K(V)$

Vor.: μ_ϕ zerfällt in Linearfaktoren, d. h.

$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_r$ (alle verschieden) und $e_1, \dots, e_r \in \mathbb{N}$

ϕ) mit $\mu_\phi = (x - \lambda_1)^{e_1} \cdot \dots \cdot (x - \lambda_r)^{e_r}$

Beh.: $V = \text{Kern}(\phi - \lambda_1) \oplus \dots \oplus \text{Kern}(\phi - \lambda_r)$

(vi) Beweis durch vollst. Ind. über $\dim V$

$\dim V = 0$ $V = \{0\}$, nichts z.zg.

Setze nun $\dim V > 0$ und die Gültigkeit der Aussage für Vektorräume kleinerer Dimension voraus

□

Schreibe $M_\phi = f g$ mit $f = (x - \lambda_1)^{e_1}$

und $g = \prod_{j=2}^r (x - \lambda_j)^{e_j}$. f, g sind teilerfremd

zerlegungssatz $\Rightarrow V = \ker(f(\phi)) \oplus \ker(g(\phi))$

Prop. 15.23 $\Rightarrow U = \ker(f(\phi))$ stimmt mit dem Hauptraum $\text{Hau}(\phi, \lambda_1)$ überein. Setze $W = \ker(g(\phi))$.

Nach Lemma 15.24 gilt $\phi(U) \subseteq U$ und $\phi(W) \subseteq W$.

Setze $\psi = \phi|_W \rightarrow \psi \in \text{End}_K(W)$ Wegen

$V = U \oplus W$ und $\dim U > 0$ gilt $\dim W < \dim V$.

$\Rightarrow$ Ind.-V. ist auf ψ anwendbar. Überprüfe noch:

$M_\psi = g = \prod_{j=2}^r (x - \lambda_j)^{e_j}$. Die Ind.-V. liefert

$$W = \bigoplus_{j=2}^r \text{Ham}(\psi, \lambda_j) \quad \text{Überprüfe noch:}$$

$$\text{Ham}(\psi, \lambda_j) = \text{Ham}(\phi, \lambda_j) \quad \text{für } 2 \leq j \leq r$$

$$\text{einsetzen} \Rightarrow V = U \oplus W = \text{Ham}(\phi, \lambda_1) \oplus \left(\bigoplus_{j=2}^r \text{Ham}(\phi, \lambda_j) \right)$$

□

$$\text{Han}(\psi, \lambda_j) = \text{Han}(\phi, \lambda_j) \text{ für } 2 \leq j \leq r$$

Erinnerung: Bilinearform auf einem K -Vektorraum V

= Abbildung $b: V \times V \rightarrow K$ mit der Eigenschaft

$$b(v+v', w) = b(v, w) + b(v', w), \quad b(v, w+w') = b(v, w) + b(v, w')$$

$$b(\lambda v, w) = b(v, \lambda w) = \lambda b(v, w) \text{ für alle } v, v', w, w' \in V$$

und alle $\lambda \in K$

Die Darstellungsmatrix einer Bilinearform

Definition (16.1)

Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$ -Vektorraum, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine geordnete Basis und b eine Bilinearform auf V . Dann nennt man die reelle $n \times n$ -Matrix $A = (a_{ij})$ mit den Einträgen

$$a_{ij} = b(v_i, v_j) \quad \text{für } 1 \leq i, j \leq n$$

die **Darstellungsmatrix** $M_{\mathcal{B}}(b)$ von b bezüglich $\mathcal{B}$.

Beispiele für Darstellungsmatrizen von Bilinearformen

ii) $V = \mathbb{R}^n$, $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ euklidisches Standard-Skalarprodukt, $\varepsilon = (e_1, \dots, e_n)$ Einheitsbasis

Für $1 \leq i, j \leq n$ gilt $b(e_i, e_j) = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$.

$\Rightarrow$ Der Eintrag von $M_\varepsilon(b)$ an der Position (i, j) ist jeweils δ_{ij} . Es gilt also $M_\varepsilon(b) = E^{(n)}$, d.h. die Darstellungsmatrix ist die Einheitsmatrix.

iii) $V = \mathbb{R}^3$, b wie unter ii), $B = (v_1, v_2, v_3)$ mit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$,
 $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $b(v_1, v_1) = \langle v_1, v_1 \rangle = 1^2 + 0^2 + 2^2 = 5$,

Darstellungsmatrix ist die Einheitsmatrix

(ii) $V = \mathbb{R}^3$ b. wie unter (i) $B = (v_1, v_2, v_3)$ mit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$b(v_2, v_2) = 19, \quad b(v_3, v_3) = 30, \quad b(v_1, v_2) = 1 \cdot 3 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot (-1)$$

$$= 1 = b(v_2, v_1), \quad b(v_1, v_3) = 9 = b(v_3, v_1), \quad b(v_2, v_3) = 10 = b(v_3, v_2)$$

↑ b ist symmetrisch

$$\Rightarrow M_B(b) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 9 \\ 1 & 19 & 10 \\ 9 & 10 & 30 \end{pmatrix}$$

(iii) $V = \mathbb{R}$ -Vektorraum der Polynomfunktionen vom Grad ≤ 1

$$b: V \times V \rightarrow \mathbb{R} \text{ definiert durch } b(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x) dx$$

$$B = (1, x) \quad b(1, 1) = \int_0^1 1 \cdot 1 dx = [x]_0^1 = 1 - 0 = 1$$

$$b(1, x) = \int_0^1 1 \cdot x dx = \int_0^1 x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$b(x, 1) = \int_0^1 x \cdot 1 dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \Rightarrow M_B(b) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b(x, x) = \int_0^1 x \cdot x dx = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Satz (16.2)

Sei V ein n -dimensionaler $\mathbb{R}$ -Vektorraum und $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine geordnete Basis von V . Dann existiert für jede Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ eine eindeutig bestimmte Bilinearform b auf V mit $M_{\mathcal{B}}(b) = A$.

Beweis von Satz 16.2

geg. $n \in \mathbb{N}$, n -dim. $\mathbb{R}$ -Vektorraum V ,

$B = (v_1, \dots, v_n)$ geordnete Basis von V ,

$A = (a_{ij}) \in M_{n, \mathbb{R}}$ Beh.

Es gibt eine eindeutig bestimmte Bilinearform b auf V mit $M_B(b) = A$.

Eindeutigkeit: Ang. b, b' sind Bilinearformen auf V mit $M_B(b) = M_B(b') = A$ (*)

z.zg: $b = b'$, genügt $b(v, w) = b'(v, w)$

für alle $v, w \in V$

Anw.

Sei

von

Sei

$f, g =$

$b(f, g)$

$= 5/2$

Berechn

natenvekt

$g = (-7)$

Wegen (*) gilt $b(v_i, v_j) = a_{ij}$ und

$$b'(v_i, v_j) = a'_{ij} \quad \forall i, j \text{ mit } 1 \leq i, j \leq n.$$

Seien nun $v, w \in V$ beliebig und $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$,
 $w = \sum_{j=1}^n \mu_j v_j$ Darstellungen von v und w als

Linearkombinationen von B . Dann gilt

$$\begin{aligned} b(v, w) &= b\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, w\right) = \sum_{i=1}^n b(\lambda_i v_i, w) = \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i b(v_i, w) = \sum_{i=1}^n \lambda_i b\left(v_i, \sum_{j=1}^n \mu_j v_j\right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \mu_j b(v_i, v_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \mu_j a_{ij} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \mu_j b'(v_i, v_j) = \dots = b'(v, w) \end{aligned}$$

Existenz: Definiere eine Abbildung $b: V \times V \rightarrow K$

$$\text{durch } b\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, \sum_{j=1}^n \mu_j v_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \mu_j a_{ij}$$

überprüfe: b ist eine Bilinearform auf V , und es
gilt $M_B(b) = A$. (siehe Skript) $\square$

Proposition (16.3)

Unter den angegebenen Voraussetzungen gilt für alle $v, w \in V$ jeweils

$$b(v, w) = {}^t\Phi_{\mathcal{B}}(v)\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(b)\Phi_{\mathcal{B}}(w).$$

Anwendungsbeispiel zu Prop. 16.3

Sei V der $\mathbb{R}$ -Vektorraum aus Beispiel (iii) von oben, und auch B und b wie oben definiert.

Sei $f = 2x + 5$, $g = 3x - 7$. $G(f, g) = ?$

$$f \cdot g = (2x + 5)(3x - 7) = 6x^2 + x - 35$$

$$\begin{aligned} G(f, g) &= \int_0^1 (6x^2 + x - 35) dx = \left[2x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 35x \right]_0^1 \\ &= 5/2 - 70/2 = -65/2 \end{aligned}$$

Berechnung von $G(f, g)$ mit den Koordinatenvektoren

$$f = 5 \cdot 1 + 2 \cdot x \Rightarrow \Phi_B(f) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$g = (-7) \cdot 1 + 3 \cdot x \Rightarrow \Phi_B(g) = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Prop. 16.3} \Rightarrow k(f, g) &= {}^t\Phi_B(f) M_B(k) \Phi_B(g) \\
 &= (5 \ 2) \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} (5 \ 2) \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{6} (5 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} -33 \\ -15 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot (5(-33) + 2(-15)) = \frac{1}{6} \cdot (-195) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot (-195) = \frac{1}{2} \cdot (-65) = -\frac{65}{2}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6} (5 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} -33 \\ -15 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot (5(-33) + 2(-15)) = \frac{1}{6} \cdot (-195)$$

Beweis von Prop. 16.3

geg. $n \in \mathbb{N}$, V n -dim. $\mathbb{R}$ -Vektorraum V , b Bilinearform,
 $v, w \in V$

$$\text{z.zg. } b(v, w) = {}^t \Phi_B(v) M_B(b) \Phi_B(w) \quad (*)$$

Seien $v, w \in V$, und es seien a_{ij} ($1 \leq i, j \leq n$) die Einträge
 von $A = M_B(b)$. Seien $\tilde{v} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \Phi_B(v)$, $\tilde{w} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \Phi_B(w)$

Für $1 \leq k \leq n$ ist der n -te Eintrag von $M_B(b) \Phi_B(w) = A \tilde{w}$

$$\begin{aligned} \text{geg. durch } (A \tilde{w})_k &= \sum_{j=1}^n a_{kj} \mu_j \Rightarrow {}^t \Phi_B(v) \cdot M_B(b) \cdot \Phi_B(w) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i (A \tilde{w})_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \lambda_i \mu_j \end{aligned}$$

linke Seite von (*):

$$\text{Wegen } \tilde{v} = \Phi_B(v) \text{ gilt } v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i,$$

$$\text{und aus } \tilde{w} = \Phi_B(w) \text{ folgt } w = \sum_{j=1}^n \mu_j v_j$$

$$\Rightarrow b(v, w) = b\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, \sum_{j=1}^n \mu_j v_j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \mu_j b(v_i, v_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \mu_j a_{ij}$$

Also stimmen die linke und rechte Seite von (*)
überein. □