

Nilpotente Endomorphismen und Matrizen

Definition (15.14)

- (i) Sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum. Ein Endomorphismus $\psi \in \text{End}_K(V)$ wird als **nilpotent** bezeichnet, wenn ein $p \in \mathbb{N}$ mit $\psi^p = 0_{\text{End}_K(V)}$ existiert. Das kleinste p mit dieser Eigenschaft nennt man den **Nilpotenzgrad** von ψ .
- (ii) Ebenso bezeichnet man eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ als nilpotent, wenn $A^p = 0_{\mathcal{M}_{n,K}}$ für ein $p \in \mathbb{N}$ gilt; entsprechend ist der Nilpotenzgrad einer solchen Matrix definiert.

Beispiel: Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,\mathbb{R}}$$

ist eine nilpotente Matrix vom Nilpotenzgrad 2.

Satz (15.16)

Sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum und $\psi \in \text{End}_K(V)$ ein nilpotenter Endomorphismus vom Nilpotenzgrad p . Sei $V_k = \ker(\psi^k)$ für $0 \leq k \leq p$. Dann gibt es in V Untervektorräume

$$U_1, \dots, U_p \quad \text{und} \quad W_1, \dots, W_{p-1} \quad ,$$

so dass folgende Bedingungen erfüllt sind.

- (i) Es gilt $\psi(U_k) \subseteq U_{k-1}$ für $2 \leq k \leq p$, und die Einschränkung $\psi|_{U_k}$ ist jeweils **injektiv**.
- (ii) Es gilt $V_k = V_{k-1} \oplus U_k$ für $1 \leq k \leq p$ und $U_k = \psi(U_{k+1}) \oplus W_k$ für $1 \leq k \leq p-1$.

Definition (15.17)

Sei V ein endlich-dim. K -Vektorraum und $\phi \in \text{End}_K(V)$.

- (i) Wir bezeichnen ein Tupel $(w_1, \dots, w_p)$ von Vektoren mit $p \in \mathbb{N}$ als **Jordankette** bezüglich ϕ , wenn $\phi(w_k) = w_{k-1}$ für $2 \leq k \leq p$ und $\phi(w_1) = 0_V$ gilt.
- (ii) Eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V ist eine **Jordanbasis** bezüglich ϕ , wenn die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\phi)$ in Jordanscher Normalform vorliegt.

Jordanketten und die Jordansche Normalform

- Ist eine geordnete Basis $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_p)$ von V zugleich eine Jordankette bezüglich ϕ , dann ist die **Darstellungsmatrix** $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\phi)$ eine **Jordanmatrix** zum Eigenwert 0.
- Ist die geordnete Basis $\mathcal{B}$ aus mehreren Jordanketten zusammengesetzt, dann ist $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\phi)$ entsprechend eine Matrix in **Jordanscher Normalform**.

Folgerung (15.18)

Seien die Bezeichnungen wie in Satz 15.16 gewählt, und sei außerdem $W_p = U_p$. Dann gilt

$$V = \bigoplus_{j=1}^p \bigoplus_{\ell=0}^{j-1} \psi^{\ell}(W_j).$$

Beweis von Folgerung 15.18

Sei $k \in \{1, \dots, p\}$. Durch Satz 15.16 erhalten wir

$$U_k = \psi(U_{k+1}) \oplus W_k = \psi(\psi(U_{k+2}) \oplus W_{k+1}) \oplus W_k$$

$$= \psi^2(U_{k+2}) \oplus \psi(W_{k+1}) \oplus W_k = \dots =$$

$$\psi^{p-k}(U_p) \oplus \dots \oplus \psi(W_{k+1}) \oplus W_k = \bigoplus_{l=0}^{p-k} \psi^l(W_{k+1})$$

$$\psi^{p-k}(W_p) \oplus \dots \oplus \psi(W_{k+1}) \oplus W_k = \bigoplus_{l=0}^{p-k} \psi^l(W_{k+1})$$

$$V = V_p \stackrel{(15.16)}{=} V_{p-1} \oplus U_p \stackrel{(15.16)}{=} V_{p-2} \oplus U_{p-1} \oplus U_p$$

$$= \dots = V_0 \oplus U_1 \oplus \dots \oplus U_p = \bigoplus_{k=1}^p U_k =$$

$$\bigoplus_{k=1}^p \bigoplus_{l=0}^{p-k} \psi^l(W_{k+1}) = \bigoplus_{k=1}^p \bigoplus_{l=0}^{p-k} \psi^l(U_k)$$

□

Folgerung (15.19)

Seien die Bezeichnungen wie in Satz 15.16 gewählt, und außerdem $W_p = U_p$. Dann existiert eine Jordanbasis $\mathcal{B}$ von V bezüglich ψ derart, dass die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\psi)$ für $1 \leq j \leq p$ jeweils genau $\dim W_j$ Jordanblöcke der Größe j enthält, und darüber hinaus keine weiteren.

$$\bigoplus_{k=1}^p \bigoplus_{l=0}^{p-k} \varphi^l(w_{k+1}) = \bigoplus_{j=1}^p \bigoplus_{l=0}^{j-1} \varphi^l(u_j) \quad \square$$

Beweis von Folgerung 15.18.

Sei $j \in \{1, \dots, p\}$, setze $m_j = \dim W_j$. Sei $(v_1, \dots, v_{m_j})$ eine geordnete Basis von W_j . $W_j \subseteq U_j$, $\varphi|_{U_j}$ ist invertierbar, $\varphi(U_j) \subseteq U_j$ (nach Satz 15.16) —

$(\varphi^l(v_1), \dots, \varphi^l(v_{m_j}))$ ist Basis von $\varphi^l(W_j)$ für $0 \leq l \leq j-1$

Es ist $(\varphi^{j-1}(v_i), \varphi^{j-2}(v_i), \dots, \varphi(v_i), v_i)$ jeweils eine

Jordan-Kette der Länge j , für $1 \leq i \leq m_j$.

Fassen wir diese Jordanketten zusammen, erhalten wir eine

Basis von $\bigoplus_{l=0}^{j-1} \varphi^l(U_j)$. Wiederholen wir dies auf jedes j an, er-

halten wir nach Folgerung 15.18 eine Jordanbasis von V bzgl. φ $\square$

Satz (15.20)

Sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum, $\psi \in \text{End}_K(V)$ ein nilpotenter Endomorphismus und $V_k = \ker(\psi^k)$, $d_k = \dim V_k$ für alle $k \geq 0$. Desweiteren sei $\mathcal{B}$ eine Jordanbasis wie in Folgerung 15.19 und $J = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\psi)$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei a_k jeweils die Anzahl der Jordanblöcke der Größe k in J zum Eigenwert 0. Dann gilt

$$a_k = 2d_k - d_{k-1} - d_{k+1} \quad \text{für alle } k \geq 1.$$

Beweis von Satz 15.20

Sei p der Nilpotenzgrad von φ , $k \in \{1, \dots, p\}$

Folgerung 15.19 $\Rightarrow d_k = \dim W_k$

$\varphi|_{U_{k+1}}$ ist injektiv, $U_k = \varphi(U_{k+1}) \oplus W_k$

nach Satz 15.16 $\Rightarrow \dim U_k = \dim \varphi(U_{k+1})$

$$+ \dim W_k \stackrel{\text{Injektivität}}{=} \dim U_{k+1} + \dim W_k$$

$$= \dim U_{k+1} + d_k$$

$$V_k = V_{k-1} \oplus U_k \Rightarrow \dim V_k = \dim V_{k-1} +$$

$$\dim U_k \Rightarrow d_k = d_{k-1} + \dim U_k$$

$$\Rightarrow \dim U_k = d_k - d_{k-1}$$

$\Rightarrow \text{denn } U_k = d_k - d_{k-1}$

ebenso: $\text{denn } U_{k+1} = d_{k+1} - d_k$

einsetzen $\Rightarrow a_k = \text{denn } U_k - \text{denn } U_{k+1} =$
 $(d_k - d_{k-1}) - (d_{k+1} - d_k) = 2d_k - d_{k-1} - d_{k+1}$

überprüfe noch: Die Gleichung gilt auch für
den Wert $k=p$ (siehe Skript). $\square$

Anwendungsbeispiel zu Satz 15.20

Betrachte

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 8 & -4 & -3 \\ 1 & -2 & 4 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 8 & -5 & -2 \end{pmatrix} \in M_{5, \mathbb{R}}$$

Rechnung ergibt $\chi_A = x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32$
 $= (x-2)^5 \Rightarrow$ einziger Eigenwert: 2

Definiere

$$N = A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & -4 & -3 \\ 1 & -2 & 4 & -3 & -2 \\ -1 & -2 & 8 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

Rechnung $\rightarrow$

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = 0_{M_{5, \mathbb{R}}}$$

$\Rightarrow d_3 = 5, d_0 = 0$ (*)

$$\left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow d_3 = 5, d_0 = 0 (*)$$

Wende das Gaußverfahren auf N an. $\Rightarrow$

erhalte $\text{rg}(N) = 3 \Rightarrow d_1 = 5 - 3 = 2$

ebenso mit $N^2 \rightarrow \text{rg}(N^2) = 1 \Rightarrow d_2 = 5 - 1 = 4$

Wende nun Satz 15.20 an.

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= 2d_1 - d_0 - d_2 = 2 \cdot 2 - 0 - 4 = 0 \\ a_2 &= 2d_2 - d_1 - d_3 = 2 \cdot 4 - 2 - 5 = 1 \\ a_3 &= 2d_3 - d_2 - d_4 = 2 \cdot 5 - 4 - 5 = 1 \\ a_k &= 2d_k - d_{k-1} - d_{k+1} = 2 \cdot 5 - 5 - 5 = 0 \text{ für } k \geq 4 \end{aligned} \right\} (**)$$

(*) denn: $d_0 = \dim \ker(N^0) = \dim \ker(E) = \dim \{0_{\mathbb{R}^5}\} = 0$

$d_k = \dim \ker(N^k) = \dim \ker(0_{M_{5,2}}) = \dim \mathbb{R}^5 = 5$
für $k \geq 3$

Nach Satz 15.20 ist N also ähnlich zu einer Jordanmatrix der Form $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, und $A = N + 2E$

ist ähnlich zu einer Jordanmatrix der Form $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(Matrizen in JNF, bei den die Jordanblöcke nur in der Reihenfolge vertauscht sind, sind ähnlich.)

(***) bedeutet: Es gibt in der JNF genau einen Jordanblock der Größe 2, und einen Jordanblock der Größe 3.

Berechnung einer Jordanbasis

gegeben: endl.-dim. K -Vektorraum V , $\psi \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\psi)$ nilpotent,
Nilpotenzgrad p

Ziel: Bestimmung einer geordneten Basis $\mathcal{B}$, so dass $J = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\psi)$
in Jordanscher Normalform vorliegt.

- Sei $V_k = \ker(\psi^k)$ für $0 \leq k \leq p$. Bestimme eine Basis $\mathcal{C}_k$ von V_k für $1 \leq k \leq p$, und setze $\mathcal{C}_0 = \emptyset$.
- zur Orientierung: $V_p = V_{p-1} \oplus U_p$, $W_p = U_p$
Sei $\mathcal{B}_p \subseteq \mathcal{C}_p$ so gewählt, dass $\mathcal{C}_{p-1} \cup \mathcal{B}_p$ eine Basis von V_p ist.
Setze $\mathcal{D}_p = \mathcal{B}_p$.
- Für $k = p-1, p-2, \dots, 1$ für folgende Schritte aus:
zur Orientierung: $V_k = V_{k-1} \oplus \psi(U_{k+1}) \oplus W_k$, $U_k = \psi(U_{k+1}) \oplus W_k$
Wähle eine Teilmenge $\mathcal{D}_k \subseteq \mathcal{C}_k$ so, dass $\mathcal{C}_{k-1} \cup \psi(\mathcal{B}_{k+1}) \cup \mathcal{D}_k$
eine Basis von V_k ist. Setze $\mathcal{B}_k = \psi(\mathcal{B}_{k+1}) \cup \mathcal{D}_k$.

Berechnung einer Jordanbasis (Forts.)

Für $1 \leq k \leq p$ sei $m_k = |\mathcal{D}_k|$, und es seien

$$w_1^{(k)}, w_2^{(k)}, \dots, w_{m_k}^{(k)}$$

die Elemente von $\mathcal{D}_k$. Definiere das Tupel $\hat{\mathcal{B}}_k$ bestehend aus den Elementen

$$\begin{aligned} &(\psi^{k-1}(w_1^{(k)}) \quad , \quad \psi^{k-2}(w_1^{(k)}) \quad , \quad \dots \quad , \quad \psi(w_1^{(k)}) \quad , \quad w_1^{(k)} \quad , \\ &\psi^{k-1}(w_2^{(k)}) \quad , \quad \psi^{k-2}(w_2^{(k)}) \quad , \quad \dots \quad , \quad \psi(w_2^{(k)}) \quad , \quad w_2^{(k)} \quad , \\ &\quad \dots \\ &\psi^{k-1}(w_{m_k}^{(k)}) \quad , \quad \psi^{k-2}(w_{m_k}^{(k)}) \quad , \quad \dots \quad , \quad \psi(w_{m_k}^{(k)}) \quad , \quad w_{m_k}^{(k)}). \end{aligned}$$

Dann ist $\mathcal{B} = \hat{\mathcal{B}}_1 \cup \hat{\mathcal{B}}_2 \cup \dots \cup \hat{\mathcal{B}}_p$ eine geordnete Basis mit der gewünschten Eigenschaft. Die Matrix $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\psi)$ enthält die Jordanblöcke **der Größe nach aufsteigend** geordnet.

Berechnung einer Transformationsmatrix

gegeben: nilpotente Matrix $N \in \mathcal{M}_{n,K}$

gesucht: Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(K)$, so dass $J = T^{-1}NT$ eine Matrix in Jordanscher Normalform ist

- Wende den soeben angegebenen Algorithmus auf den Endomorphismus $\phi_N \in \mathrm{End}_K(K^n)$ an. Dies liefert eine Basis $\mathcal{B}$ von K^n , so dass $J = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\phi_N)$ eine Matrix in Jordanscher Normalform ist.
- Trage die Elemente von $\mathcal{B}$ als Spalten in eine Matrix T ein. Dann gilt $T^{-1}NT = J$ auf Grund der Transformationsformel.

Beispiel: Bestimmung einer Jordanbasis

Sei $A \in M_{5, \mathbb{R}}$ die Matrix von oben. $N = A - 2E$.

s.o. $\Rightarrow p = 3$ ist der Nilpotenzgrad von N

$$\Rightarrow N^3 = 0_{M_{5, \mathbb{R}}} \Rightarrow V_3 = \ker(N^3) = \mathbb{R}^5$$

$\Rightarrow \mathcal{C}_3 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ ist Basis von V_3

Der Gaußalgorithmus liefert für $V_1 = \ker(N)$ die

Basis $\mathcal{C}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$. Ebenso erhalten wir für

Der Gaußalgorithmus liefert für $V_1 = \ker(N)$ die Basis $\mathcal{C}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Ebenso erhalten wir für

$V_2 = \ker(N^2)$ die Basis $\mathcal{C}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

überprüfe: $\mathcal{C}_2$ wird durch $\mathcal{C}_1$ zu einer Basis von V_3 ergänzt.
 $\Rightarrow$ Setze $D_3 = B_3 = \{e_1\}$ (mit dem Gaußalg)

überprüfe ebenso: $\mathcal{C}_1 \cup \psi(B_3)$, bestehend aus

$(0, 1, 0, -2, 2), (0, 0, 1, 0, 2), \psi(e_1) = (-1, -1, 0, 1, -1)$ (wobei $\psi = \phi_N$)
wird durch $(1, 0, 0, 1, 0)$ zu einer Basis von V_2 ergänzt.

$\Rightarrow$ setze $D_2 = \{(1, 0, 0, 1, 0)\}$, $B_2 = \psi(B_3) \cup D_2$

$\mathcal{C}_0 \cup \psi(B_2)$ besteht schon aus zwei Elementen, und $d_1 = 2$

$\Rightarrow$ können $D_1 = \emptyset$, $B_1 = \mathcal{C}_0 \cup \psi(B_2) = \psi(B_2)$ setzen

Auf Grund des Verfahrens liefert

D_2 eine Jordankette der Länge 2, nämlich

$$\left(N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \text{ und}$$

D_3 liefert eine Jordankette der Länge 3,

$$\text{nämlich } (N^2 e_1, N e_1, e_1) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

⇒ erhalte die Transformationsmatrix

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

überprüfe. $T^{-1}NT$ und $T^{-1}AT$ sind
Jordanmatrizen mit Blöcken der Größe
2 und 3 $\square$

Zwei Polynome $f, g \in K[x]$ werden **teilerfremd** genannt, wenn es kein Polynom $h \in K[x]$ vom Grad ≥ 1 gibt, dass sowohl f als auch g teilt.

Satz (15.21)

Sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum und $\phi \in \text{End}_K(V)$. Seien $f, g \in K[x]$ teilerfremde Polynome mit $\mu_\phi = fg$. Dann gilt $\ker f(\phi) = \text{im } g(\phi)$, $\text{im } f(\phi) = \ker g(\phi)$ und

$$V = \text{im } f(\phi) \oplus \text{im } g(\phi) = \ker f(\phi) \oplus \ker g(\phi).$$

Überprüfe durch nacheinander die folgenden Aussagen:

- (i) $\ker f(\phi) \cap \ker g(\phi) = \{0_V\}$
- (ii) $\operatorname{im} f(\phi) \subseteq \ker g(\phi)$ und $\operatorname{im} g(\phi) \subseteq \ker f(\phi)$
- (iii) $V = \ker f(\phi) \oplus \operatorname{im} f(\phi) = \ker g(\phi) \oplus \operatorname{im} g(\phi)$
- (iv) $\ker f(\phi) = \operatorname{im} g(\phi)$ und $\ker g(\phi) = \operatorname{im} f(\phi)$
- (v) $V = \operatorname{im} f(\phi) \oplus \operatorname{im} g(\phi)$

Teil (i) ergibt sich aus der Teilerfremdheit von f und g . Teil (ii) erhält man durch direktes Nachrechnen. Für (iii) wird der Schnittdimensionssatz angewendet, Teil (iv) erhält man dann durch Betrachtung der Dimension. Teil (v) und die Aussage des Satzes ergeben sich direkt aus (iii) und (iv).

Definition (15.22)

Sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum, $\phi \in \text{End}_K(V)$ und $\lambda \in K$. Dann wird

$$\text{Hau}(\phi, \lambda) = \bigcup_{r=0}^{\infty} \ker((\phi - \lambda \text{id}_V)^r)$$

der **Hauptraum** zum Wert λ genannt.

Anmerkung:

Der Hauptraum $\text{Hau}(\phi, \lambda)$ ist ein Untervektorraum von V .

Proposition (15.23)

Seien die Bezeichnungen wie in Definition 15.22 gewählt, und sei r die Vielfachheit von λ als Nullstelle von μ_ϕ . Dann gilt

$$\text{Hau}(\phi, \lambda) = \ker((\phi - \lambda \text{id}_V)^r).$$

Lemma (15.24)

Sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum, $\phi \in \text{End}_K(V)$, $f \in K[x]$ und $U = \ker f(\phi)$. Dann gilt $\phi(U) \subseteq U$.

Satz (15.25)

Sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum und $\phi \in \text{End}_K(V)$ ein Endomorphismus mit der Eigenschaft, dass das charakteristische Polynom $\chi_\phi \in K[x]$ oder das Minimalpolynom μ_ϕ in Linearfaktoren zerfällt. Dann gilt

$$V = \text{Hau}(\phi, \lambda_1) \oplus \dots \oplus \text{Hau}(\phi, \lambda_r) \quad ,$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die verschiedenen Eigenwerte von ϕ bezeichnen.

Folgerung (15.26)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper.

- (i) Sei $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ eine Matrix, deren charakteristisches Polynom χ_A in $K[x]$ in **Linearfaktoren zerfällt**. Dann ist A ähnlich zu einer Matrix in Jordanscher Normalform.
- (ii) Zwei Matrizen $J, J' \in \mathcal{M}_{n,K}$ in Jordanscher Normalform sind genau dann ähnlich zueinander, wenn sie bis auf Reihenfolge **dieselben Jordanblöcke** enthalten.

Das vollständige Verfahren

Seien die Bezeichnungen wie in Satz 15.25 gewählt, und es sei $\mu_\phi = \prod_{k=1}^r (x - \lambda_k)^{e_k}$ die Darstellung von μ_ϕ als Produkt von Linearfaktoren.

- Setze $U_k = \text{Hau}(\phi, \lambda_k)$ und $\psi_k = (\phi - \lambda_k \text{id}_V)|_{U_k}$, für $1 \leq k \leq r$. Dann ist ψ_k jeweils ein **nilpotenter** Endomorphismus, vom Nilpotenzgrad e_k .
- Wende nun das Verfahren für nilpotente Endomorphismen auf ψ_k an, für $1 \leq k \leq r$. Wir erhalten jeweils eine geordnete Basis $\mathcal{B}_k$ von U_k , so dass $J_k = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_k}(\psi_k)$ zu einer Matrix in Jordanscher Normalform wird, mit null als einzigem Eigenwert.
- Bilde nun $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_r$. Dann ist $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis von V , und $J = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\phi)$ eine Matrix in Jordanscher Normalform.
- Ist speziell $V = K^n$ und $\phi = \phi_A$ für eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,K}$, dann bilde $T = \mathcal{T}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}$ durch Eintragung der Vektoren von $\mathcal{B}$ als Spalten in T . Es gilt dann $J = T^{-1}AT$.