
18.10.2025


18.10.2025

Definition der Jordanmatrizen

Definition (15.10)

Eine Matrix $J \in \mathcal{M}_{n,K}$ heißt Jordanmatrix zum Eigenwert $\lambda \in K$, wenn sie die Form

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{besitzt.}$$

Beispiele für Jordanmatrizen

- Jordanmatrix der Größe 1 $\begin{pmatrix} \lambda \end{pmatrix}$
- Jordanmatrix der Größe 2
$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$
- Jordanmatrix der Größe 3
$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$
- Jordanmatrix der Größe 4
$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Matrizen in Jordanscher Normalform

Definition

Eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ befindet sich in Jordanscher Normalform, wenn sie als Blockmatrix in der Form

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{pmatrix}$$

mit Jordanmatrizen $J_1, ..., J_r$ schreiben lässt. Man bezeichnet diese als Jordanblöcke der Matrix A.

Beispiel für eine Matrix in Jordanscher Normalform

$$\begin{pmatrix} \color{red}{2} & \color{red}{1} & \color{red}{0} & 0 & 0 & 0 \\ \color{red}{0} & \color{red}{2} & \color{red}{1} & 0 & 0 & 0 \\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \color{green}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \color{blue}{3} & \color{blue}{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \color{blue}{0} & \color{blue}{3} \end{pmatrix}$$

(Die Jordanblöcke sind farbig hervorgehoben.)

Eigenschaften der Jordanmatrizen

Proposition (15.11)

Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, $\psi \in \mathrm{End}_K(V)$ und $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis mit der Eigenschaft, dass $J = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\psi)$ eine Jordanmatrix zum Eigenwert $\lambda \in K$ ist. Dann gilt

(i) Der einzige Eigenwert von ψ ist λ. Die algebraische und die geometrische Vielfachheit dieses Eigenwerts sind durch $\mu_a(\psi, \lambda) = n$ und $\mu_g(\psi, \lambda) = 1$ gegeben.

(ii) Es gilt $\mu_\psi = \chi_\psi = (x - \lambda)^n$.

Beweis von Prop. 15.11 (ii) (Abschluss)

geg.: n-dim. K-Vektorraum V, $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$

$\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ geordnete Basis von V, so dass

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Beh.: $\mu_\varphi = (x-\lambda)^n$

μ_φ teilt $\chi_\varphi = (x-\lambda)^n \Rightarrow \exists\, m \in \{1, \ldots, n\}$ mit

$\mu_\varphi = (x-\lambda)^m$ Ang. $m < n$. $\mu_\varphi(\varphi) = 0_{\mathrm{End}_K(V)}$

$\Rightarrow (\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^m = 0_{\mathrm{End}_K(V)} \Rightarrow (\varphi - \lambda\, \mathrm{id}_V)^m(v_n) = 0_V$

μ_φ teilt $\chi_\varphi = (x-\lambda)^n \Rightarrow \exists\, m \in \{1, \dots, n\}$ mit

$\mu_\varphi = (x-\lambda)^m$ Ang. $m < n$. $\mu_\varphi(\varphi) = 0_{\mathrm{End}(V)}$

aber: $M_B(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ An der Matrix

kann abgelesen werden: $(\varphi - \lambda\, \mathrm{id}_V)(v_k) = v_{k-1}$ für $2 \leq k \leq n$

$\Rightarrow (\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^m (v_n) = v_{n-m} \neq 0_V$ ↯ also: $m = n$ $\square$

$$\begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

Eigenraumzerlegung für eingeschränkte Endomorphismen

Lemma (15.12)

Sei V ein K-Vektorraum mit einer Zerlegung $V = U_1 \oplus ... \oplus U_r$ als direkte Summe von Untervektorräumen $U_i \le V$, und sei $\psi \in \mathrm{End}_K(V)$ mit $\psi(U_i) \subseteq U_i$ für $1 \le i \le r$. Dann gilt für jedes $\lambda \in K$ jeweils

$$\mathrm{Eig}(\psi, \lambda) \quad = \quad \mathrm{Eig}(\psi|_{U_1}, \lambda) \oplus ... \oplus \mathrm{Eig}(\psi|_{U_r}, \lambda).$$

Beweis von Lemma 15.12:

geg: V endl.-dim. K-Vektorraum, $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$, direkte Summenzerlegung $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_r$ in Untervektorräume $U_j \leq V$ $(1 \leq j \leq r)$ mit $\varphi(U_j) \subseteq U_j$, $\lambda \in K$

$$\mathrm{Eig}(\varphi, \lambda) = \mathrm{Eig}(\varphi|_{U_1}, \lambda) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Eig}(\varphi|_{U_r}, \lambda)$$

Für $i \neq j$ gilt jeweils $U_i \cap U_j = \{0_V\}$, wegen $\mathrm{Eig}(\varphi|_{U_i}, \lambda) \subseteq U_i$, $\mathrm{Eig}(\varphi|_{U_j}, \lambda)$

$\subseteq U_j$ also auch $\mathrm{Eig}(\varphi|_{U_i}, \lambda) \cap \mathrm{Eig}(\varphi|_{U_j}, \lambda) = \{0_V\}$

„$\supseteq$" offensichtlich, da $\mathrm{Eig}(\varphi|_{U_j}, \lambda) \subseteq \mathrm{Eig}(\varphi, \lambda)\ \forall j$

„$\subseteq$" Sei $v \in \mathrm{Eig}(\varphi, \lambda) \Rightarrow \varphi(v) = \lambda v$

Auf Grund der dir. Summenzerlegung von V gibt es $u_j \in U_j$ $(1 \leq j \leq r)$ mit $v = u_1 + \dots + u_r$.

$$\underbrace{\varphi(u_1)}_{\in U_1} + \dots + \underbrace{\varphi(u_r)}_{\in U_r} = \varphi(v) = \lambda v = \underbrace{\lambda u_1}_{\in U_1} + \dots + \underbrace{\lambda u_r}_{\in U_r}$$

Auf Grund der Eindeutigkeit in der direkten Summenzerlegung folgt $\varphi(u_j) = \lambda u_j$ für $1 \leq j \leq r$

$\Rightarrow u_j \in \mathrm{Eig}(\varphi|_{U_j}, \lambda) \Rightarrow v \in \bigoplus_{j=1}^{r} \mathrm{Eig}(\varphi|_{U_j}, \lambda)$ $\square$

mit $\varphi(U_j) \subseteq U_j$, $\lambda \in K$

Endomorphismen mit Darstellungsmatrix in JNF

Satz (15.13)

Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, $\psi \in \mathrm{End}_K(V)$ und $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis mit der Eigenschaft, dass $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\psi)$ in Jordanscher Normalform vorliegt. Sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von ψ. Dann gilt

(i) Sowohl χ_ψ als auch μ_ψ zerfallen in Linearfaktoren.

(ii) Die geometrische Vielfachheit $\mu_g(\psi, \lambda)$ ist gleich der Anzahl aller Jordanblöcke von A zum Eigenwert λ.

(iii) Die algebraische Vielfachheit $\mu_a(\psi, \lambda)$ ist gleich der Summe der Größen aller Jordanblöcke von A zum Eigenwert λ.

(iv) Die Vielfachheit von λ als Nullstelle von μ_ψ ist gleich der Größe des größten Jordanblocks zum Eigenwert λ.

Beispiel: Matrizen in JNF mit einem Eigenwert

$$J_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\chi_{J_1} = \mu_{J_1} = (x-\lambda)^5$$
$$\mu_a(J_1,\lambda) = 5, \mu_g(J_1,\lambda) = 1$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\chi_{J_2} = (x-\lambda)^5, \mu_{J_2} = (x-\lambda)^4$$
$$\mu_a(J_2,\lambda) = 5, \mu_g(J_2,\lambda) = 2$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\chi_{J_3} = (x-\lambda)^5, \mu_{J_3} = (x-\lambda)^3$$
$$\mu_a(J_3,\lambda) = 5, \mu_g(J_3,\lambda) = 2$$

$$J_4 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\chi_{J_4} = (x-\lambda)^5, \mu_{J_4} = (x-\lambda)^2$$
$$\mu_a(J_4,\lambda) = 5, \mu_g(J_4,\lambda) = 3$$

Beispiel: Matrizen in JNF mit einem Eigenwert (Forts.)

$$J_5 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\chi_{J_5} = (x-\lambda)^5, \mu_{J_5} = (x-\lambda)^2$$
$$\mu_a(J_5,\lambda) = 5, \mu_g(J_5,\lambda) = 4$$

$$J_6 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\chi_{J_6} = (x-\lambda)^5, \mu_{J_6} = x-\lambda$$
$$\mu_a(J_6,\lambda) = \mu_g(J_6,\lambda) = 5$$

Nilpotente Endomorphismen und Matrizen

Definition (15.14)

(i) Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Ein Endomorphismus $\psi \in \mathrm{End}_K(V)$ wird als nilpotent bezeichnet, wenn ein $p \in \mathbb{N}$ mit $\psi^p = 0_{\mathrm{End}_K(V)}$ existiert. Das kleinste p mit dieser Eigenschaft nennt man den Nilpotenzgrad von ψ.

(ii) Ebenso bezeichnet man eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ als nilpotent, wenn $A^p = 0_{\mathcal{M}_{n,K}}$ für ein $p \in \mathbb{N}$ gilt; entsprechend ist der Nilpotenzgrad einer solchen Matrix definiert.

Beispiel: Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,\mathbb{R}}$$

ist eine nilpotente Matrix vom Nilpotenzgrad 2.

Lemma (15.15)

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\psi \in \mathrm{End}_K(V)$ ein nilpotenter Endomorphismus vom Nilpotenzgrad p. Dann haben die Untervektorräume von $V_0, ..., V_p$ von V gegeben durch

$$V_k \quad = \quad \ker(\psi^k) \text{ für } 0 \le k \le p$$

die folgenden Eigenschaften.

(i) Es gilt $\{0_V\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq ... \subsetneq V_{p-1} \subsetneq V_p = V$.

(ii) Für $1 \le k \le p$ gilt $\psi^{-1}(V_{k-1}) = V_k$.

Beweis von Lemma 15.15:

geg. endl.-dim. K-Vektorraum V, $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ nilpotent mit Nilpotenzgrad p (d.h. $\varphi^p = 0_{\mathrm{End}_K(V)}$, aber $\varphi^{p-1} \neq 0_{\mathrm{End}_K(V)}$) Sei $V_k = \ker(\varphi^k)$ für $0 \leq k \leq p$.

z.zg.: (0) $V_0 = \{0_V\}$, $V_p = V$

(1) $V_{k-1} \subseteq V_k$ für $1 \leq k \leq p$

(2) $V_{k-1} \subsetneq V_k$ für $1 \leq k \leq p$

(3) $\varphi^{-1}(V_{k-1}) = V_k$

zu (0) Sei $v \in V_0 \Rightarrow \varphi^0(v) = 0_V \Rightarrow \mathrm{id}_V(v) = 0_V$

$\Rightarrow v = 0_V$. Ebenso gilt $V \subseteq V_p$, denn:

zu (0) Sei $v \in V_0$. $\Rightarrow$ ...

$\Rightarrow v = 0_V$. Ebenso gilt $V \subseteq V_p$, denn:

$v \in V \Rightarrow 0_{\mathrm{End}_K(V)}(v) = 0_V \Rightarrow \psi^p(v) = 0_V \Rightarrow v \in V_p$

zu (1) Sei $k \in \{1, \dots, p\}$ und $v \in V_{k-1}$. $\Rightarrow \psi^{k-1}(v) = 0_V$

$\Rightarrow \psi^k(v) = \psi(\psi^{k-1}(v)) = \psi(0_V) = 0_V \Rightarrow v \in V_k$

zu (2) Ang. es gilt $V_{k-1} = V_k$ für ein $k \in \{1, \dots, p\}$.

Beh: $V_{p-1} = V_p$ „$\subseteq$" bereits bekannt „$\supseteq$" Sei $v \in V_p$.

$\Rightarrow \psi^p(v) = 0_V \Rightarrow \psi^k(\psi^{p-k}(v)) = 0_V \Rightarrow \psi^{p-k}(v) \in V_k$

$\Rightarrow \psi^{p-k}(v) \in V_{k-1} \Rightarrow \psi^{k-1}(\psi^{p-k}(v)) = 0_V \Rightarrow \psi^{p-1}(v) =$

$0_V \Rightarrow v \in V_{p-1}$. ($\Rightarrow$ Beh.) Aus der Beh folgt

$V_{p-1} = V \Rightarrow \ker(\psi^{p-1}) = V \Rightarrow \psi^{p-1}(v) = 0_V \ \forall v \in V$

$\Rightarrow \psi^{p-1} = 0_{\mathrm{End}_K(V)}$ ↯ (siehe oben)

<u>zu (3)</u> Sei $v \in V$. Dann gilt die Äquivalenz

$$v \in \varphi^{-1}(V_{k-1}) \Longleftrightarrow \varphi(v) \in V_{k-1} \Longleftrightarrow \varphi^{k-1}(\varphi(v)) = 0_V \Longleftrightarrow \varphi^{k}(v) = 0_V \Longleftrightarrow v \in V_k$$

$\square$

Die Struktur nilpotenter Endomorphismen (Forts.)

Satz (15.16)

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\psi \in \mathrm{End}_K(V)$ ein nilpotenter Endomorphismus vom Nilpotenzgrad p. Sei $V_k = \ker(\psi^k)$ für $0 \leq k \leq p$. Dann gibt es in V Untervektorräume

$$U_1, \ldots, U_p \quad \text{und} \quad W_1, \ldots, W_{p-1} \quad ,$$

so dass folgende Bedingungen erfüllt sind.

(i) Es gilt $\psi(U_k) \subseteq U_{k-1}$ für $2 \leq k \leq p$, und die Einschränkung $\psi|_{U_k}$ ist jeweils injektiv.

(ii) Es gilt $V_k = V_{k-1} \oplus U_k$ für $1 \leq k \leq p$ und $U_k = \psi(U_{k+1}) \oplus W_k$ für $1 \leq k \leq p-1$.

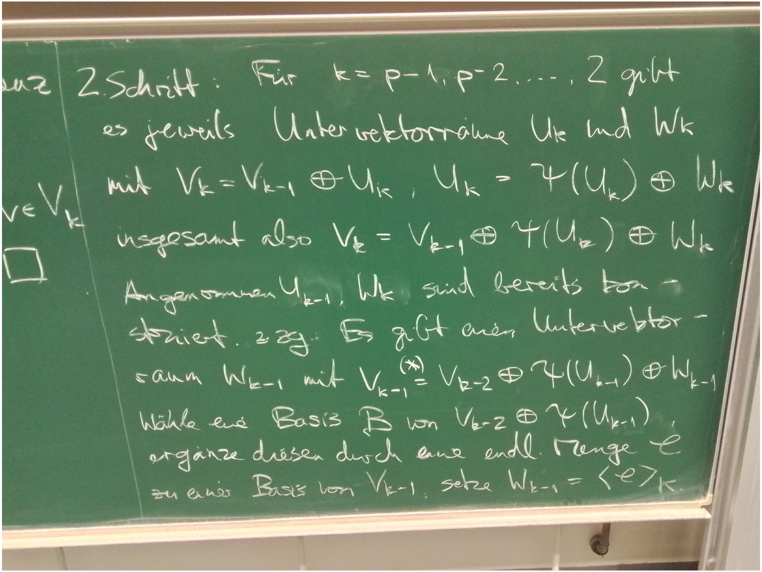
Beweis von Satz 15.16

geg. $\psi \in \mathrm{End}_K(V)$ nilpotent vom Nilpotenzgrad p, $V_k = \ker(\psi^k)$ $(0 \le k \le p)$

1. Schritt: Es existiert ein Untervektorraum U_p von V mit $V_p = V_{p-1} \oplus U_p$.

Wähle eine Basis $\mathcal{B}$ von V_{p-1}, ergänze diese durch eine endl. Menge $\mathcal{C} \subseteq V$ zu einer Basis von V_p, setze $U_p = \langle \mathcal{C} \rangle_K$. Dann gilt

$$V = V_p = V_{p-1} \oplus U_p.$$



Hinweis: Hier stimmen leider die Indizes nicht ganz. Auf der nächsten Seite finden Sie die korrigierte Fassung.

Korrektur

2. Schritt: Für $k = p-1, p-2, ..., 2$ gibt es jeweils Untervektorräume U_k und W_k mit $V_k = V_{k-1} \oplus U_k$ und $U_k = \psi(U_{k+1}) \oplus W_k$, insgesamt also

$$V_k = V_{k-1} \oplus \psi(U_{k+1}) \oplus W_k.$$

Angenommen, U_k und W_k sind bereits konstruiert.
zu zeigen: Es gibt einen Untervektorraum W_{k-1} mit

$$V_{k-1} \overset{(*)}{=} V_{k-2} \oplus \psi(U_k) \oplus W_{k-1}.$$

Wähle eine Basis $\mathcal{B}$ von $V_{k-2} \oplus \psi(U_k)$, ergänze diese durch eine endliche Menge $\mathcal{C}$ zu einer Basis von V_{k-1}, setze $W_{k-1} = \langle \mathcal{C} \rangle$.

Korrektur (Forts.)

Dann ist (*) erfüllt, sofern $V_{k-2} \cap \psi(U_k) = \{0_V\}$ gilt.
Sei $v \in V_{k-2} \cap \psi(U_k)$, z.zg. ist $v = 0_V$.

Wegen $v \in \psi(U_k)$ gilt $\psi(u) = v$ für ein $u \in U_k$. Aus $v \in V_{k-2}$ folgt $u \in \psi^{-1}(V_{k-2})$, was nach Lemma 15.11 (i) mit V_{k-1} übereinstimmt. Wegen $k \geq 1$ folgt $u \in V_1$, wegen $V_1 = \ker(\psi)$ also $v = \psi(u) = 0_V$.

Definiere nun noch $U_{k-1} = \psi(U_k) \oplus W_{k-1}$, dann sind beide Gleichungen erfüllt.

z –

$\dots U_p$

diese

Basis

gilt

Dann ist $(*)$ erfüllt, sofern $V_{k-2} \cap \varphi(U_{k-1}) = \{0_V\}$ gilt. Sei $v \in V_{k-2} \cap \varphi(U_{k-1})$.

z.zg.: $v = 0_V$. $v \in \varphi(U_{k-1}) \Rightarrow \exists\, u \in U_{k-1}$ mit $\varphi(u) = v$. $v \in V_{k-2} \Rightarrow u \in \varphi^{-1}(V_{k-2})$

$\xRightarrow[\text{Lemma 15.11 (ii)}]{} u \in V_{k-1}$ $\quad k \geq 2 \Rightarrow u \in \ker(\varphi)$

$\Rightarrow v = \varphi(u) = 0_V$.

Definiere nun noch $U_{k-2} = \varphi(U_{k-1}) \oplus W_{k-1}$.

Dann sind beide Gleichungen erfüllt.

noch zu überprüfen: $\varphi|_{U_k}$ injektiv für $2 \leq k \leq p$. Sei $v \in \ker(\varphi|_{U_k}) \Rightarrow$
$\varphi(v) = 0 \Rightarrow v \in V_1 \subseteq V_{k-1}$ (wg. $k \geq 2$)

Raum W_{k-1} mit $V_{k-1} \overset{(*)}{=} V_{k-2} \oplus \varphi(U_{k-1}) \oplus W_{k-1}$

andererseits $v \in U_k$, es gilt $V_k = V_{k-1} \oplus U_k$.

$V_{k-1} \cap U_k = \{0_V\} \Rightarrow v \in \{0_V\} \Rightarrow v = 0_V$. $\square$

Definition (15.17)

Sei V ein endlich-dim. K-Vektorraum und $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$.

(i) Wir bezeichnen ein Tupel $(w_1, ..., w_p)$ von Vektoren mit $p \in \mathbb{N}$ als Jordankette bezüglich ϕ, wenn $\phi(w_k) = w_{k-1}$ für $2 \le k \le p$ und $\phi(w_1) = 0_V$ gilt.

(ii) Eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V ist eine Jordanbasis bezüglich ϕ, wenn die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\phi)$ in Jordanscher Normalform vorliegt.

Jordanketten und die Jordansche Normalform

- Ist eine geordnete Basis $\mathcal{B} = (w_1, ..., w_p)$ von V zugleich eine Jordankette bezüglich ϕ, dann ist die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\phi)$ eine Jordanmatrix zum Eigenwert 0.
- Ist die geordnete Basis $\mathcal{B}$ aus mehreren Jordanketten zusammengesetzt, dann ist $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\phi)$ entsprechend eine Matrix in Jordanscher Normalform.