

Definition des Minimalpolynoms eines Endomorphismus

Proposition (15.2)

Sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum. Für jedes $\phi \in \text{End}_K(V)$ gibt es ein Polynom $0_K \neq f \in K[x]$ mit $f(\phi) = 0_{\text{End}_K(V)}$.

Definition (15.3)

Sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum und $\phi \in \text{End}_K(V)$. Ist $f \in K[x]$ ein normiertes Polynom minimalen Grades mit der Eigenschaft $f(\phi) = 0_{\text{End}_K(V)}$, so nennt man es ein **Minimalpolynom** von ϕ .

Satz (15.4)

Sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum. Für jedes $\phi \in \text{End}_K(V)$ gibt es **genau ein** Minimalpolynom, das wir mit μ_ϕ bezeichnen. Ist $f \in K[x]$ ein beliebiges Polynom mit $f(\phi) = 0_{\text{End}_K(V)}$, dann ist μ_ϕ ein **Teiler** von f .

Ebenso kann jeder Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ ein eindeutig bestimmtes Minimalpolynom $\mu_A \in K[x]$ zugeordnet werden.

Beweis von Satz 15.4:

geg. Vendl.-dim. K -Vektorraum, $\phi \in \text{End}_K(V)$

(i) zur Existenz des Minimalpolynoms:

Wähle unter allen Polynomen $g \in K[x]$ mit $g(\phi) = 0_{\text{End}_K(V)}$ eines $\neq 0$ mit minimalem Grad, bezeichne es mit f_0 .

Normiere dieses Polynom, d.h. ersetze f_0 durch $c^{-1}f_0$, wobei $c \in K^*$ den Leitkoeff. von f_0 bezeichnet.

Dann gilt weiterhin $f_0(\phi) = 0_{\text{End}_K(V)}$.

(ii) Ang. $f \in K[x]$ ist ein weiteres, normiertes Pol.

minimalen Grades mit $f(\phi) = 0_{\text{End}_K(V)}$. Ang. $f \neq f_0$.
 Betrachte $h = d(f - f_0)$, wobei $d \in K^*$ den Leitkoeff. von
 $f - f_0$ bezeichnet. Da f, f_0 beide normiert und vom selben
 Grad sind, gilt $\text{grad}(h) < \text{grad}(f_0)$, außerdem $h(\phi) =$
 $d^{-1}(f(\phi) - f_0(\phi)) = d^{-1}(0_{\text{End}_K(V)} - 0_{\text{End}_K(V)}) = 0_{\text{End}_K(V)}$
 $\hookrightarrow$ zur Minimalität des Grades von f_0

iii) zeige: $g \in K[x]$, $g(\phi) = 0_{\text{End}_K(V)} \Rightarrow f_0 \mid g$ (f_0 Teiler von g)

Sei g wiez. angeg. Division mit Rest $\Rightarrow \exists q, r \in K[x]$ mit
 $g = q f_0 + r$ mit $r = 0_K$ oder $r \neq 0_K$, $\text{grad}(r) < \text{grad}(f_0)$

1. Fall: $r = 0_K$ Dann ist $g = q f_0 \Rightarrow f_0 \mid g$

2. Fall: $r \neq 0_K$ Sei $d_1 \in K^*$ der Leitkoeff. von r , setze $r_0 = d_1^{-1} r$

$$\Rightarrow r_0(\phi) = d_1^{-1}(g(\phi) - q(\phi) \circ p_0(\phi)) =$$

$$d_1^{-1}(0_{\text{End}_K(V)} - q(\phi) \circ 0_{\text{End}_K(V)}) = 0_{\text{End}_K(V)}$$

Wegen $\text{grad}(r_0) < \text{grad}(f_0)$ steht dies erneut
in Widerspruch zur Minimalität von $\text{grad}(f_0)$.



Die Begleitmatrix eines Polynoms

Satz (15.5)

Für jedes normierte, nicht-konstante Polynom

$f = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \in K[x]$ bezeichnet man die Matrix

$A_f \in \mathcal{M}_{n,K}$ gegeben durch

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & -a_1 \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

als **Begleitmatrix** von f . Diese erfüllt die Beziehung $\chi_{A_f} = f$.

Das Minimalpolynom eines Vektors

Proposition (15.6)

Sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum. Für jedes $\phi \in \text{End}_K(V)$ und jeden Vektor $0_V \neq v \in V$ gibt es ein eindeutig bestimmtes, normiertes Polynom $\mu_{\phi,v}$ minimalen Grades mit

$$\mu_{\phi,v}(\phi)(v) = 0_V.$$

Wir nennen es das **Minimalpolynom** von ϕ bezüglich v . Jedes $f \in K[x]$ mit $f(\phi)(v) = 0_V$ ist ein Vielfaches von $\mu_{\phi,v}$.

unmittelbare Folgerung:

Für jeden Vektor $v \in V$ ist $\mu_{\phi,v}$ ein **Teiler** von μ_ϕ .

Der Satz von Cayley-Hamilton

Satz (15.7)

Sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum, $\phi \in \text{End}_K(V)$ und χ_ϕ sein charakteristisches Polynom. Dann gilt $\chi_\phi(\phi) = 0_{\text{End}_K(V)}$.

Folgerung (15.8)

Für alle $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ gilt $\chi_A(A) = 0_{\mathcal{M}_{n,K}}$.

Beweis von Satz 15.7.

geg: endl.-dim. K -Vektorraum V ,

$\phi \in \text{End}_K(V)$, z.zg: $\chi_\phi(\phi) = 0_{\text{End}_K(V)}$

1. Schritt: Es genügt zu überprüfen, dass
für jeden Vektor $v \in V \setminus \{0_v\}$ das Minimalpolynom $\mu_{\phi,v}$ ein Teiler von χ_ϕ ist.

genügt z.zg: $\chi_\phi(\phi)(v) = 0_v \quad \forall v \in V \setminus \{0_v\}$

Dies folgt für jedes solche v aus $\mu_{\phi,v} \mid \chi_\phi$,

denn: $\mu_{\phi,v} \mid \chi_\phi \Rightarrow \chi_\phi = g \mu_{\phi,v}$ für ein g
aus $K[x] \Rightarrow \chi_\phi(\phi)(v) = (g(\phi) \circ \mu_{\phi,v}(\phi))(v)$

$$= g(\phi)(M_{\phi, v}(\phi)(v)) = g(\phi)(0_v) = 0_v$$

2. Schritt: Konstruktion einer geeigneten Basis
 B des K -Vektorraums V

Sei $f = \mu_{\phi, v}$ und $n = \text{grad}(f)$. Definiere

$v_k = \phi^k(v)$ für $0 \leq k \leq n-1$. Beh.:

Das Tupel $A = (v_0, \dots, v_{n-1})$ ist linear unabh.

Ang., es gibt $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in K$, nicht alle null, mit

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k v_k = 0_v \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \phi^k(v) = 0_v. \text{ Definiere}$$

$$g = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k x^k \in K[x]. \text{ Dann gilt also } g(\phi)(v) = 0_v.$$

Ebenso gilt $g_0(\phi)(v) = 0_v$ für das Pol. g_0 , dass

Korrektur erste Zeile: „... man durch Normierung von g erhält.“

man durch Normierung von f erhält. Wegen $\text{grad}(g_0) \leq n-1$ steht dies im Widerspruch zur Minimalität von $\text{grad}(f) = \text{grad}(\mu_{\phi, v})$.

Ergänze A durch Vektoren $w_1, \dots, w_r \in V$ zu einer geordneten Basis von V . ($\Rightarrow n+r = \dim V$)

3. Schritt: Bestimmung von $M_B(\phi)$

Sei $U = \langle A \rangle_K = \langle v_0, v_1, \dots, v_{n-1} \rangle_K$

Beh. $\phi(U) \subseteq U$ genügt: $\phi(v_k) \in U$ für $0 \leq k \leq n-1$

1. Fall: $k \leq n-2$ $\phi(v_k) = \phi(\phi^k(v)) = \phi^{k+1}(v)$

$= v_{k+1} \Rightarrow \phi(v_k) \in U$

2. Fall: $f(\phi)(v) = 0$ Schreibe $f = x^n +$

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \Rightarrow \phi^n(v) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \phi^k(v) = 0_v$$

$$\begin{aligned} \phi(v_{n-1}) &= \phi(\phi^{n-1}(v)) = \phi^n(v) = - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \phi^k(v) \\ &= - \sum_{k=0}^{n-1} a_k v_k \Rightarrow \phi(v_{n-1}) \in U \quad (\Rightarrow \text{Beh.}) \end{aligned}$$

Bestimme nun zunächst $M_A(\phi|U)$.

Für $0 \leq k \leq n-2$ gilt $\phi(v_k) = v_{k+1}$

$\Rightarrow$ Die $(k+1)$ -te Spalte von $M_A(\phi|U)$ ist

das k -te Einheitsvektor. außerdem,

$$\phi(v_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} (-a_k) v_k \Rightarrow \text{Die } n\text{-te Spalte}$$

von $M_A(\phi|u)$ ist $\begin{pmatrix} -a_0 \\ \vdots \\ -a_{n-1} \end{pmatrix}$ usg. $M_A(\phi|u) = A_p!$

Damit hat $M_B(\phi)$ die Form $\begin{pmatrix} A_p & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ mit $B \in M_{n+r, r}$

und $C \in M_{r, r}$. Formel für die Determinante von Block-

matrizen liefert $\chi_\phi(\phi) = \chi_{M_B(\phi)} = \det(x \cdot E_{n+r} - M_B(\phi))$

$$= \det \begin{pmatrix} x E_n - A_p & 0 \\ 0 & x E_r - C \end{pmatrix} = \det(x E_n - A_p) \cdot \det(x E_r - C)$$

$$= \chi_{A_p} \cdot \chi_C = p \cdot \chi_C \Rightarrow p = \mu_{\phi, r} \text{ ist Teil von } \chi_\phi(\phi).$$

□

Beweis von Folgerung 15.8:

Sei $A \in M_{n,K}$, z.z.g. $\chi_A(A) = 0_{M_{n,K}}$

Wende Satz 15.7 auf $\phi = \phi_A \in \text{End}_K(K^n)$ an.

$$\Rightarrow \chi_{\phi_A}(\phi_A) = 0_{\text{End}_K(K^n)} \Rightarrow M_E(\chi_{\phi_A}(\phi_A)) = M_E(0_{\text{End}_K(K^n)})$$

$$\Rightarrow \chi_{\phi_A}(M_E(\phi_A)) = 0_{M_{n,K}} \quad \text{Nach Def gilt } \chi_{\phi_A} = \chi_A$$

$$\text{und } M_E(\phi_A) = A \Rightarrow \text{Beh.} \quad \square$$

Eigenwerte als Nullstellen des Minimalpolynoms

Proposition (15.9)

Für jeden endlich-dimensionalen K -Vektorraum V und jedes $\phi \in \text{End}_K(V)$ sind die Nullstellen von μ_ϕ genau die Eigenwerte von ϕ .

Beweis von Prop. 15.9.

geg: endl-dim. K -Vektorraum V , $\phi \in \text{End}_K(V)$, $\lambda \in K$

Beh: λ ist Eigenwert von $\phi \iff \lambda$ ist Nullstelle von μ_ϕ

" $\implies$ " Sei $v \in V \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ .

$\implies \phi(v) = \lambda v$. Betrachte $g = x - \lambda \in K[x]$.

$$g(\phi)(v) = (\phi - \lambda \text{id}_V)(v) = \phi(v) - \lambda v = 0v.$$

$\implies g$ ist Vielfaches von $\mu_{\phi, v}$ $\stackrel{\text{grad } g = 1}{\implies} \mu_{\phi, v} = g$

$$= x - \lambda \quad \mu_{\phi, v} \mid \mu_\phi \text{ (s.o.)} \implies (x - \lambda) \mid \mu_\phi$$

$\implies \lambda$ ist Nullstelle von μ_ϕ .

$\Rightarrow \lambda$ ist Nullstelle von μ_ϕ .

" $\Leftarrow$ " Vor: λ ist Nullst. von $\mu_\phi \Rightarrow (x - \lambda) \mid \mu_\phi$

$\Rightarrow \exists g \in K[x]$ mit $\mu_\phi = (x - \lambda)g$ Beh: $\exists v \in V \setminus \{0_v\}$

mit $\phi(g)(v) \neq 0_v$ sonst: $g(\phi)(v) = 0_v \forall v \in V$

$\Rightarrow g(\phi) = 0_{\text{End}_K(V)}$ $\nmid$ zur Minimalität von $\text{grad}(\mu_\phi)$

Sei $w = g(\phi)(v)$. $(\phi - \lambda \text{id}_V)(w) = (\phi - \lambda \text{id}_V)(g(\phi)(v))$

$((\phi - \lambda \text{id}_V) \circ g(\phi))(v) = \mu_\phi(\phi)(v) = 0_{\text{End}_K(V)}(v) = 0_v$

$\Rightarrow \phi(w) - \lambda w = 0_v \Rightarrow \phi(w) = \lambda w \Rightarrow w$ ist Eigen-

vektor zum Eigenwert λ . $\square$

Definition (15.10)

Eine Matrix $J \in \mathcal{M}_{n,K}$ heißt **Jordanmatrix** zum Eigenwert $\lambda \in K$, wenn sie die Form

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{besitzt.}$$

Beispiele für Jordanmatrizen

- Jordanmatrix der Größe 1 $\begin{pmatrix} \lambda \end{pmatrix}$

- Jordanmatrix der Größe 2

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

- Jordanmatrix der Größe 3

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

- Jordanmatrix der Größe 4

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Definition

Eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ befindet sich in **Jordanscher Normalform**, wenn sie als Blockmatrix in der Form

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{pmatrix}$$

mit Jordanmatrizen $J_1, \dots, J_r$ schreiben lässt. Man bezeichnet diese als **Jordanblöcke** der Matrix A .

Beispiel für eine Matrix in Jordanscher Normalform

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(Die Jordanblöcke sind farbig hervorgehoben.)

Proposition (15.11)

Sei V ein n -dimensionaler K -Vektorraum, $\psi \in \text{End}_K(V)$ und $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis mit der Eigenschaft, dass $J = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\psi)$ eine Jordanmatrix zum Eigenwert $\lambda \in K$ ist. Dann gilt

- (i) Der einzige Eigenwert von ψ ist λ . Die algebraische und die geometrische Vielfachheit dieses Eigenwerts sind durch $\mu_a(\psi, \lambda) = n$ und $\mu_g(\psi, \lambda) = 1$ gegeben.
- (ii) Es gilt $\mu_\psi = \chi_\psi = (x - \lambda)^n$.