Überblick Vorlesungsthemen

Teil I - Lineare Algebra

- Jordansche Normalform
- allgemeine Bilinearformen, Hurwitz-Kriterium
- orthogonale und selbstadjungierte Endomorphismen

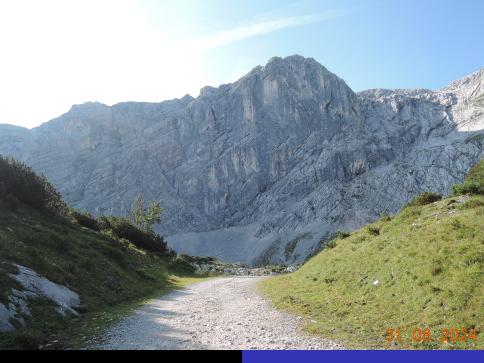
Teil II - Mehrdimensionale Differenzialrechnung

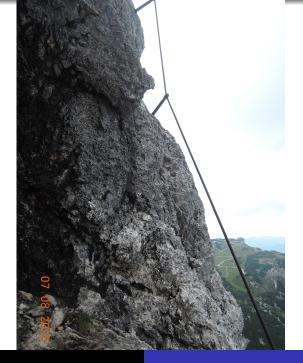
- lokale Umkehrbarkeit und implizit definierte Funktionen
- höhere Ableitungen, Taylor-Polynome und lokale Extrema
- lokale Extrema unter Nebenbedingungen

Überblick Vorlesungsthemen (Forts.)

Teil III - Maß- und Integrationstheorie

- Inhalte, Prämaße und Maße
- integrierbare Funktionen und Integralbegriff
- Konvergenzsätze und parameterabhängige Integrale
- Produktmaße, Cavalierisches Prinzip und Satz von Fubini-Tonelli
- Bildmaße und Transformationsformel















Wideholung Diagonalisielsarbeit Sei ne IN, Kein Körpes, Ven n-dim. K-Vektorrann 11) A & Mr. & diagonalisielos - A dulch zu eines Diagonal matrix => 7 TE GLn (K) und Annale K mit TAT-1= (2) Doler sind Day. In the Eigenweste won A (dh es gold vo. ... VneKiloral not Av; = 7 jus for 15 j Sn. (ii) DE Endr (V) diagonalisisher = Es gebt

ene beliefige geordnete Basis Bion Vist

Evinnering: Die Eigenwerte von A bes & sud genan die Millstellen von /A tow Xo De 11) algebraische Vielfachheit emis Eigenwert= JEK con A = Vielfachtest ion I al Millstelle ion XA =: Ma (A. 7) (ii) geometrische Vielfachheit aus Eigenerals I wan A = dim Eig (A, 1) wobei Eg(A, A) = hvek" | Av= Av]

Francisq: Fir Joden Eigenwert) grilt $\Lambda \leq M_{\mathfrak{F}}(A, \lambda) \leq M_{\mathfrak{F}}(A, \lambda)$ Diagonalise barkeitskriterum: Ene Matrix A & Mn, K ist genow dany den Bodingungen offillet sind 11) XA kann in K/2] als Frodult wom Linear faktoren dargestellt werden Jeden Eigenwert 2 Ion A

Beispiele fin midit-diagonalisiellare XA = x2+1 refall in R/x7 mint $\begin{array}{ccc} \text{(ii)} & \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & \text{Ma}(\mathbb{B}, 2) = 1 \\ \text{Ma}(\mathbb{B}, 2) = 2 \end{array}$

Einsetzen von Matrizen in Polynome

Sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und $A \in \mathcal{M}_{n,K}$. Dann können wir jedem Polynom $f \in K[x]$ der Form $f = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ eine Matrix zuordnen, und zwar durch

$$f(A) = a_n A^n + ... + a_1 A + a_0 E^{(n)}.$$

In der Algebra-Vorlesung wird gezeigt, dass durch die Zuordnung $K[x] \to \mathcal{M}_{n,K}, \ f \mapsto f(A)$ ein Ringhomomorphismus gegeben ist, den wir dort als Einsetzungshomomorphismus bezeichnen. Auf Grund der Homomorphismus-Eigenschaft gilt

$$(f+g)(A) = f(A) + g(A)$$
 und $(fg)(A) = f(A) \circ g(A)$

für alle $f, g \in K[x]$.

esses diel Sato von Cayley-Hamilton Fir jed Matrix A & Mr. K gill XA(A) = Omis Einselsen einer Matrix in am Polynon P = 2 axx = axx + ... + ax + a0 > f(A) = an A" + ... + a, A + ao En (Ex= A°) B=p: A = (12) XA = det (x-1-2) =

$$= x^{2} - 5x - 2$$

$$A^{2} = {\binom{1}{3}} {\binom{1}{3}} {\binom{1}{3}} {\binom{1}{4}} = {\binom{7}{10}} {\binom{10}{15}} {\binom{10}{22}} {\binom{10}{15}} {\binom{10}{20}} {\binom{10}{15}} {\binom{10}{20}} {\binom{10}{2$$

Einsetzen von Endomorphismen in Polynome

Ist V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\phi \in \operatorname{End}_K(V)$, dann können wir ebenso jedem Polynom $f \in K[x]$ der oben angebenen Form einen neuen Endomorphismus

$$f(\phi) = a_n \cdot \phi^n + ... + a_1 \cdot \phi + a_0 \cdot id_V$$

aus $\operatorname{End}_{\mathcal K}(V)$ zuordnen. Hier gilt entsprechend

$$(f+g)(\phi) = f(\phi) + g(\phi)$$
 und $(fg)(\phi) = f(\phi) \circ g(\phi)$

für alle $f, g \in K[x]$.

Verträglichkeit von M_B und L_B mit Einsetzungen

Sei $n \in \mathbb{N}$, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und \mathcal{B} eine geordnete Basis von V. Dann gilt für alle $A, B \in \mathcal{M}_{n,K}$ jeweils

$$\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(A) \circ \mathcal{L}_{\mathcal{B}}(B) = \mathcal{L}_{\mathcal{B}}(AB).$$

Lemma (15.1)

Sei $f \in K[x]$ ein beliebiges Polynom.

- (i) Für alle $\phi \in \operatorname{End}_{\mathcal{K}}(V)$ gilt $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f(\phi)) = f(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\phi))$.
- (ii) Für alle $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ gilt $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(f(A)) = f(\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(A))$.

gog: V endl-den K-VR, & End K(V) B geordiere Basis von V fe K[x] 2 zq MB(f(p)) = f(MB(p)) $\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\beta(\phi)) = \alpha_{\mathcal{M}} \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\phi) + \dots + \alpha_{\mathcal{M}} \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\phi) + \dots$ a. MB (dr) = an MB (b)"+ -- + a, MB (b) + a. En $= f(M_{\mathcal{B}}(\phi))$

Definition des Minimalpolynoms eines Endomorphismus

Proposition (15.2)

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Für jedes $\phi \in \operatorname{End}_K(V)$ gibt es ein Polynom $0_K \neq f \in K[x]$ mit $f(\phi) = 0_{\operatorname{End}_K(V)}$.

Bevers on Prop. 15.2 geg: n-dum K-Veletorraum V & Endy (V) Beh: 7 f = K(x) 1 (0x7 ml f(p) = 0 Endx (V) bekannt · dim Endre (V) = n2 , miss est die Dem => 7 m = NV, so dass das Tapel (\$°, \$', \$2 , 4") linear alrhanging ist = 7 as ... an EK, micht alle gloud Ox, mt = ax p" = O Endre (V)

