

Teil I - Lineare Algebra

- Jordansche Normalform
- allgemeine Bilinearformen, Hurwitz-Kriterium
- orthogonale und selbstadjungierte Endomorphismen

Teil II - Mehrdimensionale Differenzialrechnung

- lokale Umkehrbarkeit und implizit definierte Funktionen
- höhere Ableitungen, Taylor-Polynome und lokale Extrema
- lokale Extrema unter Nebenbedingungen

Teil III - Maß- und Integrationstheorie

- Inhalte, Prämaße und Maße
- integrierbare Funktionen und Integralbegriff
- Konvergenzsätze und parameterabhängige Integrale
- Produktmaße, Cavalierisches Prinzip und Satz von Fubini-Tonelli
- Bildmaße und Transformationsformel



31.08.2024



07.08.2025



07.08.2025



07.08.2025





11.10.2025



Wiederholung Diagonalisierbarkeit

Sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper, V ein n -dim.
 K -Vektorraum.

i) $A \in M_{n,K}$ diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ A ähnlich zu
einer Diagonalmatrix $\Leftrightarrow \exists T \in GL_n(K)$ und
 $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit $TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Daher sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A (d.h.
 $\Rightarrow$ gibt $v_1, \dots, v_n \in K^n \setminus \{0_K\}$ mit $Av_j = \lambda_j v_j$ für $1 \leq j \leq n$).

ii) $\phi \in \text{End}_K(V)$ diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ Es gibt

eine geordnete Basis B von V , so dass $M_B(\phi)$ eine Diagonalmatrix ist. (Dies ist genau dann der Fall, wenn $M_{B'}(\phi)$ für jede geordnete Basis B' von V diagonalisierbar ist.)

Def. ii) char. Pol. einer Matrix $A \in M_{n,K}$

$$\chi_A = \det(xE_n - A) \in K[x]$$

iii) char. Pol. von $\phi \in \text{End}_K(V)$: $\chi_\phi = \chi_A$, wobei $A \in M_{n,K}$ gleich der Darstellungsmatrix $M_B(\phi)$ für eine beliebige geordnete Basis B von V ist

Erinnerung: Die Eigenwerte von A
bzw. ϕ sind genau die Nullstellen von χ_A
bzw. χ_ϕ .

Def. (i) algebraische Vielfachheit eines
Eigenwerts $\lambda \in K$ von A = Vielfach-
heit von λ als Nullstelle von χ_A
= : $\mu_a(A, \lambda)$

(ii) geometrische Vielfachheit eines Ei-
genwerts λ von A = $\dim \operatorname{Eig}(A, \lambda)$
wobei $\operatorname{Eig}(A, \lambda) = \{v \in K^n \mid Av = \lambda v\}$

Erinnerung: Für jeden Eigenwert λ gilt

$$1 \leq m_g(A, \lambda) \leq m_a(A, \lambda).$$

Diagonalisierbarkeitskriterium:

Eine Matrix $A \in M_{n,K}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(i) χ_A kann in $K[x]$ als Produkt von Linearfaktoren dargestellt werden

(ii) $m_g(A, \lambda) = m_a(A, \lambda)$ für jeden Eigenwert λ von A

Beispiele für nicht-diagonalisierbare
Matrizen:

$$(i) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2, \mathbb{R}}$$

$\chi_A = x^2 + 1$ zerfällt in $\mathbb{R}[x]$ nicht

$$(ii) \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \mu_g(B, \mathbb{C}) &= 1 \\ \mu_a(B, \mathbb{C}) &= 2 \end{aligned}$$

Einsetzen von Matrizen in Polynome

Sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und $A \in \mathcal{M}_{n,K}$. Dann können wir jedem Polynom $f \in K[x]$ der Form $f = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ eine Matrix zuordnen, und zwar durch

$$f(A) = a_n A^n + \dots + a_1 A + a_0 E^{(n)}.$$

In der Algebra-Vorlesung wird gezeigt, dass durch die Zuordnung $K[x] \rightarrow \mathcal{M}_{n,K}$, $f \mapsto f(A)$ ein Ringhomomorphismus gegeben ist, den wir dort als **Einsetzungshomomorphismus** bezeichnen. Auf Grund der Homomorphismus-Eigenschaft gilt

$$(f + g)(A) = f(A) + g(A) \quad \text{und} \quad (fg)(A) = f(A) \circ g(A)$$

für alle $f, g \in K[x]$.

erstes Ziel: Satz von Cayley-Hamilton

Für jede Matrix $A \in M_{n,K}$ gilt $\chi_A(A) = 0_{M_{n,K}}$

Einsetzen einer Matrix in ein Polynom

$$p = \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

$$\Rightarrow p(A) = a_n A^n + \dots + a_1 A + a_0 E_n \quad (E_n = A^0)$$

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\chi_A = \det \begin{pmatrix} x-1 & -2 \\ -3 & x-4 \end{pmatrix} =$
 $(x-1)(x-4) - (-3)(-2) = x^2 - 5x + 4 - 6$

$$= x^2 - 5x - 2$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \chi_A(A) &= A^2 - 5A - 2E_2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Einsetzen von Endomorphismen in Polynome

Ist V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum und $\phi \in \text{End}_K(V)$, dann können wir ebenso jedem Polynom $f \in K[x]$ der oben angegebenen Form einen neuen Endomorphismus

$$f(\phi) = a_n \cdot \phi^n + \dots + a_1 \cdot \phi + a_0 \cdot \text{id}_V$$

aus $\text{End}_K(V)$ zuordnen. Hier gilt entsprechend

$$(f + g)(\phi) = f(\phi) + g(\phi) \quad \text{und} \quad (fg)(\phi) = f(\phi) \circ g(\phi)$$

für alle $f, g \in K[x]$.

Verträglichkeit von M_B und L_B mit Einsetzungen

Sei $n \in \mathbb{N}$, V ein n -dimensionaler K -Vektorraum und B eine geordnete Basis von V . Dann gilt für alle $A, B \in \mathcal{M}_{n,K}$ jeweils

$$\mathcal{L}_B(A) \circ \mathcal{L}_B(B) = \mathcal{L}_B(AB).$$

Lemma (15.1)

Sei $f \in K[x]$ ein beliebiges Polynom.

- (i) Für alle $\phi \in \text{End}_K(V)$ gilt $\mathcal{M}_B(f(\phi)) = f(\mathcal{M}_B(\phi))$.
- (ii) Für alle $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ gilt $\mathcal{L}_B(f(A)) = f(\mathcal{L}_B(A))$.

Beweis von Lemma 15.1, nur (i)

geg: V endl.-dim. K -VR, $\phi \in \text{End}_K(V)$,

B geordnete Basis von V , $f \in K[x]$

$$\text{z.z. } M_B(f(\phi)) = f(M_B(\phi))$$

$$\text{Schreibe } f = \sum_{k=0}^n a_k x^k \Rightarrow f(\phi) = a_n \phi^n + \dots + a_0 \text{id}_V$$

$$\Rightarrow M_B(f(\phi)) = a_n M_B(\phi^n) + \dots + a_1 M_B(\phi) +$$

$$a_0 M_B(\text{id}_V) = a_n M_B(\phi)^n + \dots + a_1 M_B(\phi) + a_0 E_n$$

$$= f(M_B(\phi))$$

□

Definition des Minimalpolynoms eines Endomorphismus

Proposition (15.2)

Sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum. Für jedes $\phi \in \text{End}_K(V)$ gibt es ein Polynom $0_K \neq f \in K[x]$ mit $f(\phi) = 0_{\text{End}_K(V)}$.

Beweis von Prop. 15.2

geg: n -dim. K -Vektorraum V , $\phi \in \text{End}_K(V)$

Beh: $\exists f \in K[x] \setminus \{0_K\}$ mit $f(\phi) = 0_{\text{End}_K(V)}$

bekannt: dim $\text{End}_K(V) = n^2$, wobei $\text{End}_K(V)$ ist die Dim
endlich

$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}$, so dass das Tupel $(\phi^0, \phi^1, \phi^2, \dots, \phi^m)$

linear abhängig ist $\Rightarrow \exists a_0, \dots, a_m \in K$, nicht
alle gleich 0_K , mit $\sum_{k=0}^m a_k \phi^k = 0_{\text{End}_K(V)}$

$k=0$

Setze $f = \sum_{k=0}^m a_k x^k \in K[x] \Rightarrow f(\phi) = 0_{\text{End}_K(V)}$ □