Ralf Gerkmann

Mathematisches Institut
Ludwig-Maximilians-Universität München

Vorlesungsskript

Maß- und Integrationstheorie

Zusammenfassung

Bereits im ersten Semester haben wir das Riemann-Integral für beschränkte Funktionen einer Variablen, definiert auf einem endlichen, abgeschlossenen Intervall, kennengelernt. Das Ziel dieses Vorlesungsabschnitts besteht nun darin, den Integralbegriff auf Funktionen mehrerer Variablen zu verallgemeinern. Das Riemann-Integral kann auf naheliegende Weise auf höhere Dimensionen übertragen werden, allerdings erweist sich dieses Konzept für moderne Anwendungen als nicht flexibel genug. Beispielsweise hat man es häufig mit Funktionen auf unendlich ausgedehnten Definitionsbereichen zu tun, und oft ist auch der Wertebereich der Funktionen unbeschränkt.

Um einen möglichst vielseitig einsetzbaren Zugang zum Integralbegriff zu erhalten, entwickelt man zunächst eine Theorie der *Maße*, mit denen man Teilmengen einer gewissen Grundmenge, in der Regel des $\mathbb{R}^n$, ein „Volumen" zuordnen kann. Das am häufigsten verwendete Maßauf dem $\mathbb{R}^n$ ist das *Lebesgue-Maß*, mit dessen Konstruktion wir uns als erstes beschäftigen werden. Basierend auf dem Maßbegriff kann man anschließend gewissen reellwertigen Funktionen auf der Grundmenge ein Integral zuordnen. Im Fall des Lebesgue-Maßes erhält man das sogenannte *Lebesgue-Integral*, das eine Verallgemeinerung des Riemann-Integrals darstellt. Nachdem wir die wichtigsten grundlegenden Eigenschaften und elementare Rechenregeln für Integrale hergeleitet haben, befassen wir uns noch mit einigen fortgeschrittenen Integrationstechniken. Mit dem *Satz von Fubini* kann beispielsweise die Integration von Funktionen in hoher Dimension auf kleinere Dimension zurückgeführt werden, und die *Transformationsformel* stellt eine weitreichende Verallgemeinerung der eindimensionalen Substitutionsregel dar. Im einzelnen behandeln wir die folgenden Themen:

- Inhalte und Maße, Konstruktion des Lebesgue-Maßes
- messbare und integrierbare Funktionen
- Konvergenzsätze
- Produktmaße und Satz von Fubini
- Bildmaße und die Transformationsformel

Inhaltsverzeichnis

§ 1. *Die Unlösbarkeit des Maßproblems* 3

§ 2. *Der Jordansche Inhalt* 7

§ 3. *σ-Algebren und Maße* 18

§ 4. *Eindeutigkeit der Fortsetzung und Vollständigkeit* 27

§ 5. *Messbare Funktionen* 36

§ 6. *Integrierbare Funktionen* 43

§ 7. *Konvergenzsätze der Integrationstheorie* 57

§ 8. *Produktmaße und Satz von Fubini* 66

§ 9. *Bildmaße und die Transformationsformel* 78

§ 1. *Die Unlösbarkeit des Maßproblems*

Im gesamten Text bezeichnet $\mathbb{R}$ die Menge der reellen, $\mathbb{R}^+$ die Menge der positiven und $\mathbb{R}_+$ die Menge der nicht-negativen reellen Zahlen. Ist X eine beliebige Menge, dann bezeichnet $\mathfrak{P}(X)$ ihre Potenzmenge, also die Menge aller Teilmengen $A \subseteq X$.

Ein wichtiges Ziel der Maßtheorie besteht darin, auf einer möglichst großen Klasse $\mathcal{K}$ von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ eine Abbildung $\mu : \mathcal{K} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ zu definieren, so dass für jedes $A \in \mathcal{K}$ die Zahl $\mu(A)$ dem entspricht, was wir intuitiv unter dem „Volumen" von A verstehen würden. Bevor wir uns überlegen, welche Eigenschaften eine solche Abbildung haben sollte, erinnern wir zunächst an die folgende Definition.

Definition 1.1 Eine Abbildung $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ wird ***Bewegung*** genannt, wenn eine orthogonale Matrix $A \in \mathrm{O}(n)$ und ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ existieren, so dass $\psi(x) = v + Ax$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Die Bewegungen der Form $\tau_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto v + x$ bezeichnet man als ***Translationen***. Weitere Beispiele für Bewegungen sind Spiegelungen an Hyperebenen oder Rotationen um beliebige $(n-2)$-dimensionale Drehachsen. Man kann zeigen, dass die Bewegungen genau die Abbildungen $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft $\|\psi(x) - \psi(y)\|_2 = \|x - y\|_2$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ sind, wobei $\|\cdot\|_2$ die gewöhnliche euklidische Norm bezeichnet. Man spricht deshalb auch von abstands-erhaltenden Abbildungen. Sei Teilmengen $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ werden ***kongruent*** genannt, und man schreibt $X \cong Y$, wenn eine Bewegung ψ des $\mathbb{R}^n$ mit $\psi(X) = Y$ existiert.

Folgende Eigenschaften würde man nun für eine „vernünftige" Volumenfunktion μ naheliegenderweise voraussetzen. Sind A, B Elemente des Definitionsbereichs $\mathcal{K}$ von μ, dann sollte dies auch für $A \cup B$, $A \cap B$ und $A \setminus B$ gelten. Weitere natürliche Bedingungen an μ lauten

(i) $\mu(\varnothing) = 0$ und $\mu(\mathbb{R}^n) = +\infty$ (falls $\mathbb{R}^n$ in $\mathcal{K}$ liegt)

(ii) *(Normierungsbedingung)*
Die n-dimensionalen abgeschlossenen Quader der Form $[a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$ mit $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ und $a_i \le b_i$ sind in $\mathcal{K}$ enthalten, und es gilt $\mu(Q) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$.

(iii) *(Bewegungsinvarianz)*
Ist $A \in \mathcal{K}$ und $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Bewegung, dann liegt $\psi(A)$ in $\mathcal{K}$,
und es gilt $\mu(\psi(A)) = \mu(A)$.

(iv) *(endliche Additivität)*
Sind $A, B \in \mathcal{K}$ disjunkt (also $A \cap B = \varnothing$), dann gilt $A \cup B \in \mathcal{K}$ und $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Bereits aus (i) und (iv) lassen sich weitere, „intuitiv naheliegende" Eigenschaften einer solchen Funktion μ herleiten.

Lemma 1.2 Seien $r \in \mathbb{N}_0$ und $A, B, A_1, ..., A_r$ Elemente aus $\mathcal{K}$, auf denen die Funktion μ endliche Werte annimmt.

(i) Unter der Voraussetzung $A \subseteq B$ gilt $\mu(A) \leq \mu(B)$.

(ii) Es ist $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.

(iii) Sind die Mengen $A_1, ..., A_r \in \mathcal{K}$ paarweise disjunkt, dann gilt

$$\bigcup_{k=1}^{r} A_k \in \mathcal{K} \qquad \text{und} \qquad \mu\left(\bigcup_{k=1}^{r} A_k\right) = \sum_{k=1}^{r} \mu(A_k).$$

(Dabei bedeutet $r = 0$, dass die Vereinigung $\bigcup_{k=1}^{r} A_k$ leer ist. Die Summe auf der rechten Seiten ist dann gleich Null.)

Beweis: zu (i) Die Menge B kann disjunkt in die Teilmengen A und $B \setminus A$ zerlegt werden, also gilt $\mu(A) \leq \mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu(B)$.

zu (ii) Die Menge $A \cup B$ besitzt eine disjunkte Zerlegung in die Teilmengen $A \setminus B$, $B \setminus A$ und $A \cap B$. Durch wiederholte Anwendung der endlichen Additivität erhalten wir

$$\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) =$$

$$\mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) - \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

zu (iii) Auf Grund der Voraussetzung $\mu(\varnothing) = 0$ ist die Gleichung in den Fällen $r = 0, 1$ offensichtlich, und auf Grund der endlichen Additivität gilt sie auch für $r = 2$. Sei nun $r > 2$ und die Gleichung für alle kleineren Zahlen bereits bewiesen. Seien $A_1, ..., A_r \in \mathcal{K}$ paarweise disjunkte Mengen. Setzen wir $B = A_1 \cup ... \cup A_{r-1}$, dann gilt $\mu(B) = \sum_{k=1}^{r-1} \mu(A_k)$ nach Induktionsvoraussetzung. Weil B und A_r disjunkt sind, erhalten wir weiter

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{r} A_k\right) = \mu(B \cup A_r) = \mu(B) + \mu(A_r) = \sum_{k=1}^{r-1} \mu(A_k) + \mu(A_r) = \sum_{k=1}^{r} \mu(A_k). \qquad \square$$

Die Eigenschaft (i) aus dem Lemma, die häufig als ***Monotonie*** bezeichnet wird, ist für Volumenberechnungen interessant. Bereits durch die Beschäftigung mit dem Riemann-Integral ist deutlich geworden, dass sich das Volumen vieler elementar-geometrischer Objekte (wie Kugeln, Pyramiden, Kegel, Zylinder) approximieren lässt, wenn man diese durch hinreichend kleine rechteckige Quader ausschöpft bzw. einschließt. Genauer bedeutet dies, dass man für jedes solche geometrische Objekt O endliche Vereinigungen A, B von „kleinen" Quadern bilden kann, so dass $A \subseteq O \subseteq B$ und $\mu(A) \approx \mu(B)$ gilt. Auf Grund der Monotonie muss dann auch $\mu(O)$ ungefähr gleich $\mu(A)$ sein. Dies zeigt, dass eine Volumenfunktion μ mit den Eigenschaften (i) bis (iv) unserer anschaulichen Vorstellung von einem Volumen wirklich sehr nahe kommt. Aus Gründen, die hauptsächlich auf Anwendungen in der Analysis zurückgehen, und die erst im weiteren Verlauf der Vorlesung klar werden, verschärft man die Bedingung (iv) häufig zu

(iv)' Ist $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare Folge von paarweise disjunkten Elementen aus $\mathcal{K}$, dann gilt

$$\bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m \in \mathcal{K} \qquad \text{und} \qquad \mu\left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_m).$$

Man spricht in diesem Fall von *abzählbarer Additivität* oder *σ-Additivität*. Diese Eigenschaft impliziert die endliche Additivität, denn sind $A_1, ..., A_r$ endlich viele, paarweise disjunkte Mengen aus $\mathcal{K}$, dann können wir $A_m = \emptyset$ für $m > r$ setzen und erhalten wegen $\mu(\emptyset) = 0$ die Gleichung unter (iv) zurück.

Unsere Hauptaufgabe in diesem Kapitel wird darin bestehen, eine Abbildung μ mit den Eigenschaften (i), (ii), (iii) und (iv)' auf einer möglichst großen Menge $\mathcal{K}$ zu konstruieren. Ideal wäre es natürlich, wenn man $\mathcal{K} = \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ setzen, also *jeder* Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ein Volumen zuordnen könnte. Das Problem, eine solche Zuordnung zu bestimmen, wird als *Maßproblem* bezeichnet. Seit langem ist jedoch bekannt, dass diese Problem nicht lösbar ist.

Satz 1.3 *(Guiseppe Vitali, 1905)*

Für keine natürliche Zahl n existiert eine Abbildung $\mu : \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ mit den Eigenschaften (i), (ii), (iii) und (iv)'.

Beweis: Wir definieren auf $\mathbb{R}^n$ eine Relation $\sim$ durch $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}^n$. Man überprüft unmittelbar, dass es sich dabei um eine Äquivalenzrelation handelt. Jede Äquivalenzklasse besitzt einen Repräsentanten innerhalb des Einheitswürfels $[0,1]^n$, da für jedes $s \in \mathbb{R}^n$ sogar ein $r \in \mathbb{Z}^n$ mit $0 \le s_i - r_i < 1$ für $1 \le i \le n$ existiert. Auf Grund des Auswahlaxioms der Mengenlehre kann also innerhalb von $[0,1]^n$ ein Repräsentantensystem der Äquivalenzklassen von $\sim$ gewählt werden, also eine Teilmenge $A \subseteq [0,1]^n$ mit der Eigenschaft, dass jedes für jedes $s \in \mathbb{R}^n$ ein *eindeutig bestimmtes* $a \in A$ mit $s \sim a$ existiert.

Sei nun $B = [-1,1]^n \cap \mathbb{Q}^n$ und $C = \bigcup_{r \in B}(r + A)$. Bei C handelt es sich um eine *disjunkte*, *abzählbare* Vereinigung von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Die Abzählbarkeit ist klar, da B als Teilmenge der abzählbaren Menge $\mathbb{Q}^n$ abzählbar ist. Seien nun $r, r' \in B$ so gewählt, dass $r + A$ und $r' + A$ nicht disjunkt sind. Dann gibt es Elemente $a, a' \in A$ mit $r + a = r' + a'$. Nach Definition unserer Äquivalenzrelation folgt $a \sim a'$ und damit $a = a'$, weil A ein Repräsentantensystem der Relation ist. Dies wiederum bedeutet $r = r'$, also ist die Vereinigung tatsächlich disjunkt.

Nun beweisen wir die Inklusionen $[0,1]^n \subseteq C \subseteq [-1,2]^n$. Ist $s \in [0,1]^n$, dann gibt es (auf Grund der Eigenschaft von A, Repräsentantensystem zu sein) Elemente $a \in A$ und $r \in \mathbb{Q}^n$ mit $s = r + a$. Für $1 \le i \le n$ ist $r_i = s_i - a_i \in [-1,1]$ und somit $r \in [-1,1]^n$. Es folgt $s = r + a \in C$. Ist nun $s \in C$ vorausgesetzt, dann gibt es Elemente $r \in B \subseteq [-1,1]^n$ und $a \in A \subseteq [0,1]^n$ mit $s = r + a$. Aus $-1 \le r_i \le 1$ und $0 \le a_i \le 1$ folgt $-1 \le s_i \le 2$ für $1 \le i \le n$.

Nehmen wir nun an, $\mu : \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ ist eine Abbildung mit den Eigenschaften (i) bis (iv)'. Aus der Monotonie folgt dann $1 = \mu([0,1]^n) \le \mu(C) \le \mu([-1,2]^n) = 3^n$. Die Eigenschaft (iv'), die Bewegungsinvarianz sowie die Darstellung von C als disjunkte, abzählbare Vereinigung liefern

$$\mu(C) \quad = \quad \sum_{r \in B} \mu(r + A) \quad = \quad \sum_{r \in B} \mu(A).$$

Aus $\sum_{r \in B} \mu(A) = \mu(C) \ge 1$ folgt $\mu(A) > 0$ und somit $\sum_{r \in B} \mu(A) = +\infty$. Dies aber steht im Widerspruch zur zweiten Ungleichung $\mu(C) \le 3^n$. □

Wird an Stelle von (iv)' nur die schwächere Bedingung (iv) gefordert, so spricht man vom Inhaltsproblem. Dass auch dieses Problem i.a. unlösbar ist, wird eindrucksvoll belegt durch das

Satz 1.4 *(Banach-Tarski-Paradoxon)*

Seien X und Y beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ mit einem nichtleeren Inneren. Dann gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ und disjunkte Zerlegungen

$$X = X_1 \cup \ldots \cup X_n \qquad \text{und} \qquad Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_n \quad ,$$

so dass $X_j \cong Y_j$ für $1 \leq j \leq n$ erfüllt ist.

Beweis: Ein elementarer Beweis wird in [Str] beschrieben. □

Beispielsweise sind $X = [0,1]^3$ und $Y = [0,2]^3$ Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ mit einem nichtleeren Inneren, auf welche folglich die Aussage des Banach-Tarski-Paradoxons angewendet werden kann. Nehmen wir nun an, dass es sich bei $\mu : \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ um eine Abbildung mit den Eigenschaften (i) bis (iv) handelt. Sind $X_1, \ldots, X_n$ und $Y_1, \ldots, Y_n$ die Mengen aus der im Banach-Tarski-Paradoxon angegebenen disjunkten Zerlegung, dann liefern diese Eigenschaften den Widerspruch

$$1 \quad = \quad \mu([0,1]^3) \quad = \quad \mu(X) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} \mu(X_i) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} \mu(Y_i) \quad = \quad \mu(Y) \quad = \quad \mu([0,2]^3) \quad = \quad 8.$$

Auch im $\mathbb{R}^n$ für $n \geq 4$ ist das Inhaltsproblem unlösbar. Für $n = 1, 2$ gibt es überraschenderweise Lösungen, aber diese sind nicht eindeutig bestimmt (für Beweise siehe [Wa]).

§ 2. Der Jordansche Inhalt

Zusammenfassung. Um die Konstruktion des Lebesgue-Maßes vorzubereiten, beschäftigen wir uns in diesem Abschnitt zunächst mit den *Inhalten* auf *Mengenringen*. Bei Letzteren handelt es sich um Mengensysteme, die unter gewissen Operationen abgeschlossen sind, unter anderem bezüglich endlicher Vereinigungen. Erstere ordnen den Mengen in einem solchen System Werte zu, die man als „Volumen" dieser Mengen interpretieren kann.

Um einen Volumenbegriff zu erhalten, der der anschaulichen Vorstellung nahekommt, betrachten wir zunächst den Mengenring der Figuren. Dies sind endliche Vereinigungen von Quadern, denen man auf naheliegende Weise ein Volumen zuordnen kann. Dieses bezeichnet man als den *Jordan-Inhalt* der Figur. Anschließend werden wir die Definition des Jordan-Inhalt auf eine möglichst große Klasse von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ fortsetzen.

Wichtige Grundbegriffe

– Mengenhalbring und Mengenhalbalgebra
– Mengenring und Mengenalgebra
– Inhalt auf einem Mengenhalbring
– erzeugter Mengenring
– inneres und äußeres Maß eines Inhalts
– Intervall, Quader, Figar
– Volumen eines Quaders
– Jordan-Messbarkeit und Jordan-Inhalt

Wie wir im letzten Abschnitt gesehen haben, wird es uns nicht gelingen, beliebigen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ auf sinnvolle Weise ein Volumen zuzuordnen. Unser erstes Ziel ist daher die Definition von Mengensystemen, auf denen eine geeignete Volumenfunktion existiert. In den folgenden Abschnitten bezeichnet Ω stets eine beliebige Menge.

Definition 2.1 Eine Teilmenge $\mathcal{H} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ wird ***Mengenhalbring*** in Ω genannt, wenn $\varnothing \in \mathcal{H}$ gilt und außerdem folgende Bedingungen erfüllt sind.

(i) Sind $A, B \in \mathcal{H}$, dann liegt auch $A \cap B$ in $\mathcal{H}$.

(ii) Für alle $A, B \in \mathcal{H}$ gibt es ein $r \in \mathbb{N}_0$ und Mengen $C_1, ..., C_r \in \mathcal{H}$, so dass $A \setminus B$ als *disjunkte* Vereinigung $A \setminus B = C_1 \cup ... \cup C_r$ dargestellt werden kann.

Gilt zusätzlich $\Omega \in \mathcal{H}$, dann nennt man $\mathcal{H}$ eine ***Halbalgebra***.

Im ersten Semester haben wir die ***Intervalle*** eingeführt als Teilmengen $I \subseteq \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass für alle $a, b \in I$ mit $a < b$ auch jedes $c \in \mathbb{R}$ mit $a < c < b$ in I enthalten ist. Die Intervalle sind also genau die *konvexen*

Teilmengen von $\mathbb{R}$. Es ist leicht zu sehen, dass die Intervalle einen Mengenhalbring in $\mathbb{R}$ bilden. Auch die endlichen Intervalle bilden einen Mengenhalbring.

Satz 2.2 Seien $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ zwei Mengenhalbringe in Ω bzw. Ω'. Dann ist auch das Mengensystem

$$\{A \times A' \mid A \in \mathcal{H}, A' \in \mathcal{H}'\} \qquad \text{ein Mengenhalbring.}$$

Beweis: Wir bezeichnen das angegebene System von Teilmengen von $\Omega \times \Omega'$ mit $\mathcal{H}''$. Zunächst gilt $\varnothing = \varnothing \times \varnothing \in \mathcal{H}''$. Seien nun $A \times A'$, $B \times B'$ zwei Elemente in $\mathcal{H}''$, mit $A, B \in \mathcal{H}$ und $A', B' \in \mathcal{H}'$. Weil $\mathcal{H}$ und $\mathcal{H}'$ Halbringe sind, gilt $A \cap B \in \mathcal{H}$ und $A' \cap B' \in \mathcal{H}'$. Es folgt $(A \times A') \cap (B \times B') = (A \cap B) \times (A' \cap B') \in \mathcal{H}''$. Wir haben damit Bedingung (i) der Halbring-Eigenschaft verifiziert.

Nun zeigen wir, dass $(A \times A') \setminus (B \times B')$ für $\mathcal{H}''$ die Bedingung (ii) in Definition 2.1 erfüllt. Weil $\mathcal{H}$ und $\mathcal{H}'$ Halbringe sind, gibt es $r, s \in \mathbb{N}_0$ und Mengen $C_1, \ldots, C_r \in \mathcal{H}$, $C'_1, \ldots, C'_s \in \mathcal{H}'$, so dass $A \setminus B$ und $A' \setminus B'$ als disjunkte Vereinigungen

$$A \setminus B = C_1 \cup \ldots \cup C_r \qquad \text{und} \qquad A' \setminus B' = C'_1 \cup \ldots \cup C'_s$$

dargestellt werden können. Die Menge $(A \times A') \setminus (B \times B')$ zerfällt disjunkt in die Teilmengen $(A \cap B) \times (A' \setminus B')$, $(A \setminus B) \times (A' \cap B')$ und $(A \setminus B) \times (A' \setminus B')$. Es gilt

$$(A \cap B) \times (A' \setminus B') = \bigcup_{j=1}^{s} (A \cap B) \times C'_j \quad , \quad (A \setminus B) \times (A' \cap B') = \bigcup_{i=1}^{r} C_i \times (A' \cap B')$$

und

$$(A \setminus B) \times (A' \setminus B') = \bigcup_{i=1}^{r} \bigcup_{j=1}^{s} C_i \times C'_j.$$

Sämtliche Vereinigungen sind disjunkt, und die in den Vereinigungen vorkommenden Mengen sind alle in $\mathcal{H}''$ enthalten. Damit ist die Halbring-Eigenschaft (ii) nachgewiesen. □

Als ***Quader*** im $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir im Folgenden ein kartesisches Produkt $I_1 \times \ldots \times I_n$ von endlichen Intervallen. Nach Satz 2.2 bilden die Quader einen Mengenhalbring im $\mathbb{R}^n$.

Definition 2.3 Ein ***Mengenring*** ist eine Teilmenge $\mathcal{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ mit den Eigenschaften, dass $\varnothing \in \mathcal{R}$ gilt und mit $A, B \in \mathcal{R}$ auch $A \cup B$ und $A \setminus B$ in $\mathcal{R}$ liegen. Gilt zusätzlich $\Omega \in \mathcal{R}$, dann spricht man von einer ***Mengenalgebra***.

Sind A, B Elemente eines Mengenrings $\mathcal{R}$, dann sind auch die symmetrische Differenz $\triangle$ definiert durch $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ und der Durchschnitt $A \cap B = (A \cup B) \setminus (A \triangle B)$ in $\mathcal{R}$ enthalten. Insbesondere ist jeder Mengenring ein Mengenhalbring. Man kann leicht überprüfen, dass $\mathcal{R}$ mit $\triangle$ als Addition und $\cap$ als Multiplikation ein Ring im Sinne der Algebra ist, allerdings ohne Einselement. Der anderorts definierte Begriff der *Algebra* als Vektorraum mit einer zusätzlichen multiplikativen Verknüpfung steht allerdings mit unserem Begriff in keinem Zusammenhang.

Wir werden nun sehen, wie aus einem Mengenhalbring auf natürliche Weise ein Mengenring gewonnen werden kann.

Definition 2.4 Wir sagen, ein Mengenring $\mathcal{R}$ wird von einer beliebigen Teilmenge $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ***erzeugt***, wenn $\mathcal{R} \supseteq \mathcal{E}$ gilt und für jeden Ring $\mathcal{S}$ in Ω mit $\mathcal{S} \supseteq \mathcal{E}$ auch $\mathcal{S} \supseteq \mathcal{R}$ erfüllt ist.

Offenbar ist der von einer Menge $\mathcal{E}$ erzeugte Ring eindeutig bestimmt. Sind nämlich $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ zwei von $\mathcal{E}$ erzeugte Ringe, dann gilt nach Definition $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$ und $\mathcal{R}_2 \subseteq \mathcal{R}_1$, insgesamt also $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$. Wir bezeichnen den von $\mathcal{E}$ erzeugten Ring mit $\mathcal{R}(\mathcal{E})$. Ist $\mathcal{E}$ ein Halbring, dann lassen sich die Elemente von $\mathcal{R}(\mathcal{E})$ folgendermaßen charakterisieren.

Satz 2.5 Sei $\mathcal{H} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ein Halbring. Dann gilt

(i) Die Elemente von $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ sind die endlichen Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{H}$.

(ii) Die Elemente von $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ sind die endlichen *disjunkten* Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{H}$.

Beweis: Wir beweisen zunächst die Eigenschaft (ii). Dass $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ alle endlichen disjunkten Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{H}$ enthält, beweist man unmittelbar durch vollständige Induktion unter Verwendung der Voraussetzungen $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{H})$ und $A, B \in \mathcal{R}(\mathcal{H}) \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{R}(\mathcal{H})$. Es bleibt zu zeigen, dass die Menge $\mathcal{R}_1$ der endlichen disjunkten Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{H}$ ein Ring ist. Zunächst gilt $\varnothing \in \mathcal{R}_1$, da auch $\varnothing$ nach unserer Konvention eine endliche Vereinigung (bestehend aus null Mengen) ist. Seien nun $A, B \in \mathcal{R}_1$ und $A = P_1 \cup ... \cup P_r$, $B = Q_1 \cup ... \cup Q_s$ von A und B als disjunkte Vereinigungen von Mengen $P_i, Q_j \in \mathcal{H}$. Für $A \cap B$ existiert die Darstellung als disjunkte Vereinigung

$$A \cap B \quad = \quad \bigcup_{i=1}^{r} \bigcup_{j=1}^{s} (P_i \cap Q_j) \quad ,$$

und auf Grund der Halbring-Eigenschaft von $\mathcal{H}$ gilt $P_i \cap Q_j \in \mathcal{H}$ für $1 \le i \le r$, $1 \le j \le s$. Daraus folgt $A \cap B \in \mathcal{R}_1$. Für die Differenz erhalten wir die Darstellung als disjunkte Vereinigung

$$A \setminus B \quad = \quad \bigcup_{i=1}^{r} (P_i \setminus B) \quad = \quad \bigcup_{i=1}^{r} \left(\bigcap_{j=1}^{s} (P_i \setminus Q_j) \right).$$

Wir haben bereits gezeigt, dass $\mathcal{R}_1$ abgeschlossen unter Durchschnitten ist, deshalb genügt es zu überprüfen, dass die Mengen $P_i \setminus Q_j$ in $\mathcal{R}_1$ enthalten sind. Dies folgt aber wiederum aus der Halbring-Eigenschaft von $\mathcal{H}$, denn auf Grund dessen ist $P_i \setminus Q_j$ eine disjunkte Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{H}$. Schließlich liegt auch $A \cup B$ in $\mathcal{R}_1$, denn wir können $A \cup B$ als disjunkte Vereinigung der Mengen $A \cap B$, $A \setminus B$ und $B \setminus A$ darstellen, die (wie bereits gezeigt) in $\mathcal{R}_1$ enthalten sind. Damit ist der Beweis von Aussage (ii) abgeschlossen.

Zum Beweis von (i) bemerken wir zunächst, dass $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ auf Grund der Ringeigenschaft sämtliche endlichen Vereinigungen von Elementen aus $\mathcal{H}$ enthält. Umgekehrt ist jedes Element aus $\mathcal{R}(\mathcal{H})$, wie wir schon gezeigt haben, sogar eine endliche *disjunkte* Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{H}$. □

Definition 2.6 Eine ***Figur*** im $\mathbb{R}^n$ ist eine endliche Vereinigung von Quadern, also eine Teilmenge $F \subseteq \mathbb{R}^n$ der Form $F = Q_1 \cup ... \cup Q_r$, mit $r \in \mathbb{N}_0$ und Quadern $Q_1, ..., Q_r$ im $\mathbb{R}^n$.
(Im Fall $r = 0$ ist $F = \varnothing$.)

Aus Satz 2.5 folgt unmittelbar, dass die Figuren im $\mathbb{R}^n$ einen Ring bilden. Wir kommen nun zur Einführung eines geeigneten Volumenbegriffs.

Definition 2.7 Ein ***Inhalt*** auf einem Halbring $\mathcal{H}$ ist eine Abbildung $c : \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+$ mit $c(\varnothing) = 0$ und

$$c(A_1 \cup ... \cup A_r) \quad = \quad \sum_{i=1}^{r} c(A_i)$$

für $r \in \mathbb{N}_0$ und paarweise disjunkte Mengen $A_1, ..., A_r \in \mathcal{H}$ mit der Eigenschaft, das auch die Vereinigung $A_1 \cup ... \cup A_r$ in $\mathcal{H}$ enthalten ist. Man bezeichnet diese Eigenschaft als ***endliche Additivität***.

Der Begriff des Inhalts ist auf Mengenringen genauso definiert wie auf Mengenhalbringen, d.h. eine Abbildung $c : \mathcal{R} \to \mathbb{R}_+$ auf einem Mengenring $\mathcal{R}$ ist genau dann ein Inhalt, wenn sie die beiden in Definition 2.7 genannten Eigenschaften besitzt. Zum Nachweis der Inhaltseigenschaft genügt es bei Ringen allerdings, die Gültigkeit der Gleichung $c(A_1 \cup A_2) = c(A_1) + c(A_2)$ für zwei disjunkte $A_1, A_2 \in \mathcal{R}$ zu nachzuweisen. Die Aussage für beliebiges $r \in \mathbb{N}_0$ erhält man dann durch vollständige Induktion. Für Mengenhalbringen $\mathcal{H}$ ist dies in dieser Form nicht möglich: Der Induktionsschritt funktioniert nicht, denn aus der Voraussetzung, dass $A_1 \cup ... \cup A_{r+1}$ in $\mathcal{H}$ liegt, darf nicht ohne weiteres geschlossen werden, dass auch $A_1 \cup ... \cup A_r$ in $\mathcal{H}$ liegt, selbst dann nicht, wenn $A_j \in \mathcal{H}$ für $1 \le j \le r+1$ vorausgesetzt ist.

Proposition 2.8 Sei $c : \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+$ ein Inhalt auf einem Mengenhalbring $\mathcal{H}$.

(i) Für $A, B \in \mathcal{H}$ mit $A \subseteq B$ gilt $c(A) \le c(B)$.
(Diese Eigenschaft bezeichnet man als ***Monotonie***.)

(ii) Ist $\mathcal{H}$ ein Mengenring, dann gilt $c(A \cup B) \le c(A) + c(B)$ für alle $A, B \in \mathcal{H}$.
(Diese Eigenschaft wird ***Subadditivität*** genannt.)

Beweis: zu (i) Auf Grund der Halbring-Eigenschaft existiert eine disjunkte Zerlegung $B \setminus A = C_1 \cup ... \cup C_r$ mit $r \in \mathbb{N}_0$ und $C_j \in \mathcal{H}$ für $1 \le j \le r$. Dies liefert eine disjunkte Zerlegung von B in $A \cup C_1 \cup ... \cup C_r$, und auf Grund der Additivität erhalten wir

$$c(B) \quad = \quad c(A) + c(C_1) + ... + c(C_r) \quad \ge \quad c(A).$$

zu (ii) Die Vereinigungsmenge $A \cup B$ kann als disjunkte Vereinigung der drei Mengen $A \setminus B$, $B \setminus A$ und $A \cap B$ dargestellt werden. Daraus folgt

$$c(A \cup B) \quad = \quad c(A \setminus B) + c(B \setminus A) + c(A \cap B) \quad =$$
$$(c(A \setminus B) + c(A \cap B)) + (c(B \setminus A) + c(A \cap B)) - c(A \cap B) \quad = \quad c(A) + c(B) - c(A \cap B) \quad \le \quad c(A) + c(B). \qquad \square$$

Unser nächstes Ziel besteht darin, auf dem Mengenhalbring der Quader im $\mathbb{R}^n$ einen Inhalt einzuführen. Dazu legen wir die folgende Notation fest: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion, dann bezeichnet man den Abschluss der Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$ als *Träger* $\mathrm{supp}(f)$ von f. Ist der Träger von f in einem endlichen, abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ enthalten und f auf $[a,b]$ Riemann-integrierbar, dann definieren wir

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx \quad = \quad \int_a^b f(x)\,dx.$$

Man überprüft leicht, dass dieses Integral von der Wahl des Intervalls $[a,b]$ unabhängig ist. Sind die Träger von f und g in einem endlichen, abgeschlossenen Intervall enthalten, dann gilt dasselbe auch für $\mathrm{supp}(f+g)$, und es ist

$$\int_{\mathbb{R}} (f+g)(x)\,dx \quad = \quad \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx.$$

Für jedes endliche Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit den Grenzen $a,b \in \mathbb{R}$, wobei $a < b$ ist, bezeichnen wir $c_1(I) = \ell(I) = b - a$ als die ***Länge*** des Intervalls.

Wenden wir uns nun den höheren Dimensionen zu. Ist Q ein Quader im $\mathbb{R}^n$ und kartesisches Produkt der Intervalle $I_1, ..., I_n$, so bezeichnen wir $c_n(Q) = \prod_{j=1}^n \ell(I_j)$ als das ***Volumen*** des Quaders. Wir verwenden von nun an $\mathcal{H}_n$ als Bezeichnung für den Halbring der Quader im $\mathbb{R}^n$, und $\mathcal{R}_n$ für den Ring der Figuren. Ist $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ eine beliebige Teilmenge, dann definieren wir

$$A_x \quad = \quad \{y \in \mathbb{R}^n \mid (x,y) \in A\} \qquad \text{für jedes} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ist X eine Menge und $A \subseteq X$ eine beliebige Teilmenge, dann bezeichnen wir die Abbildung

$$1_A : X \longrightarrow \{0,1\} \quad , \quad 1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad x \in A \\ 0 & \text{falls} \quad x \notin A \end{cases}$$

als ***Indikatorfunktion*** der Menge A. Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein endliches Intervall, dann gilt offenbar

$$\int_{\mathbb{R}} 1_I(x)\,dx \quad = \quad c_1(I) \quad = \quad \ell(I) \quad ,$$

insbesondere ist das Integral definiert. Dies überprüft man unmittelbar, indem man die möglichen Fälle für das Intervall I einzeln durchgeht.

Lemma 2.9 Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathcal{H}_{n+1}$. Dann ist der Träger der Funktion auf $\mathbb{R}$ gegeben durch $x \mapsto c_n(A_x)$ in einem abgeschlossenen Intervall enthalten, die Funktion ist dort Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}} c_n(A_x)\,dx \quad = \quad c_{n+1}(A).$$

Beweis: Da A ein Quader in $\mathbb{R}^{n+1}$ ist, gibt es nach Definition ein endliches Intervall I und einen Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$, so dass $A = I \times Q$ ist. Es gilt dann

$$A_x = \begin{cases} Q & \text{für} \quad x \in I \\ \varnothing & \text{für} \quad x \notin I \end{cases} \quad , \quad \text{also} \qquad c_n(A_x) = \begin{cases} c_n(Q) & \text{für} \quad x \in I \\ 0 & \text{für} \quad x \notin I. \end{cases}$$

Der Träger der Funktion $x \mapsto c_n(A_x)$ ist also im Abschluss $\bar{I}$ von I enthalten. Dabei ist $\bar{I}$ ein endliches, abgeschlossenes Intervall der Form $[a,b]$, und es gilt $\ell(I) = \ell(\bar{I}) = b - a$. Da die Funktion $x \mapsto c_n(A_x)$ auf I konstant ist, ist sie auf $\bar{I}$ Riemann-integrierbar. Für den Wert des Integrals erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}} c_n(A_x)\, dx \quad = \quad \int_a^b c_n(A_x)\, dx \quad = \quad \ell(I) c_n(Q) \quad = \quad c_{n+1}(I \times Q) \quad = \quad c_{n+1}(A). \qquad \square$$

Satz 2.10 Durch die Volumenfunktion $c_n : \mathcal{H}_n \to \mathbb{R}_+$ ist ein Inhalt auf dem Mengenhalbring $\mathcal{H}_n$ gegeben.

Beweis: Nach Definition gilt $c_n(\varnothing) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die zweite Eigenschaft einer Inhalts-Abbildung beweisen wir durch vollständige Induktion über n. Sei zunächst $n = 1$, $r \in \mathbb{N}_0$, und seien $A_1, ..., A_r \in \mathcal{H}_1$ paarweise disjunkt und nichtleer mit der Eigenschaft, dass auch $A = A_1 \cup ... \cup A_r$ in $\mathcal{H}_1$ liegt. Weil die Mengen $A_1, ..., A_r$ paarweise disjunkt sind, gilt $1_A(x) = \sum_{i=1}^r 1_{A_i}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und es folgt

$$c_1(A) \quad = \quad \int_{\mathbb{R}} 1_A(x)\, dx \quad = \quad \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=1}^r 1_{A_i}(x) \quad = \quad \sum_{i=1}^r \int_{\mathbb{R}} 1_{A_i}(x)\, dx \quad = \quad \sum_{i=1}^r c_1(A_i).$$

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ und die Inhalts-Eigenschaft für n bereits bewiesen. Seien $A_1, ..., A_r \in \mathcal{H}_{n+1}$ paarweise disjunkt mit $A = A_1 \cup ... \cup A_r \in \mathcal{H}_{n+1}$. Mit $A_1, ..., A_r$ sind auch die n-dimensionalen Quader $(A_i)_x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ jeweils disjunkt. Es gilt $A_x = (A_1)_x \cup ... \cup (A_r)_x$ für jedes $x \in \mathbb{R}$, denn für alle $y \in \mathbb{R}^n$ gilt die Äquivalenz

$$\begin{aligned} y \in A_x \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) \in A \quad \Leftrightarrow \quad \exists i \in \{1, ..., r\} : (x,y) \in A_i \quad \Leftrightarrow \\ \exists i \in \{1, ..., r\} : y \in (A_i)_x \quad \Leftrightarrow \quad y \in \bigcup_{i=1}^r (A_i)_x \end{aligned}$$

Durch Anwendung von Lemma 2.7 und der Induktionsvoraussetzung erhalten wir somit

$$\begin{aligned} c_{n+1}(A) \quad &= \quad \int_{\mathbb{R}} c_n(A_x)\, dx \quad = \quad \int_{\mathbb{R}} c_n\left(\bigcup_{i=1}^r (A_i)_x\right) dx \quad = \quad \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=1}^r c((A_i)_x)\, dx \\ &= \quad \sum_{i=1}^r \int_{\mathbb{R}} c_n((A_i)_x)\, dx \quad = \quad \sum_{i=1}^r c_{n+1}(A_i). \qquad \square \end{aligned}$$

Der soeben eingeführte Inhalt soll nun auf den Ring der Figuren fortgesetzt werden.

Satz 2.11 Sei $\mathcal{H}$ ein Halbring in Ω und $\mathcal{R}$ der von $\mathcal{H}$ erzeugte Ring. Dann gibt es für jeden Inhalt $c : \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+$ einen eindeutig bestimmten Inhalt $\tilde{c}$ auf $\mathcal{R}$ mit $\tilde{c}|_{\mathcal{H}} = c$ (also eine Fortsetzung von c auf $\mathcal{R}$).

Beweis: Zunächst beweisen wir die Eindeutigkeit. Sei $\tilde{c}$ eine beliebige Fortsetzung von c zu einem Inhalt auf $\mathcal{R}$ und $A \in \mathcal{R}$. Ist $A = P_1 \cup ... \cup P_r$ eine beliebige Darstellung von A als disjunkte Vereinigung von Mengen $P_i \in \mathcal{H}$, dann gilt

$$\tilde{c}(A) \quad = \quad \sum_{i=1}^{r} \tilde{c}(P_i) \quad = \quad \sum_{i=1}^{r} c(P_i). \tag{2.1}$$

Zum Nachweis der Existenz wählen wir für jedes $A \in \mathcal{R}$ eine Darstellung als disjunkte Vereinigung $P_1 \cup ... \cup P_r$ mit $P_i \in \mathcal{H}$ und definieren $\tilde{c}(A)$ durch (2.1). Nach Definition gilt dann $\tilde{c}(\varnothing) = \varnothing$. Ersetzt man in (2.1) die Mengen P_i durch eine beliebige andere Darstellung von A als disjunkte Vereinigung $Q_1 \cup ... \cup Q_s$ mit $Q_j \in \mathcal{H}$, so erhält man denselben Wert. Jedes P_i kann nämlich disjunkt in

$$P_i \quad = \quad (P_i \cap Q_1) \cup ... \cup (P_i \cap Q_s)$$

zerlegt werden. Die Elemente $P_i \cap Q_j$ liegen in $\mathcal{H}$, und weil c ein Inhalt auf $\mathcal{H}$ ist, gilt

$$\sum_{i=1}^{r} c(P_i) \quad = \quad \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} c(P_i \cap Q_j).$$

Ebenso beweist man die Gleichung

$$\sum_{j=1}^{s} c(Q_j) \quad = \quad \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} c(P_i \cap Q_j) \quad ,$$

womit die Unabhängigkeit von der Wahl der Zerlegung von A bewiesen ist. Nun zeigen wir, dass $\tilde{c}(A \cup B) = \tilde{c}(A) + \tilde{c}(B)$ für disjunkte $A, B \in \mathcal{R}$ gilt. Seien $A = P_1 \cup ... \cup P_r$ und $B = Q_1 \cup ... \cup Q_s$ die zu Beginn gewählten Darstellungen von A, B als disjunkte Vereinigungen von Mengen $P_i, Q_j \in \mathcal{H}$. Dann kann (auf Grund der bewiesenen Unabhängigkeit) der Wert $\tilde{c}(A \cup B)$ mit Hilfe der disjunkten Zerlegung $P_1 \cup ... \cup P_r \cup Q_1 \cup ... \cup Q_s$ ausgerechnet werden, und wir erhalten

$$\tilde{c}(A \cup B) \quad = \quad \sum_{i=1}^{r} c(P_i) + \sum_{j=1}^{s} c(Q_j) \quad = \quad \tilde{c}(A) + \tilde{c}(B). \qquad \square$$

Aus Satz 2.11 folgt unmittelbar die Existenz eines Inhalts $c_n : \mathcal{R}_n \to \mathbb{R}_+$ auf dem Ring $\mathcal{R}_n$ der Figuren im $\mathbb{R}^n$. Als nächstes beschäftigen wir uns nun mit der Frage, wie Inhaltsfunktionen auf beliebige Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ fortgesetzt werden können.

Definition 2.12 Sei $\mathcal{R}$ ein Ring in Ω, $c : \mathcal{R} \to \mathbb{R}_+$ ein Inhalt und $A \subseteq \Omega$ eine beliebige Teilmenge. Dann sind das ***innere Maß*** $c_*(A)$ bzw. das ***äußere Maß*** $c^*(A)$ von A bezüglich c definiert durch

$$c_*(A) = \sup\{c(B) \mid B \in \mathcal{R}, B \subseteq A\} \qquad \text{und} \qquad c^*(A) = \inf\{c(B) \mid B \in \mathcal{R}, B \supseteq A\}.$$

Sowohl beim inneren als auch beim äußeren Maß ist auch der Wert $+\infty$ möglich. Beim inneren Maß $c_*(A)$ tritt dieser Fall ein, wenn die Menge $\{c(B) \mid B \in \mathcal{R}, B \subseteq A\}$ in $\mathbb{R}_+$ unbeschränkt ist, und beim äußeren Maß $c^*(A)$, wenn $\{c(B) \mid B \in \mathcal{R}, B \supseteq A\}$ die leere Menge ist.

Beim folgenden Lemma setzen wir voraus, dass (entsprechend der üblichen Konvention) für alle $a, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ die Abschätzung $a \leq +\infty$ und im Fall $a = +\infty$ oder $b = +\infty$ die Gleichung $a + b = +\infty$ erfüllt ist.

Lemma 2.13 Sei $\mathcal{R}$ ein Ring in Ω, $c : \mathcal{R} \to \mathbb{R}_+$ ein Inhalt, und seien $A, B \subseteq \Omega$ beliebig.

(i) Aus $A \subseteq B$ folgt $c_*(A) \le c_*(B)$ und $c^*(A) \le c^*(B)$.

(ii) Allgemein gilt $c^*(A \cup B) \le c^*(A) + c^*(B)$.

(iii) Sind A und B disjunkt, dann gilt $c_*(A \cup B) \ge c_*(A) + c_*(B)$.

Beweis: zu (i) Die Menge $M_1 = \{c(C) \mid C \in \mathcal{R}, C \subseteq A\}$ ist in $M_2 = \{c(C) \mid C \in \mathcal{R}, C \subseteq B\}$ enthalten, weil für jedes $C \in \mathcal{R}$ mit $C \subseteq A$ auch $C \subseteq B$ gilt. Im Fall $c_*(B) = +\infty$ ist $c_*(A) \le c_*(B)$ offenbar erfüllt. Ansonsten ist $c_*(B) = \sup(M_2)$ eine obere Schranke von M_1. Weil $c_*(A) = \sup(M_1)$ die kleinste obere Schranke von M_1 ist, folgt $c_*(A) \le c_*(B)$. Der Beweis der Abschätzung $c^*(A) \le c^*(B)$ läuft analog.

zu (ii) Wir können davon ausgehen, dass $c^*(A)$ und $c^*(B)$ beide endlich sind, denn ansonsten ist die Ungleichung offensichtlich. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Nach Definition des äußeren Maßes gibt es Mengen $A_1, B_1 \in \mathcal{R}$ mit $A_1 \supseteq A$, $B_1 \supseteq B$ mit $c(A_1) \le c^*(A) + \frac{1}{2}\varepsilon$ und $c(B_1) \le c^*(B) + \frac{1}{2}\varepsilon$. Wegen $A \cup B \subseteq A_1 \cup B_1$ liegt $c(A_1 \cup B_1)$ in der Menge $\{c(C) \mid C \in \mathcal{R}, C \supseteq A \cup B\}$. Weil $c^*(A \cup B)$ eine untere Schranke dieser Menge ist, gilt $c^*(A \cup B) \le c(A_1 \cup B_1) \le c(A_1) + c(B_1) \le c^*(A) + c^*(B) + \varepsilon$. Weil ε beliebig vorgegeben war, folgt $c^*(A \cup B) \le c^*(A) + c^*(B)$.

zu (iii) Wir setzen voraus, dass $c_*(A \cup B)$ endlich ist. Nach Teil (i) und wegen $A, B \subseteq A \cup B$ sind dann auch $c_*(A)$ und $c_*(B)$ endlich. Für vorgegebenes $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ finden wir $A_0, B_0 \in \mathcal{R}$ mit $A \supseteq A_0$, $B \supseteq B_0$ und $c(A_0) \ge c_*(A) - \frac{1}{2}\varepsilon$, $c(B_0) \ge c_*(B) - \frac{1}{2}\varepsilon$. Mit A, B sind auch A_0, B_0 disjunkt. Zusammen mit der Inklusion $A_0 \cup B_0 \subseteq A \cup B$ folgt daraus $c_*(A \cup B) \ge c(A_0 \cup B_0) = c(A_0) + c(B_0) \ge c_*(A) + c_*(B) - \varepsilon$. Lassen wir ε gegen Null laufen, so erhalten wir $c_*(A \cup B) \ge c_*(A) + c_*(B)$. □

Lemma 2.14 Für jede Teilmenge $A \subseteq \Omega$ gilt $c_*(A) \le c^*(A)$.

Beweis: Zunächst betrachten wir den Fall, dass $c_*(A)$ unendlich ist. Angenommen, $c^*(A)$ ist endlich. Nach Definition des Infimums existiert dann ein $B \in \mathcal{R}$ mit $B \supseteq A$ und $c(B) \le c^*(A) + 1$. Wegen $c_*(A) = +\infty$ finden wir ein $C \in \mathcal{R}$ mit $C \subseteq A$ mit $c(C) > c(B)$. Wegen $C \subseteq A \subseteq B$ muss andererseits $c(C) \le c(B)$ gelten, wir erhalten also einen Widerspruch. Also muss $c^*(A) = +\infty$ gelten.

Seien nun $c^*(A)$ und $c_*(A)$ beide endlich, aber $c_*(A) > c^*(A)$. Nach Definition des Infimums finden wir ein $B \in \mathcal{R}$ mit $B \supseteq A$ und $c(B) < c_*(A)$. Nach Definition des Supremums gibt es andererseits ein $C \subseteq A$ und $c(C) > c(B)$. Wiederum ergibt sich wegen $C \subseteq A \subseteq B$ ein Widerspruch zur Monotonie. □

Lemma 2.15 Sei $\mathcal{R}$ ein Ring in Ω und $c : \mathcal{R} \to \mathbb{R}_+$ ein Inhalt. Dann gilt $c_*(A) = c^*(A) = c(A)$ für alle $A \in \mathcal{R}$.

Beweis: Die Zahl $c(A)$ ist in der Menge $\{c(B) \mid B \subseteq A\}$ enthalten. Weil das Supremum eine obere Schranke dieser Menge ist, gilt $c(A) \le c_*(A)$. Nehmen wir an, dass $c(A) < c_*(A)$ ist. Dann gibt es ein $B \in \mathcal{R}$ mit $B \subseteq A$ und $c_*(A) \ge c(B) > c(A)$, was aber der Monotonie der Inhaltsfunktion c widerspricht. Also muss $c(A) = c_*(A)$ gelten.

Für das äußere Maß verläuft der Beweis völlig analog. Die Zahl $c(A)$ ist ein Element der Menge $\{c(B) \mid B \supseteq A\}$, nach Definition des Infimums gilt also $c(A) \ge c^*(A)$. Durch die Annahme $c(A) > c^*(A)$ erhält man ein $B \in \mathcal{R}$ mit $B \supseteq A$ und $c^*(A) \le c(B) < c(A)$, was aber auf Grund der Monotonie von c unmöglich ist. Also gilt auch $c(A) = c^*(A)$. □

Definition 2.16 Sind die Werte $c_*(A)$ und $c^*(A)$ beide endlich und gilt $c_*(A) = c^*(A)$, dann bezeichnen wir A als ***c-messbar*** und definieren $c(A) = c^*(A)$. Die c_n-messbaren Teilmengen $E \subseteq \mathbb{R}^n$ werden auch als ***Jordan-messbar*** bezeichnet, und man nennt $c_n(E)$ den ***Jordan-Inhalt*** der Teilmenge E.

Lemma 2.17 Sei $\mathcal{R}$ ein Ring in Ω und $c : \mathcal{R} \to \mathbb{R}_+$ ein Inhalt. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $E \subseteq \Omega$ beliebig und $A \in \mathcal{R}$ mit $c^*(A \,\Delta\, E) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Dann gibt es Mengen $A', B' \in \mathcal{R}$ mit $A' \subseteq E \subseteq B'$, $A' \subseteq A \subseteq B'$ und der Abschätzung $c(B' \setminus A') < \varepsilon$.

Beweis: Nach Definition des äußeren Maßes existiert ein $B \in \mathcal{R}$ mit $B \supseteq A \,\Delta\, E$ und $c(B) < \varepsilon$. Auf Grund der Ringeigenschaft liegen $B' = A \cup B$ und $A' = A \setminus B$ beide in $\mathcal{R}$, und es gilt $B' \setminus A' = B$, also $c(B' \setminus A') = c(B) < \varepsilon$. Außerdem ist $A' = A \setminus B \subseteq A \setminus (A \,\Delta\, E) \subseteq E$ und $E \subseteq A \cup (A \,\Delta\, E) \subseteq A \cup B = B'$. Die Inklusionen $A' \subseteq A \subseteq B'$ sind offensichtlich. □

Satz 2.18 Sei $\mathcal{R}$ ein Ring in Ω und $c : \mathcal{R} \to \mathbb{R}_+$ ein Inhalt. Für eine Teilmenge $E \subseteq \Omega$ sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(i) Die Menge E ist c-messbar.

(ii) Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ gibt es $A, B \in \mathcal{R}$ mit $A \subseteq E \subseteq B$ und $c(B \setminus A) < \varepsilon$.

(iii) Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ gibt es ein $A \in \mathcal{R}$ mit $c^*(A \,\Delta\, E) < \varepsilon$.

Beweis: „(i) $\Rightarrow$ (ii)" Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Nach Definition von $c^*(E)$ existiert ein $B \in \mathcal{R}$ mit $E \subseteq B$ und $c(B) < c^*(E) + \frac{1}{2}\varepsilon$. Ebenso finden wir ein $A \in \mathcal{R}$ mit $A \subseteq E$ und $c(A) > c_*(E) - \frac{1}{2}\varepsilon$. Weil E messbar bezüglich c ist, gilt $c(E) = c_*(E) = c^*(E)$, und die disjunkte Zerlegung von B in A und $B \setminus A$ liefert $c(B) = c(A) + c(B \setminus A)$. Insgesamt erhalten wir $c(B \setminus A) = c(B) - c(A) < (c(E) + \frac{1}{2}\varepsilon) - (c(E) - \frac{1}{2}\varepsilon) = \varepsilon$.

„(ii) $\Rightarrow$ (i)" Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Auf Grund der Voraussetzung existieren Elemente $A, B \in \mathcal{R}$ mit $A \subseteq E \subseteq B$ und $c(B \setminus A) < \varepsilon$. Es folgt $c^*(E) - c_*(E) \leq c(B) - c(A) = c(B \setminus A) < \varepsilon$. Weil $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig gewählt war, bedeutet dies $c^*(E) = c_*(E)$, d.h. E ist messbar bezüglich c.

„(ii) $\Rightarrow$ (iii)" Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Nach Voraussetzung finden wir Elemente $A, B \in \mathcal{R}$ mit $A \subseteq E \subseteq B$ und $c(B \setminus A) < \varepsilon$. Es gilt dann $A \,\Delta\, E = E \setminus A \subseteq B \setminus A$ und somit $c^*(A \,\Delta\, E) \leq c^*(B \setminus A) = c(B \setminus A) < \varepsilon$.

„(iii) $\Rightarrow$ (ii)" Zu vorgegebenem $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ wählen wir ein $A \in \mathcal{R}$ mit $c^*(A \,\Delta\, E) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Nach Lemma 2.17 gibt es $A', B' \in \mathcal{R}$ mit $A' \subseteq E \subseteq B'$, $A' \subseteq A \subseteq B'$ und $c(B' \setminus A') < \varepsilon$. □

Folgerung 2.19 Sei $\mathcal{R}$ ein Ring in Ω, $c : \mathcal{R} \to \mathbb{R}_+$ ein Inhalt auf $\mathcal{R}$ und $E \subseteq \Omega$ eine c-messbare Menge. Dann gibt es eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{R}$ mit $\lim_n c^*(A_n \,\Delta\, E) = 0$ und für jede solche Folge gilt $\lim_n c(A_n) = c(E)$.

Beweis: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es nach Satz 2.18 ein $A_n \in \mathcal{R}$ mit $c^*(A_n \,\Delta\, E) < \frac{1}{n}$. Dadurch ist die Existenz einer Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} c^*(A_n \,\Delta\, E) \quad = \quad 0 \qquad \text{bewiesen.}$$

Sei nun $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge mit dieser Eigenschaft und $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ vorgegeben. Sei $N \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $c^*(A_n \,\Delta\, E) < \frac{1}{2}\varepsilon$ für alle $n \geq N$ erfüllt ist. Sei nun $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$. Nach Lemma 2.17 gibt es Mengen $A', B' \in \mathcal{R}$ mit $A' \subseteq E \subseteq B'$ und $A' \subseteq A_n \subseteq B'$ sowie $c(B' \setminus A') < \varepsilon$. Nun gilt

$$c(A_n) - c(E) \quad = \quad c(A_n) - c^*(E) \quad \leq \quad c(B') - c^*(A') \quad = \quad c(B') - c(A') \quad = \quad c(B' \setminus A') \quad < \quad \varepsilon$$

und ebenso $c(E) - c(A_n) = c^*(E) - c^*(A_n) \leq c^*(B') - c^*(A') = c(B') - c(A') = c(B' \setminus A') < \varepsilon$, so dass wir insgesamt $|c(A_n) - c(E)| < \varepsilon$ erhalten. Damit ist auch die Gleichung $\lim_n c(A_n) = c(E)$ bewiesen. □

Satz 2.20 Sei $\mathcal{R}$ ein Ring in Ω und $c : \mathcal{R} \to \mathbb{R}_+$ ein Inhalt. Dann bilden die c-messbaren Mengen einen Ring $\mathcal{R}_c$, der $\mathcal{R}$ als Teilmenge enthält. Durch $A \mapsto c(A)$ ist ein Inhalt auf $\mathcal{R}_c$ definiert.

Beweis: Nach Lemma 2.15 gilt $\mathcal{R} \subseteq \tilde{\mathcal{R}}$. Wegen $\varnothing \in \mathcal{R}$ ist $\varnothing$ nach Lemma 2.15 eine c-messbare Menge. Seien nun A, B zwei c-messbare Mengen. Zu zeigen ist, dass auch $A \cup B$ und $A \setminus B$ messbar sind. Sei dazu $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Nach Satz 2.18 gibt es Mengen $A_0, A_1 \in \mathcal{R}$ mit $A_0 \subseteq A \subseteq A_1$ und $c(A_1 \setminus A_0) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Ebenso finden wir Mengen $B_0, B_1 \in \mathcal{R}$ mit $B_0 \subseteq B \subseteq B_1$ und $c(B_1 \setminus B_0) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Setzen wir $C_0 = A_0 \cup B_0$, $C_1 = A_1 \cup B_1$, dann gilt

$$C_1 \setminus C_0 \quad = \quad (A_1 \cup B_1) \setminus (A_0 \cup B_0) \quad \subseteq \quad (A_1 \setminus A_0) \cup (B_1 \setminus B_0).$$

und somit $c(C_1 \setminus C_0) \leq c(A_1 \setminus A_0) + c(B_1 \setminus B_0) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$. Wegen $C_0 \subseteq A \cup B \subseteq C_1$ zeigt dies nach Satz 2.18 die c-Messbarkeit von $A \cup B$. Zum Nachweis, dass auch $A \setminus B$ eine c-messbare Menge ist, setzen wir $D_0 = A_0 \setminus B_1$ und $D_1 = A_1 \setminus B_0$. Es gilt dann $D_0 \subseteq A \setminus B \subseteq D_1$ und

$$D_1 \setminus D_0 \quad = \quad (A_1 \setminus B_0) \setminus (A_0 \setminus B_1) \quad \subseteq \quad (A_1 \setminus A_0) \cup (B_1 \setminus B_0).$$

Wie zuvor erhalten wir $c(D_1 \setminus D_0) < \varepsilon$. Die Messbarkeit von $A \setminus B$ ist damit nachgewiesen.

Nun zeigen wir noch, dass durch c ein Inhalt auf $\mathcal{R}_c$ definiert ist. Nach Lemma 2.15 gilt $c(\varnothing) = c^*(\varnothing) = 0$, denn die leere Menge ist nach Definition in $\mathcal{R}$ enthalten. Seien nun $A, B \in \mathcal{R}_c$ zwei disjunkte Mengen; dann liegt auch $A \cup B$ in $\mathcal{R}_c$. Nach Lemma 2.13 gilt die Aussagen $c(A \cup B) = c^*(A \cup B) \leq c^*(A) + c^*(B) = c(A) + c(B)$ und $c(A \cup B) = c_*(A \cup B) \geq c_*(A) \cup c_*(B) = c(A) + c(B)$, insgesamt also Gleichheit. □

Speziell für den Jordan-Inhalt notieren wir an diese Stelle als wichtige Eigenschaft die Bewegungsinvarianz, die wir bereits im Einführungsabschnitt erwähnt haben. Wir werden diese Eigenschaft später unter allgemeineren Voraussetzungen herleiten.

Satz 2.21 Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge und $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Bewegung. Genau dann ist A Jordan-messbar, wenn $\psi(A)$ Jordan-messbar ist, und in diesem Fall gilt $c_n(\psi(A)) = c_n(A)$.

Das folgende Beispiel zeigt, dass bereits auf recht einfache Weise definierte Mengen nicht Jordan-messbar sein können.

Satz 2.22 Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge $A = [0,1]^n \cap \mathbb{Q}^n$ nicht Jordan-messbar.

Beweis: Wir beweisen die Gleichungen $c_*(A) = 0$ und $c^*(A) = 1$. Zum Beweis der ersten Gleichung nehmen wir an, dass $c_*(A) > 0$ ist und somit eine Figur F mit $F \subseteq A$ und $c(F) > 0$ existiert. Stellen wir F als disjunkte Vereinigung $Q_1 \cup ... \cup Q_r$ von Quadern da, so gilt $c(Q_i) > 0$ für ein i mit $1 \le i \le r$. Schreiben wir Q_i als Produkt von Intervallen, $Q_i = I_1 \times ... \times I_r$, dann haben alle Intervalle positive Länge. In jedem Intervall liegt somit eine irrationale Zahl, d.h. es existiert ein Punkt $a \in Q_i \setminus \mathbb{Q}^n$. Aber dies widerspricht den Annahmen $Q_i \subseteq F \subseteq A \subseteq \mathbb{Q}^n$.

Nehmen wir nun an, dass $c^*(A) < 1$ gilt. Dann existiert eine Figur $F \supseteq A$ mit $c(F) < 1$. Wir können $F \subseteq [0,1]^n$ annehmen (ansonsten ersetze F durch $F \cap [0,1]^n$). Wegen $c([0,1]^n) = 1$ ist $G = [0,1]^n \setminus F$ eine Figur mit $c(G) > 0$. Indem wir G wie im vorherigen Absatz als Vereinigung von Quadern darstellen, finden wir einen Quader $Q \subseteq G$ mit $c(Q) > 0$. Ist $Q = I_1 \times ... \times I_r$ die Darstellung von Q als kartesisches Produkt von Intervallen, so hat jedes Intervall positive Länge und enthält eine *rationale* Zahl. Somit liegt in Q ein Punkt aus $[0,1]^n \cap \mathbb{Q}^n = A$, was der Annahme $Q \subseteq G \subseteq [0,1]^n \setminus F \subseteq [0,1]^n \setminus A$ widerspricht. □

Auch Koordinantenhyperebenen wie z.B. $\{(0, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \text{ für } 2 \le i \le n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ sind nicht Jordan-messbar (Nachweis als Übung).

Wir werden im nächsten Abschnitt den Jordanschen Inhalt zum Lebesgue-Maß verallgemeinern. Bei der Konstruktion wird die folgende Charakterisierung der c-messbaren Mengen, die ohne den Begriff des inneren Maßes auskommt, für uns hilfreich sein.

Proposition 2.23 Sei $\mathcal{R}$ ein Ring und $c : \mathcal{R} \to \mathbb{R}_+$ ein Inhalt. Sei $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$ eine beliebig vorgegebene Menge.

(i) Ist $F \in \mathcal{R}$ mit $F \supseteq A$, dann gilt $c_*(A) = c(F) - c^*(F \setminus A)$.

(ii) Genau dann ist A c-messbar, wenn $c(F) \ge c^*(A) + c^*(F \setminus A)$ gilt.

Beweis: zu (i) Wir müssen die Gleichung $c(F) - c^*(F \setminus A) = \sup\{c(B) \mid B \subseteq A, B \in \mathcal{R}\}$ herleiten. Zum Nachweis, dass die Zahl auf der linken Seite eine obere Schranke für die Menge rechts ist, sei $B \in \mathcal{R}$ mit $B \subseteq A$ vorgegeben. Dann gilt $F \setminus B \supseteq F \setminus A$ und somit $c^*(F \setminus A) \le c^*(F \setminus B) = c(F \setminus B)$, also $c(F) - c^*(F \setminus A) \ge c(F) - c(F \setminus B) = c(B)$. Nehmen wir nun an, dass $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und $c(F) - c^*(F \setminus A) - \varepsilon$ ebenfalls eine obere Schranke der Menge ist. Nach Definition des äußeren Maßes gibt es ein $B' \in \mathcal{R}$ mit $B' \supseteq F \setminus A$ und $c(B') < c^*(F \setminus A) + \varepsilon$. Es gilt $A = F \setminus (F \setminus A) \supseteq F \setminus B'$. Setzen wir $B = F \setminus B'$, dann gilt also $B \in \mathcal{R}$, $A \supseteq B$ und $c(B) = c(F) - c(B') > c(F) - c^*(F \setminus A) - \varepsilon$, was der Eigenschaft dieser Zahl, obere Schranke der Menge $\{c(B) \mid B \subseteq A, B \in \mathcal{R}\}$ zu sein, widerspricht.

zu (ii) „$\Rightarrow$“ Ist die Menge A c-messbar, dann gilt $c_*(A) = c^*(A)$, also $c(F) - c^*(F \setminus A) = c^*(A)$ und somit $c(F) = c^*(A) + c^*(F \setminus A)$. „$\Leftarrow$“ Auf Grund der Voraussetzung und der Subadditivität von c^* gilt $c(F) = c^*(A) + c^*(F \setminus A)$. Es folgt $c_*(A) = c(F) - c^*(F \setminus A) = c^*(A)$, d.h. A ist c-messbar. □

§ 3. σ-Algebren und Maße

Zusammenfassung. Während wir im letzten Kapitel lediglich endliche Mengenoperationen zugelassen haben, erweitern wir die Strukturen dahingehend, dass auch abzählbar unendliche Mengenoperationen und Grenzwertprozesse zugelassen sind. Dies führt auf die beiden zentralen Begriffe der Maßtheorie, die *σ-Algebren* und die *Maße*. Unser Hauptergebnis wird der Fortsetzungssatz von Carathéodory sein, welcher besagt, dass unter gewissen Bedingungen ein Inhalt auf einem Ring zu einem Maß auf einer σ-Algebra fortgesetzt werden kann. Dies ermöglicht uns die Erweiterung des Jordan-Inhalts zum bekannten *Lebesgue-Maß*.

Wichtige Grundbegriffe

- σ-Ring und σ-Algebra
- Borelsche σ-Algebra
- σ-additiver Inhalt
- Maß auf einer σ-Algebra, Maßraum
- äußeres Maß auf einer Menge
- Messbarkeit bezüglich eines äußeren Maßes (μ^*-Messbarkeit)
- Lebesgue-messbare Mengen und Lebesgue-Maß

Zentrale Sätze

- σ-Additivität des Jordan-Inhalts
- Erzeugendensysteme der Borelschen σ-Algebra
- Satz über die μ^*-Messbarkeit
- Fortsetzungssatz von Carathéodory

Definition 3.1 Ein Inhalt c auf einem Mengenring $\mathcal{R}$ wird als ***σ-additiv*** oder auch ***abzählbar additiv*** bezeichnet, wenn für jede Folge $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter $A_m \in \mathcal{R}$ mit $A = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathcal{R}$ jeweils $c(A) = \sum_{m=1}^{\infty} c(A_m)$ erfüllt ist.

Unser erstes Ziel in diesem Kapitel besteht darin, die σ-Additivät des Jordan-Inhalts auf dem Ring $\mathcal{R}_n$ der Figuren nachzuweisen.

Lemma 3.2 Sei $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nichtleerer kompakter Teilmengen $A_m \subseteq \mathbb{R}^n$, es gelte also $A_m \supseteq A_{m+1} \supsetneq \varnothing$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Dann ist die Schnittmenge $A = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$ nichtleer.

Beweis: Nehmen wir an, dass $A = \varnothing$ gilt. Dann ist die Folge $(B_m)_{m\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $B_m = A_1 \setminus A_m$ eine bezüglich der Relativtopologie in A_1 offene Überdeckung von A_1, d.h. es gilt $\bigcup_{m=1}^{\infty} B_m = A_1$. Weil A_1 kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung, also $i_1, ..., i_p \in \mathbb{N}$ mit $i_1 \le ... \le i_p$ und $\bigcup_{j=1}^{p} B_{i_j} = A_1$. Wir erhalten

$$A_{i_p} = \bigcap_{j=1}^{p} A_{i_j} = \bigcap_{j=1}^{p} (A_1 \setminus B_{i_j}) = A_1 \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{p} B_{i_j} \right) = A_1 \setminus A_1 = \varnothing$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Lemma 3.3 Sei $n \in \mathbb{N}$ und c der Jordan-Inhalt auf dem Ring $\mathcal{R}$ der Figuren im $\mathbb{R}^n$. Ist $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge in $\mathcal{R}$ mit $\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m = \varnothing$, dann gilt $\lim_m c(A_m) = 0$.

Beweis: Weil die Folge $(c(A_m))_{m\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und nach unten durch 0 beschränkt ist, existiert der Grenzwert $\delta = \lim_m c_n(A_m)$ auf jeden Fall als Wert in $\mathbb{R}_+$. Nehmen wir an, dass $\delta > 0$ ist. Dann ist jedes A_m nichtleer. Nach Satz 2.5, angewendet auf den Halbring der Quader, kann jedes A_m als endliche, disjunkte Vereinigung von Quadern dargestellt werden. Indem wir jeden Quader durch einen geringfügig kleineren Quader ersetzen, finden wir jeweils eine Figur B_m mit

$$\bar{B}_m \subseteq A_m \quad \text{und} \quad c(A_m) - c(B_m) \leq 2^{-m}\delta.$$

Dabei bezeichnet $\bar{B}_m$ jeweils den topologischen Abschluss von B_m, also eine disjunkte Vereinigung abgeschlossener Quader. Definieren wir nun

$$C_m \quad = \quad B_1 \cap \ldots \cap B_m \quad ,$$

dann ist $(\bar{C}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge kompakter Teilmengen in $\mathbb{R}^n$. Nach Lemma 3.2 gilt also $\bigcap_{m=1}^{\infty} \bar{C}_m \neq \varnothing$, sofern $\bar{C}_m \neq \varnothing$ für alle $m \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. Wegen $\bar{C}_m \subseteq A_m$ ist dann erst recht $\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m \neq \varnothing$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Wir beweisen $\bar{C}_m \neq \varnothing$ für alle $m \in \mathbb{N}$, indem wir die Abschätzung

$$c(C_m) \quad \geq \quad c(A_m) - \delta(1-2^{-m}) \qquad \text{für alle} \quad m \in \mathbb{N}$$

durch vollständige Induktion herleiten. Betrachten wir zunächst den Fall $m = 1$. Nach Wahl von B_1 gilt die Ungleichung $c(A_1) - c(B_1) \leq \frac{1}{2}\delta$, also

$$c(C_1) \quad = \quad c(B_1) \quad \geq \quad c(A_1) - \tfrac{1}{2}\delta \quad = \quad c(A_1) - \delta(1-2^{-1}).$$

Sei nun $m \in \mathbb{N}$ und die Aussage für m bereits bewiesen. Wegen gilt $C_{m+1} = B_{m+1} \cap C_m$ gilt $c(B_{m+1} \cup C_m) = c(B_{m+1}) + c(C_m) - c(C_{m+1})$. Zusammen mit der Inklusion $B_{m+1} \cup C_m \subseteq A_{m+1} \cup A_m = A_m$ folgt daraus

$$c(C_{m+1}) \quad = \quad c(B_{m+1}) + c(C_m) - c(B_{m+1} \cup C_m) \quad \geq \quad c(B_{m+1}) + c(C_m) - c(A_m).$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt die Abschätzung $c(C_m) \geq c(A_m) - \delta(1-2^{-m})$, außerdem $c(A_{m+1}) - c(B_{m+1}) \leq 2^{-(m+1)}\delta$, was zu $c(B_{m+1}) \geq c(A_{m+1}) - 2^{-(m+1)}\delta$ umgestellt werden kann. Durch Einsetzen erhalten wir

$$\begin{aligned} c(C_{m+1}) \quad &\geq \quad \big(c(A_{m+1}) - 2^{-(m+1)}\delta\big) + \big(c(A_m) - \delta(1-2^{-m})\big) - c(A_m) \\ &= \quad c(A_{m+1}) - 2^{-(m+1)}\delta - \delta(1-2^{-m}) \quad = \quad c(A_{m+1}) - \delta(1-2^{-(m+1)}). \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir damit für alle $m \in \mathbb{N}$ jeweils $c(C_m) \geq c(A_m) - \delta(1-2^{-m}) \geq \delta - \delta(1-2^{-m}) = \delta 2^{-m} > 0$. Es gilt also $C_m \neq \varnothing$, damit erst recht $\bar{C}_m \neq \varnothing$ für alle $m \in \mathbb{N}$. □

Satz 3.4 Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{R}$ der Ring der Figuren im $\mathbb{R}^n$. Dann ist der Jordan-Inhalt c auf $\mathcal{R}$ ein σ-additiver Inhalt.

Beweis: Sei $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Figuren mit der Eigenschaft, dass auch $A = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$ in $\mathcal{R}_n$ enthalten ist. Definieren wir $B_m = A \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_m)$ für alle $m \in \mathbb{N}$, dann ist $(B_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge von Figuren, und es gilt $\bigcap_{m=1}^{\infty} B_m = \varnothing$. Auf Grund der Definition von B_m gilt jeweils $c(B_m) = c(A) - \sum_{k=1}^{m} c(A_k)$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Die soeben bewiesene Hilfsaussage liefert die Gleichung $\lim_n c(B_m) = 0$. Damit erhalten wir nun

$$c(A) \quad = \quad \lim_{m\to\infty} \left(c(B_m) + \sum_{k=1}^{m} c(A_k) \right) \quad = \quad \lim_{m\to\infty} c(B_m) + \sum_{m=1}^{\infty} c(A_m) \quad = \quad 0 + \sum_{m=1}^{\infty} c(A_m) \quad = \quad \sum_{m=1}^{\infty} c(A_m). \qquad \square$$

Definition 3.5 Sei Ω eine Menge. Ein ***σ-Ring*** in Ω ist ein Ring $\mathcal{R}$, der nicht nur unter endlichen, sondern auch unter abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen ist. Ist also $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{R}$, dann muss auch $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$ in $\mathcal{R}$ liegen. Man nennt $\mathcal{R}$ eine ***σ-Algebra***, wenn $\mathcal{R}$ zugleich σ-Ring und Algebra ist.

Aus der Definition ergibt sich unmittelbar

Proposition 3.6 Ein Mengensystem $\mathcal{A}$ in Ω ist genau dann eine σ-Algebra, wenn $\varnothing \in \mathcal{A}$ gilt, für jedes $A \in \mathcal{A}$ auch das Komplement $\Omega \setminus A$ in $\mathcal{A}$ liegt, und wenn für jede Folge $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ auch $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$ in $\mathcal{A}$ enthalten ist.

Jede σ-Algebra $\mathcal{A}$ ist auch abgeschlossen unter abzählbaren Durchschnitten. Ist nämlich $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{A}$, dann sind auch die Mengen $B_m = \Omega \setminus A_m$ in $\mathcal{A}$ enthalten, und mit ihnen auch

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} B_m \quad = \quad \bigcup_{m=1}^{\infty} (\Omega \setminus A_m) \quad = \quad \Omega \setminus \left(\bigcap_{m=1}^{\infty} B_m \right).$$

Dies zeigt, dass auch $\bigcap_{m=1}^{\infty} B_m$ in $\mathcal{A}$ enthalten ist.

Ebenso wie Mengenringe können auch σ-Algebren durch Angabe eines Erzeugendensystems defininiert werden. Man sagt, eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ wird durch ein System $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ***erzeugt***, wenn $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{E}$ gilt und jede σ-Algebra $\mathcal{A}'$ mit $\mathcal{A}' \supseteq \mathcal{E}$ auch $\mathcal{A}' \supseteq \mathcal{A}$ erfüllt. Wie bei den Ringen zeigt man, dass jede σ-Algebra durch die Angabe eines Erzeugendensystems eindeutig bestimmt ist.

Definition 3.7 Die eindeutig bestimmte σ-Algebra $\mathcal{B}_n$, die von den Quadern im $\mathbb{R}^n$ erzeugt wird, nennt man die ***Borelsche σ-Algebra***. Ihre Elemente bezeichnet man als ***Borelmengen***.

Für die σ-Algebra $\mathcal{B}_n$ lassen sich viele weitere Erzeugendensysteme angeben.

Satz 3.8 Die Borelsche σ-Algebra wird außer von den Quadern noch von folgenden Mengensystemen erzeugt.

(i) dem Ring der Figuren im $\mathbb{R}^n$

(ii) dem System aller offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$

(iii) dem System aller abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$

(iv) dem System aller kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$

Beweis: zu (i) Jede σ-Algebra, welche die Menge aller Quader enthält, besitzt auch alle Figuren als Elemente, denn jede Figur ist nach Definition als Vereinigung von Quadern darstellbar. Umgekehrt enthält jede σ-Algebra mit den Figuren auch alle Quader, denn nach Definition ist jeder Quader eine Figur.

zu (ii) Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra, die alle offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ enthält. Dann liegen auch alle abgeschlossenen Teilmengen (als Komplemente der offenen Mengen) in $\mathcal{A}$. Dies bedeutet, dass insbesondere alle abgeschlossenen Quader in $\mathcal{A}$ enthalten sind. Man überprüft unmittelbar, dass jeder Quader Q relativ-offen in seinem topologischen Abschluss $\bar{Q}$ ist. Deshalb kann Q als Durchschnitt von $\bar{Q}$ mit einer geeigneten offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ dargestellt werden und ist somit ebenfalls in $\mathcal{A}$ enthalten.

Sei nun $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra, die alle Quader enthält und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Wir müssen zeigen, dass U in $\mathcal{A}$ enthalten ist. Dazu betrachten wir die (abzählbare) Menge $U_{\mathbb{Q}} = U \cap \mathbb{Q}^n$ und bilden für jeden Punkt $a \in U_{\mathbb{Q}}$ den Wert

$$\delta_a \quad = \quad \sup\{\delta \in \mathbb{R}^+ \mid B_\delta(a) \subseteq U\}$$

wobei $B_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-a\|_\infty < \delta\}$ den offenen Ball um a vom Radius δ bezüglich der Maximums-Norm auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnet; dabei handelt es sich um den Würfel der Kantenlänge 2δ mit a als Zentrum. Weil U offen ist, gilt $\delta_a > 0$ für alle $a \in U_{\mathbb{Q}}$. Unser Ziel $U \in \mathcal{A}$ nachzuweisen ist erreicht, sobald wir die Gleichung

$$U \quad = \quad \bigcup_{a \in U_{\mathbb{Q}}} B_{\delta_a}(a)$$

bewiesen haben. Zunächst zeigen wir die Inklusion „$\supseteq$" und nehmen an, dass ein $a \in U_{\mathbb{Q}}$ mit $B_{\delta_a}(a) \nsubseteq U$ existiert. Sei $x \in B_{\delta_a}(a) \setminus U$. Dann gilt $\delta' = \|x-a\|_\infty < \delta_a$, und bereits jede Zahl δ'' mit $\delta' < \delta'' < \delta_a$ erfüllt die Bedingung $B_{\delta''}(a) \subseteq U$ nicht mehr. Dies widerspricht aber der Definition von δ_a. Zum Nachweis von „$\subseteq$" sei $x_0 \in U$ vorgegeben. Sei $\delta \in \mathbb{R}^+$ so gewählt, dass $B_\delta(x_0)$ in U enthalten ist und $a \in U_{\mathbb{Q}}$ mit $\|a - x_0\|_\infty < \frac{1}{2}\delta$. Auf Grund der Dreiecksungleichung gilt dann $B_{\frac{1}{2}\delta}(a) \subseteq B_\delta(x_0) \subseteq U$ (denn aus $\|x-a\|_\infty < \frac{1}{2}\delta$ folgt $\|x - x_0\|_\infty \le \|x-a\|_\infty + \|a - x_0\|_\infty < \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta = \delta$) und somit $\frac{1}{2}\delta \le \delta_a$ nach Definition von δ_a. Daraus wiederum folgt $x_0 \in B_{\delta_a}(a)$, d.h. x_0 ist in der Menge auf der rechten Seite unserer Gleichung enthalten.

zu (iii) Dies folgt direkt aus (ii), weil die abgeschlossenen Teilmengen die Komplemente der offenen sind.

zu (iv) Jede σ-Algebra, die alle abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ enthält, enthält auch alle kompakten, denn die kompakten Teilmengen sind gerade die beschränkten und abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Sei nun umgekehrt $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra, die alle kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ enthält, und sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. Dann ist $V_m = [-m,m]^n \cap V$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ kompakt, also in $\mathcal{A}$ enthalten. Damit liegt dann aber auch die abzählbare Vereinigung

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} V_m \quad = \quad \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} [-m,m]^n\right) \cap V \quad = \quad \mathbb{R}^n \cap V \quad = \quad V \qquad \text{in der } \sigma\text{-Algebra } \mathcal{A}. \qquad \square$$

Für den weiteren Verlauf definieren wir die Bezeichnung $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, wobei $-\infty$ und $+\infty$ zwei nicht in der Menge $\mathbb{R}$ enthaltene Elemente bezeichnen und die Totalordnung $\le$ auf $\mathbb{R}$ durch die Festlegung $-\infty \le a \le +\infty$ für alle $a \in \mathbb{R}$ definiert ist. Außerdem setzen wir $\bar{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Definition 3.9 Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra. Eine Funktion $\mu : \mathcal{A} \to \bar{\mathbb{R}}_+$, die den Bedingungen $\mu(\varnothing) = 0$ und $\mu(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_m)$ für jede Folge $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{A}$ genügt, wird als ***Maß*** auf $\mathcal{A}$ bezeichnet. Ein Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ bestehend aus einer Menge Ω, einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ in Ω und einem Maß μ auf $\mathcal{A}$ wird ***Maßraum*** genannt.

Insbesondere ist jeder σ-additive Inhalt auf einer σ-Algebra ein Maß. Der einzige Unterschied besteht darin, dass der Inhalt seine Werte nur in $\mathbb{R}_+$ annimmt, der Wert $\{+\infty\}$ also ausgeschlossen ist. Wir betrachten einige Beispiele für Maße.

(i) Sei Ω eine Menge. Dann bezeichnet man die Abbildung $\nu : \mathfrak{P}(\Omega) \to \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ gegeben durch $\nu(A) = |A|$ als ***Zählmaß*** auf Ω. (Wie im ersten Semester definiert wurde, ist $|A| = n \in \mathbb{N}_0$, falls eine Bijektion zwischen $M_n = \{1, 2, ..., n\}$ und A existiert, und $|A| = +\infty$, falls kein $n \in \mathbb{N}_0$ mit einer solchen Bijektion existiert.)

(ii) Sei $n \in \mathbb{N}$ und Ω eine Menge mit n Elementen. Dann ist durch $\mu : \mathfrak{P}(\Omega) \to \mathbb{R}_+$, $A \mapsto \frac{1}{n}|A|$ ein Maß auf Ω definiert, für das $\mu(\Omega) = 1$ gilt. Allgemein bezeichnet man ein Maß μ in einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mit der Eigenschaft $\mu(\Omega) = 1$ als ***Wahrscheinlichkeitsmaß***. In dem hier vorliegenden Fall kann $\mu(A)$ jeweils als Wahrscheinlichkeit dafür interpretiert werden, dass ein zufällig gewähltes Element $x \in \Omega$ in A enthalten ist.

(iii) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Existiert ein $x \in \Omega$, so dass für alle $A \in \mathcal{A}$ jeweils

$$\mu(A) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

erfüllt ist, dann bezeichnet man μ als das ***Dirac-Maß*** δ_x im Punkt x.

Im weiteren Verlauf beschäftigen wir uns nun mit der Konstruktion von Maßen und insbesondere mit der Frage, wie man Maße aus Inhalten gewinnen kann.

Definition 3.10 Eine Abbildung $\mu^* : \mathfrak{P}(\Omega) \to \bar{\mathbb{R}}_+$ wird ein ***äußeres Maß*** auf Ω genannt, wenn $\mu^*(\varnothing) = 0$ gilt, die Abbildung monoton ist (aus $A \subseteq B$ also $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ folgt) und für jede Folge $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in $\mathfrak{P}(\Omega)$ die Abschätzung

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \quad \leq \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) \qquad \text{erfüllt ist.}$$

Die zuletzt angegebene Eigenschaft des äußeren Maßes bezeichnet man als ***abzählbare Subadditivität***. Man sagt auch, das äußere Maß ist σ***-subadditiv***.

Satz 3.11 Sei $\mathcal{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ein Mengenring und $c : \mathcal{R} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ ein Inhalt. Für jedes $A \subseteq \Omega$ definieren wir

$$\mu_c^*(A) \quad = \quad \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} c(A_n) \;\middle|\; (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Folge in } \mathcal{R}, A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\} \quad ,$$

wobei $\inf(\varnothing) = +\infty$ gesetzt wird. Dann ist durch μ_c^* ein äußeres Maß auf Ω definiert.

Beweis: Zunächst gilt $\varnothing \in \mathcal{R}$ und offenbar $\mu_c^*(\varnothing) = c(\varnothing) = 0$. Für jedes $A \subseteq \Omega$ bezeichnen wir mit $s(A)$ die Menge aller Summen $\sum_{n=1}^{\infty} c(A_n)$, die durch Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{R}$ mit $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \supseteq A$ zu Stande kommen. Sind $A, B \in \mathfrak{P}(\Omega)$ mit $A \subseteq B$ vorgegeben, dann gilt $s(B) \subseteq s(A)$, denn eine Folge, die B überdeckt, überdeckt auch die Menge A. Die untere Schranke $\mu^*(A) = \inf s(A)$ ist somit auch eine untere Schranke von B, und nach Definition des Infimums folgt $\mu_c^*(B) = \inf s(B) \geq \mu_c^*(A)$. Damit haben wir die Monotonie nachgewiesen.

Zum Nachweis der dritten Bedingung sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $\mathfrak{P}(\Omega)$ und $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Wir können $\mu_c^*(A_n) < +\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ annehmen, da ansonsten die Ungleichung

$$\mu_c^*(A) \quad \leq \quad \sum_{m=1}^{\infty} \mu_c^*(A_n) \tag{3.1}$$

offensichtlich erfüllt ist. Ist $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig vorgegeben, so finden wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Folge $(A_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{R}$ mit $A_n \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{nk}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} c(A_{nk}) < \mu_c^*(A_n) + 2^{-n}\varepsilon$. Es folgt

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{nk}$$

und somit

$$\begin{aligned} \mu_c^*(A) \quad &\leq \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} c(A_{nk}) \right) \quad \leq \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_c^*(A_n) + 2^{-n}\varepsilon) \quad \leq \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \mu_c^*(A_n) + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\varepsilon \quad \leq \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu_c^*(A_n) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Weil $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ beliebig gewählt war, erhalten wir die Abschätzung (3.1). □

Definition 3.12 Das zum Jordan-Inhalt c_n auf dem Ring $\mathcal{R}_n$ der Figuren im $\mathbb{R}^n$ gehörende äußere Maß $\mu_{c_n}^*$ wird ***äußeres Lebesgue-Maß*** genannt. Wir bezeichnen es mit μ_n^*.

Für die Bestimmung des äußeren Maßes genügt es, abzählbare Vereinigungen von Quadern (an Stelle von Figuren) zu betrachten, da jede Figur nach Definition endliche Vereinigung von Quadern ist.

In Definition 2.12 hatten wir bereits jedem Inhalt c auf einem Ring ein äußeres Maß c^* zugeordnet. Für beliebige Teilmengen $A \subseteq \Omega$ gilt im Allgemeinen $c^*(A) \geq \mu_c^*(A)$, aber nicht Gleichheit. Der Grund dafür ist, dass für jede solche Teilmenge jeweils

$$\left\{ c(B) \,\middle|\, B \in \mathcal{R}\,,\ B \supseteq A \right\} \quad \supseteq \quad \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} c(A_n) \,\middle|\, (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Folge in } \mathcal{R}, A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\} \quad \text{gilt,}$$

die Mengen aber nicht übereinzustimmen brauchen. Bezogen auf den Jordan-Inhalt und das äußere Lebesgue-Maß gilt für $A = [0,1]^n \cap \mathbb{Q}^n$ beispielsweise $\mu_n^*(A) = 0$ im Gegensatz zu $c_n^*(A) = 1$. Ist H die erste Koordinatenhyperebene, also $H = \{(0, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \text{ für } 2 \leq i \leq n\}$, dann gilt $\mu_n^*(H) = 0$ und $c_n^*(H) = +\infty$.

Im allgemeinen braucht ein äußeres Maß aber nicht wie in Satz 3.11 durch einen Inhalt auf einem Ring induziert zu sein; es gibt auch andere Möglichkeiten, ein äußeres Maß auf einer Menge zu definieren. Die folgende Definition ist durch Proposition 2.23 motiviert.

Definition 3.13 Sei $\mu^* : \mathfrak{P}(\Omega) \to \bar{\mathbb{R}}_+$ ein äußeres Maß. Wir bezeichnen eine Menge $A \subseteq \Omega$ als μ^****-messbar***, wenn für alle $F \subseteq \Omega$ die Ungleichung

$$\mu^*(F) \quad \geq \quad \mu^*(F \cap A) + \mu^*(F \setminus A) \qquad \text{erfüllt ist.}$$

Man beachte, dass die angegebene Ungleichung auf Grund der Subadditivität von äußeren Maßen äquivalent zur Gleichheit ist.

Satz 3.14 Sei $\mu^* : \mathfrak{P}(\Omega) \to \bar{\mathbb{R}}_+$ ein äußeres Maß und $\mathcal{A}_{\mu^*}$ die Gesamtheit der μ^*-messbaren Mengen. Dann ist $\mathcal{A}_{\mu^*}$ eine σ-Algebra, und durch $\tilde{\mu} = \mu^*|_{\mathcal{A}_{\mu^*}}$ ist ein Maß auf $\mathcal{A}_{\mu^*}$ definiert.

Beweis: Offenbar ist $\varnothing$ in $\mathcal{A}_{\mu^*}$ enthalten, denn es gilt $\mu^*(F \cap \varnothing) = \mu^*(\varnothing) = 0$ und $\mu^*(F \setminus \varnothing) = \mu^*(F)$. Mit A ist auch $A_1 = \Omega \setminus A$ in $\mathcal{A}_{\mu^*}$ enthalten. Denn für jede Teilmenge $F \subseteq \Omega$ gilt dann $\mu^*(F) \geq \mu^*(F \cap A) + \mu^*(F \setminus A)$, und wegen $F \cap A_1 = F \cap (\Omega \setminus A) = F \setminus A$ und $F \setminus A_1 = F \setminus (\Omega \setminus A) = F \cap A$ gilt auch $\mu^*(F) \geq \mu^*(F \cap A_1) + \mu^*(F \setminus A_1)$.

Seien nun $A, B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ vorgegeben. Um zu zeigen, dass auch $A \cup B$ in $\mathcal{A}_{\mu^*}$ liegt, müssen wir die Messbarkeits-Bedingung für ein beliebiges $F \subseteq \Omega$ verifizieren. Weil die Menge A μ^*-messbar ist, gilt $\mu^*(F) = \mu^*(F \cap A) + \mu^*(F \setminus A)$, und die μ^*-Messbarkeit von B liefert

$$\mu^*(F \setminus A) \quad = \quad \mu^*((F \setminus A) \cap B) + \mu^*(F \setminus (A \cup B)).$$

Es folgt dann

$$\mu^*(F) \quad = \quad \mu^*(F \cap A) + \mu^*(F \setminus A) \quad = \quad \mu^*(F \cap A) + \mu^*((F \setminus A) \cap B) + \mu^*(F \setminus (A \cup B)) \quad \geq$$
$$\mu^*((F \cap A) \cup ((F \setminus A) \cap B)) + \mu^*(F \cap \setminus (A \cup B)) \quad = \quad \mu^*(F \cap (A \cup B)) + \mu^*(F \cap \setminus (A \cup B)) \quad ,$$

wobei im letzten Schritt die Mengengleichung

$$(F \cap A) \cup ((F \setminus A) \cap B) \quad = \quad (F \cap A) \cup (F \cap A \cap B) \cup ((F \setminus A) \cap B) \quad = \quad (F \cap A) \cup (F \cap B) \quad = \quad F \cap (A \cup B)$$

verwendet wurde. Wir haben somit gezeigt, dass $\mathcal{A}_{\mu^*}$ eine Algebra ist.

Im zweiten Teil beweisen wir nun, dass $\mathcal{A}_{\mu^*}$ eine σ-Algebra, und dass durch $\tilde{\mu} = \mu^*|_{\mathcal{A}_{\mu^*}}$ ein Maß auf $\mathcal{A}_{\mu^*}$ definiert ist. Nach Definition eines äußeren Maßes gilt $\tilde{\mu}(\varnothing) = \mu^*(\varnothing) = 0$. Seien nun $A, B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ disjunkt. Für alle $F \subseteq \Omega$ gilt auf Grund der Messbarkeit von A die Gleichung

$$\mu^*(F \cap (A \cup B)) \quad = \quad \mu^*(F \cap (A \cup B) \cap A) + \mu^*((F \cap (A \cup B)) \setminus A) \quad = \quad \mu^*(F \cap A) + \mu^*(F \cap B).$$

Durch vollständige Induktion erhalten wir

$$\mu^*(F \cap (A_1 \cup \ldots \cup A_r)) \quad = \quad \sum_{k=1}^{r} \mu^*(F \cap A_k) \tag{3.2}$$

für alle $r \in \mathbb{N}$ und paarweise disjunkte Mengen $A_1,\dots,A_r \in \mathcal{A}_{\mu^*}$. Sei nun $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{A}_{\mu^*}$. Wegen $\bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ und auf Grund der soeben bewiesenen Gleichung gilt

$$\begin{aligned}\mu^*(F) &= \mu^*\left(F \cap \left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right)\right) + \mu^*\left(F \setminus \left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right)\right)\\ &= \sum_{k=1}^n \mu^*(F \cap A_k) + \mu^*\left(F \setminus \left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right)\right).\end{aligned}$$

Lassen wir n gegen unendlich laufen, dann erhalten wir auf Grund der Monotonie von μ^* und der Inklusionsbeziehung $\bigcup_{k=1}^n A_k \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ die Ungleichung

$$\mu^*(F) \geq \sum_{n=1}^\infty \mu^*(F \cap A_n) + \mu^*\left(F \cap \setminus \left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right)\right) \tag{3.3}$$

$$\geq \mu^*\left(F \cap \left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right)\right) + \mu^*\left(F \setminus \left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right)\right) \quad , \tag{3.4}$$

wobei wir im zweiten Schritt die σ-Subadditivität des äußeren Maßes μ^* verwendet haben. Also ist $\bigcup_{n=1}^\infty A_n$ in $\mathcal{A}_{\mu^*}$ enthalten. Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige (nicht notwendig disjunkte) Folge in $\mathcal{A}_{\mu^*}$, dann definieren wir eine disjunkte Folge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $B_1 = A_1$ und $B_{n+1} = A_{n+1} \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_n)$. Es gilt $\bigcup_{n=1}^\infty A_n = \bigcup_{n=1}^\infty B_n$, also ist mit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch $\bigcup_{n=1}^\infty A_n$ in $\mathcal{A}_{\mu^*}$ enthalten.

Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nun wiederum eine disjunkte Folge in $\mathcal{A}_{\mu^*}$, dann können wir in die Ungleichung (3.3) die Menge $F = \bigcup_{k=1}^\infty A_k$ einsetzen. Wegen $A_n \cap \left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) = A_n$ und $A_n \setminus \left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) = \varnothing$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) \geq \sum_{n=1}^\infty \mu^*(A_n) + \mu^*(\varnothing) = \sum_{n=1}^\infty \mu^*(A_n).$$

Zusammen mit der abzählbaren Subadditivität von μ^* erhalten wir Gleichheit. Dies zeigt, dass die Einschränkung von μ^* auf $\mathcal{A}_{\mu^*}$ tatsächlich ein Maß liefert. □

Definition 3.15 Sei $n \in \mathbb{N}$ und μ_n^* das äußere Lebesgue-Maß auf dem $\mathbb{R}^n$. Dann bezeichnet man die Elemente der σ-Algebra $\mathcal{A}_{\mu_n^*}$ als die ***Lebesgue-messbaren*** Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, und das entsprechende Maß als ***Lebesgue-Maß***.

Für die σ-Algebra $\mathcal{A}_{\mu_n^*}$ verwenden wir die einfachere Bezeichnung $\mathcal{A}_n$, und μ_n für das Lebesgue-Maß auf $\mathcal{A}_n$.

Unsere nächste Aufgabe besteht in dem Nachweis, dass es sich beim Lebesgue-Maß μ_n um eine Fortsetzung des Jordan-Inhalts $c_n : \mathcal{R}_n \to \mathbb{R}_+$ handelt. Ausschlaggebend ist hierbei die in Satz 3.4 festgestellte σ-Additivität von c_n.

Satz 3.16 *(Fortsetzungssatz von Carathéodory)*

Sei $\mathcal{R}$ ein Ring in Ω, $c : \mathcal{R} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ ein σ-additiver Inhalt und $\mu_c^* : \mathfrak{P}(\Omega) \to \bar{\mathbb{R}}_+$ das zu c gehörende äußere Maß. Mit der Notation aus Satz 3.14 gilt dann $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}_{\mu_c^*}$ und außerdem $\mu_c^*|_{\mathcal{R}} = c$, d.h. c wird durch μ_c^* fortgesetzt.

Beweis: Wir bemerken vorweg, dass aus der σ-Additivität von c die abzählbare Subadditivität folgt. Sei nämlich $(B_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{R}$ mit der Eigenschaft, dass auch $B = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$ in $\mathcal{R}$ enthalten ist. Dann können wir dieser Folge wie im Beweis von Satz 3.14 eine Folge paarweise disjunkter Mengen $(C_m)_{m\in\mathbb{N}}$ mit $C_m \subseteq B_m$ und $\bigcup_{k=1}^{m} B_k = \bigcup_{k=1}^{m} C_k$ für alle $m \in \mathbb{N}$ zuordnen, und wegen $B = \bigcup_{m=1}^{\infty} C_m$ gilt dann

$$c(B) \quad = \quad c\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} C_m\right) \quad = \quad \sum_{m=1}^{\infty} c(C_m) \quad \leq \quad \sum_{m=1}^{\infty} c(B_m).$$

Für ein beliebig vorgegebenes $A \in \mathcal{R}$ beweisen wir nun zunächst die Gleichung $c(A) = \mu_c^*(A)$. Definieren wir die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{R}$ durch $A_1 = A$ und $A_n = \varnothing$ für $n \geq 2$, dann gilt wegen $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supseteq A$ nach Definition des äußeren Maßes die Ungleichung $\mu_c^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} c(A_n)$, und die Summe ist offenbar gleich $c(A)$; insbesondere ist $\mu_c^*(A)$ also endlich. Sei nun $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $\mathcal{R}$ mit

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c(A_n) < +\infty \ ;$$

dass es mindestens eine solche Folge gibt, haben wir soeben nachgewiesen. Die abzählbare Subadditivität von c und die Gleichung $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap A_n)$ liefern

$$c(A) \quad = \quad c\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap A_n)\right) \quad \leq \quad \sum_{n=1}^{\infty} c(A \cap A_n) \quad \leq \quad \sum_{n=1}^{\infty} c(A_n).$$

Bilden wir das Infimum über alle Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{R}$ mit $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, dann erhalten wir $c(A) \leq \mu_c^*(A)$, insgesamt also Gleichheit.

Nun beweisen wir die Inklusion $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}_{\mu_c^*}$. Für gegebene $A \in \mathcal{R}$ und $F \subseteq \Omega$ müssen wir die Ungleichung

$$\mu_c^*(F) \quad \geq \quad \mu_c^*(F \cap A) + \mu_c^*(F \setminus A) \qquad \text{nachweisen.}$$

Im Fall $\mu_c^*(F) = +\infty$ ist nichts zu zeigen; wir können also davon ausgehen, dass eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{R}$ mit $F \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} c(A_n) < +\infty$ existiert. Die Mengen $A_n \cap A$ bilden eine Überdeckung von $F \cap A$, und die Mengen $A_n \setminus A$ eine Überdeckung von $F \setminus A$ durch Elemente aus $\mathcal{R}$. Wir erhalten somit die Abschätzung

$$\begin{aligned} \mu_c^*(F \cap A) + \mu_c^*(F \setminus A) \quad &\leq \quad \sum_{n=1}^{\infty} c(A_n \cap A) + \sum_{n=1}^{\infty} c(A_n \setminus A) \\ = \quad \sum_{n=1}^{\infty} (c(A_n \cap A) + c(A_n \cap \setminus A)) \quad &= \quad \sum_{n=1}^{\infty} c(A_n) < +\infty. \end{aligned}$$

Durch Übergang zum Infimum über alle Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{R}$ mit $F \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ erhalten wir die gewünschte Abschätzung $\mu_c^*(F \cap A) + \mu_c^*(F \setminus A) \leq \mu_c^*(F)$. Also ist A in $\mathcal{A}_{\mu_c^*}$ enthalten. □

Folgerung 3.17 Der Ring $\mathcal{R}_n$ der Figuren im $\mathbb{R}^n$ ist in der σ-Algebra $\mathcal{A}_n$ der Lebesgue-messbaren Mengen enthalten. Damit ist auch die Borel-Algebra $\mathcal{B}_n$ im $\mathbb{R}^n$ eine Teilmenge von $\mathcal{A}_n$ (denn dies ist nach Definition die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{R}$ enthält). Das Lebesgue-Maß μ_n stimmt auf $\mathcal{R}_n$ mit dem Jordan-Inhalt überein.

Im nächsten Kapitel werden wir zeigen, dass auch der in § 2 definierte Ring der Jordan-messbaren Teilmengen in $\mathcal{A}_n$ enthalten ist, und dass der Jordan-Inhalt c_n auf diesem Ring mit dem Lebesgue-Maß μ_n übereinstimmt.

§ 4. Eindeutigkeit der Fortsetzung und Vollständigkeit

Zusammenfassung. Nach dem Fortsetzungssatz von Carathéodory aus dem letzten Kapitel kann jeder σ-additive Inhalt c auf einem Ring $\mathcal{R}$ zu einem Maß auf einer gewissen σ-Algebra $\mathcal{A}_{\mu^*}$ fortgesetzt werden kann. Dadurch erhalten wir auch eine Fortsetzung von c zu einem Maß auf der von $\mathcal{R}$ erzeugten σ-Algebra $\sigma(\mathcal{R})$. Mit Hilfe des Konzepts der *Dynkin-Systeme* werden wir in diesem Kapitel zeigen, dass diese Fortsetzung unter der Voraussetzung, dass c nicht nur σ-additiv, sondern auch σ-endlich ist, eindeutig bestimmt ist.

Eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ wird als *vollständig* bezüglich eines Maßes μ bezeichnet, wenn jede Teilmenge einer μ-Nullmenge (also einer Menge $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0$) ebenfalls in $\mathcal{A}$ enthalten ist. Auf jeden Fall kann $\mathcal{A}$ stets zu einer vollständigen σ-Algebra erweitert werden; diesen Vorgang bezeichnet man als *Vervollständigung*. Wir zeigen, dass für einen σ-additiven, σ-endlichen Inhalt auf einem Ring $\mathcal{R}$ die σ-Algebra $\mathcal{A}_{\mu^*}$ aus dem Fortsetzungssatz eine Vervollständigung von $\sigma(\mathcal{R})$ darstellt. Insbesondere ist die σ-Algebra $\mathcal{A}_n$ der Lebesgue-messbaren Mengen eine Vervollständigung der Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}_n$.

Wichtige Grundbegriffe

- Dynkin-System
- $\cap$-stabiles Mengensystem
- σ-endlicher Inhalt
- vollständiger Maßraum, Vervollständigung

Zentrale Sätze

- Eindeutigkeit der Fortsetzung σ-endlicher Inhalte
- μ^*-Kriterium für die Messbarkeit in vollständigen Maßräumen
- Lebesgue-messbare Mengen als Vervollständigung der Borelschen σ-Algebra
- innere und äußerer Regularität des Lebesgue-Maßes

In diesem Kapitel soll ein hinreichendes Kriterium dafür ermittelt werden, dass die Fortsetzung von einem Inhalt auf eine σ-Algebra eindeutig bestimmt ist. Der folgende Begriff wird für den Beweis dieses Eindeutigkeitsresultats eine wichtige Rolle spielen.

Definition 4.1 Eine Teilmenge $\mathcal{D} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ heißt ***Dynkin-System*** in Ω, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

(i) Es gilt $\varnothing \in \mathcal{D}$.

(ii) Für jedes $D \in \mathcal{D}$ liegt auch $\Omega \setminus D$ in $\mathcal{D}$.

(iii) Ist $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{D}$, dann ist auch die Vereinigungsmenge $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ in $\mathcal{D}$ enthalten.

Auch endliche disjunkte Vereinigungen von Elementen aus einem Dynkin-System $\mathcal{D}$ sind wieder in $\mathcal{D}$ enthalten; man betrachtet dazu Folgen, in denen alle bis auf endliche viele Mengen leer sind. Sind $D, E \in \mathcal{D}$ mit $D \subseteq E$, dann liegt auch die Menge $E \setminus D = E \cap (\Omega \setminus D) = \Omega \setminus (D \cup (\Omega \setminus E))$ in $\mathcal{D}$. Die Definition des Dynkin-Systems bleibt erhalten, wenn man die Bedingungen (i),(ii) durch

(i)' $\Omega \in \mathcal{D}$

(ii)' $D, E \in \mathcal{D}, D \subseteq E \Rightarrow E \setminus D \in \mathcal{D}$

ersetzt, denn es gilt $\varnothing = \Omega \setminus \Omega$ für alle $D \in \mathcal{D}$.

Nach Definition ist eine σ-Algebra in Ω ein Mengensystem $\mathcal{A}$ mit $\varnothing \in \mathcal{A}$, dass unter Komplementbildung und abzählbaren Vereinigungen *beliebiger* Mengen abgeschlossen ist. Somit ist jede σ-Algebra auch ein Dynkin-System. Es stellt sich die Frage, welche zusätzliche Eigenschaft ein Dynkin-System benötigt, um zu einer σ-Algebra zu werden. Allgemein bezeichnen wir ein Mengensystem $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ als ***∩-stabil***, wenn für alle $A, B \in \mathcal{E}$ auch $A \cap B$ in $\mathcal{E}$ liegt.

Satz 4.2 Ein Dynkin-System ist genau dann eine σ-Algebra, wenn es ∩-stabil ist.

Beweis: Jede σ-Algebra ist ∩-stabil und (wie wir bereits festgestellt haben) ein Dynkin-System. Sei nun $\mathcal{D}$ ein ∩-stabiles Dynkin-System; wir zeigen, dass D eine σ-Algebra ist. Zunächst gilt nach Definition $\varnothing \in \mathcal{D}$. Sind $A, B \in \mathcal{D}$ vorgegeben, dann liegt nach Voraussetzung auch $A \cap B$ in $\mathcal{D}$, damit auch $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ wegen $A \cap B \subseteq A$ nach (ii)' und $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$ wegen $(A \setminus B) \cap B = \varnothing$ nach (iii). Es bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{D}$ abgeschlossen unter abzählbaren Vereinigungen ist. Sei dazu $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $\mathcal{D}$. Definieren wir $A'_0 = \varnothing$ und $A'_{n+1} = A'_n \cup A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad = \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} (A'_{n+1} \setminus A'_n).$$

Die Inklusion „⊇“ ist offensichtlich. Ist x ein Element der Menge auf der linken Seite, dann wählen wir $n \in \mathbb{N}_0$ minimal mit $x \in A_{n+1}$ und erhalten $x \in A'_{n+1} \setminus A'_n$. Wir haben bereits gezeigt, dass $\mathcal{D}$ abgeschlossen unter endlichen Vereinigungen und Differenzbildung ist. Deshalb sind die Mengen A'_n ud $A'_{n+1} \setminus A'_n$ in $\mathcal{D}$ enthalten. Außerdem sind die Mengen $A'_{n+1} \setminus A'_n$ paarweise disjunkt; dies zeigt, dass auch die Vereinigungsmenge $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ in $\mathcal{D}$ liegt. □

Ist $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ein beliebiges Mengensystem, dann bezeichnen wir von nun an mit $\sigma(\mathcal{E})$ die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra und mit $\delta(\mathcal{E})$ das von $\mathcal{E}$ erzeugte Dynkin-System, also das kleinste Dynkin-System in Ω, dass $\mathcal{E}$ als Teilmenge enthält. Der folgende Satz spielt für die Konstruktion von σ-Algebren eine wichtige Rolle.

Satz 4.3 Für jedes ∩-stabile Mengensystem $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ gilt $\delta(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$.

Beweis: Jede σ-Algebra ist ein Dynkin-System, insbesondere auch $\sigma(\mathcal{E})$. Weil $\delta(\mathcal{E})$ nach Definition das *kleinste* Dynkin-System ist, das $\mathcal{E}$ umfasst, gilt $\delta(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\mathcal{E})$. Wir zeigen nun, dass $\delta(\mathcal{E})$ eine σ-Algebra ist und beweisen auf diesem Wege die Übereinstimmung $\delta(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$. Wegen Satz 4.2 genügt es zu zeigen, dass $\delta(\mathcal{E})$ ein ∩-stabiles Mengensystem ist. Für jedes $D \in \delta(\mathcal{E})$ definieren wir das Mengensystem

$$\mathcal{D}_D \quad = \quad \{Q \in \mathfrak{P}(\Omega) \mid Q \cap D \in \delta(\mathcal{E})\}$$

und überprüfen, dass es sich jeweils um ein Dynkin-System handelt: Wegen $\Omega \cap D = D \in \delta(\mathcal{E})$ ist zunächst $\Omega \in \mathcal{D}_D$, also Bedingung (i)' erfüllt. Sind $Q, R \in \mathcal{D}_D$ mit $Q \subseteq R$, dann liegen $Q \cap D$ und $R \cap D$ in $\delta(\mathcal{E})$. Es gilt $Q \cap D \subseteq R \cap D$ und somit $(R \setminus Q) \cap D = (R \cap D) \setminus (Q \cap D) \in \delta(\mathcal{E})$, weil $\delta(\mathcal{E})$ ein Dynkin-System ist. Also ist auch $R \setminus Q$ in $\mathcal{D}_D$ enthalten und somit Eigenschaft (ii)' bewiesen. Sei nun $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen $D_n \in \mathcal{D}_D$. Dann gilt $D_n \cap D \in \delta(\mathcal{E})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weil die Mengen $D_n \cap D$ paarweise disjunkt und $\delta(\mathcal{E})$ ein Dynkin-System ist, folgt

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \right) \cap D \quad = \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} (D_n \cap D) \quad \in \delta(\mathcal{E})$$

und damit $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathcal{D}_D$. Damit ist auch die Eigenschaft (iii) nachgewiesen. Nun beweisen wir die $\cap$-Stabilität von $\delta(\mathcal{E})$ in drei Schritten.

1. Schritt: $A, B \in \mathcal{E} \Rightarrow A \cap B \in \delta(\mathcal{E})$
Die Aussage ist klar, denn wegen der $\cap$-Stabilität liegt $A \cap B$ in $\mathcal{E}$ und damit auch in $\delta(\mathcal{E})$.

2. Schritt: $A \in \delta(\mathcal{E}), B \in \mathcal{E} \Rightarrow A \cap B \in \delta(\mathcal{E})$
Sei $B \in \mathcal{E}$ beliebig vorgegeben. Nach Schritt 1 gilt $A \in \mathcal{E} \Rightarrow A \cap B \in \delta(\mathcal{E})$ für beliebiges A, also $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_B$. Weil $\mathcal{D}_B$ ein Dynkin-System ist, folgt $\delta(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}_B$, also $A \cap B \in \delta(\mathcal{E})$ für alle $A \in \delta(\mathcal{E})$. Weil B beliebig gewählt war, erhalten wir die gewünschte Aussage.

3. Schritt: $A, B \in \delta(\mathcal{E}) \Rightarrow A \cap B \in \delta(\mathcal{E})$
Sei $A \in \delta(\mathcal{E})$ beliebig vorgegeben. Nach Schritt 2 gilt $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_A$ und somit $\delta(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}_A$, weil $\mathcal{D}_A$ ein Dynkin-System ist. Es folgt $A \cap B \in \delta(\mathcal{E})$ für alle $B \in \delta(\mathcal{E})$. Weil A beliebig gewählt war, ist damit die $\cap$-Stabilität von $\delta(\mathcal{E})$ bewiesen. □

Wir können nun den Beweis des Eindeutigkeitssatzes in Angriff nehmen.

> **Proposition 4.4** Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra in Ω, $\mathcal{E}$ ein $\cap$-stabiles Erzeugendensystem von $\mathcal{A}$, und sei $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{E}$ mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \Omega$. Sind μ_1, μ_2 Maße auf $\mathcal{A}$ mit $\mu_1(E) = \mu_2(E)$ für alle $E \in \mathcal{E}$, und nehmen beide auf den Elementen der Folge $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nur endliche Werte an, dann folgt $\mu_1 = \mu_2$.

Beweis: Sei $\mathcal{E}_e$ die Menge aller $E \in \mathcal{E}$ mit $\mu_1(E), \mu_2(E) < +\infty$; nach Voraussetzung gilt $E_n \in \mathcal{E}_e$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für jedes $E \in \mathcal{E}_e$ definieren wir

$$\mathcal{D}_E \quad = \quad \{D \in \mathcal{A} \mid \mu_1(E \cap D) = \mu_2(E \cap D)\}.$$

Wir überprüfen, dass durch $\mathcal{D}_E$ dann jeweils ein Dynkin-System gegeben ist. Wegen $\mu_1(E \cap \varnothing) = \mu_1(\varnothing) = 0 = \mu_2(\varnothing) = \mu_2(E \cap \varnothing)$ ist $\varnothing$ in $\mathcal{D}_E$ enthalten. Sei nun $D \in \mathcal{D}_E$ vorgegeben. Dann gilt $\mu_1(E \cap D) = \mu_2(E \cap D)$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \mu_1(E \cap (\Omega \setminus D)) \quad &= \quad \mu_1(E \setminus (E \cap D)) \quad = \quad \mu_1(E) - \mu_1(E \cap D) \quad = \quad \mu_2(E) - \mu_2(E \cap D) \\ &= \quad \mu_2(E \setminus (E \cap D)) \quad = \quad \mu_2(E \cap (\Omega \setminus D)) \end{aligned}$$

und somit $\Omega \setminus D \in \mathcal{D}_E$, wobei im zweiten und vierten Schritt der Rechnung zu beachten ist, dass wegen $E \in \mathcal{E}_e$ mit $\mu_1(E), \mu_2(E)$ auch die Werte $\mu_1(E \cap D), \mu_2(E \cap D)$ endlich sind. Sei schließlich $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{D}_E$. Dann gilt $\mu_1(E \cap D_n) = \mu_2(E \cap D_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Setzen wir $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$, dann folgt aus der σ-Additivität der Maße μ_1 und μ_2 die Gleichheit

$$\mu_1(E \cap D) \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(E \cap D_n) \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(E \cap D_n) \quad = \quad \mu_2(E \cap D)$$

und somit $D \in \mathcal{D}_E$. Damit sind alle Eigenschaften eines Dynkin-Systems für $\mathcal{D}_E$ nachgerechnet.

Im nächsten Schritt zeigen wir nun, dass $\mathcal{D}_E = \mathcal{A}$ für jedes $E \in \mathcal{E}_e$ gilt. Sei $E \in \mathcal{E}_e$ vorgegeben. Ist $A \in \mathcal{E}$, dann gilt $A \cap E \in \mathcal{E}$ auf Grund der $\cap$-Stabilität von $\mathcal{E}$. Es folgt $\mu_1(A \cap E) = \mu_2(A \cap E)$ und somit $A \in \mathcal{D}_E$. Damit ist die Inklusion $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_E$ nachgewiesen. Weil $\mathcal{D}_E$ ein Dynkin-System ist, gilt sogar $\delta(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}_E$. Weil $\mathcal{E}$ ein $\cap$-stabiles Mengensystem ist, gilt $\delta(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}$ nach Satz 4.3. Zusammen mit $\delta(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}_E \subseteq \mathcal{A}$ folgt $\mathcal{D}_E = \mathcal{A}$.

Sei nun $A \in \mathcal{A}$ ein beliebiges Element. Wegen $\mathcal{D}_E = \mathcal{A}$ gilt $\mu_1(E \cap A) = \mu_2(E \cap A)$ für alle $E \in \mathcal{E}_e$. Weil die Folge $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach Voraussetzung in $\mathcal{E}_e$ enthalten ist, gilt auch $\mu_1(E_n \cap A) = \mu_2(E_n \cap A)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei nun die Folge $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch $F_1 = E_1$ und $F_{n+1} = E_{n+1} \setminus (E_1 \cup \ldots \cup E_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann sind die Mengen F_n paarweise disjunkt, und es gilt $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \Omega$. Wegen $F_n \cap A \in \mathcal{A}$ gilt außerdem

$$\mu_1(F_n \cap A) \quad = \quad \mu_1(E_n \cap F_n \cap A) \quad = \quad \mu_2(E_n \cap F_n \cap A) \quad = \quad \mu_2(F_n \cap A)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit Hilfe der disjunkten Zerlegung $A = \Omega \cap A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_n \cap A)$ und der σ-Additivität von μ_1 und μ_2 erhalten wir

$$\mu_1(A) \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(F_n \cap A) \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(F_n \cap A) \quad = \quad \mu_2(A).$$

Also stimmen die Maße μ_1 und μ_2 auf der gesamten σ-Algebra $\mathcal{A}$ überein. □

Definition 4.5 Sei $\mathcal{R}$ ein Ring in Ω. Einen Inhalt $\mu : \mathcal{R} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ bezeichnet man als ***σ-endlich***, wenn eine monoton wachsende Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{R}$ mit $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ und $\mu(A_n) < +\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert.

Die Bedingung „monoton wachsend" kann auch weggelassen werden, da man eine gegebene Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{R}$ mit den Eigenschaften $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ und $\mu(A_n) < +\infty$ immer durch die Folge $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $B_n = A_1 \cup \ldots \cup A_n$ für $n \in \mathbb{N}$ ersetzen kann.

Satz 4.6 *(Eindeutigkeitssatz)*

Sei $\mathcal{R}$ ein Mengenring. Dann kann jeder σ-additive und σ-endliche Inhalt $c : \mathcal{R} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ auf einem Ring $\mathcal{R}$ auf eindeutige Weise zu einem Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$, der von $\mathcal{R}$ erzeugten σ-Algebra, fortgesetzt werden.

Beweis: Nach Satz 3.16 existiert eine Fortsetzung von c zu einem Maß $\tilde{\mu}$ auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}_{\mu^*}$ mit $\mathcal{A}_{\mu^*} \supseteq \mathcal{R}$. Weil $\sigma(\mathcal{R})$ die kleinste σ-Algebra ist, die $\mathcal{R}$ umfasst, gilt $\sigma(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{A}_{\mu^*}$. Damit ist die Existenz bewiesen. Seien nun $\mu_1, \mu_2 : \sigma(\mathcal{R}) \to \bar{\mathbb{R}}_+$ zwei verschiedene Fortsetzungen von μ auf $\mathcal{R}$. Als Ring ist $\mathcal{R}$ stabil unter Durchschnitten, außerdem ein Erzeugendensystem von $\sigma(\mathcal{R})$. Durch die σ-Endlichkeit ist gewährleistet, dass wir Proposition 4.4 auf $\mathcal{E} = \mathcal{R}$ anwenden können. Es folgt $\mu_1 = \mu_2$. □

Ist $\mathcal{R}_d$ der Ring der Figuren im $\mathbb{R}^d$, dann gibt es also genau eine Möglichkeit, den Jordan-Inhalt c_d von $\mathcal{R}_d$ zu einem Maß auf der Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}_d$ fortzusetzen, und zwar durch das Lebesgue-Maß, eingeschränkt auf $\mathcal{B}_d$.

Definition 4.7 Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra und $\mu : \mathcal{A} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ ein Maß. Wir nennen $\mathcal{A}$ ***vollständig*** bezüglich μ, wenn jede Teilmenge A einer Menge $B \in \mathcal{A}$ mit $\mu(B) = 0$ ebenfalls in $\mathcal{A}$ enthalten ist. Wir bezeichnen μ in diesem Fall als ***vollständiges Maß*** und das Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ als ***vollständigen Maßraum***.

Satz 4.8 Sei $\mu^* : \mathfrak{P}(\Omega) \to \bar{\mathbb{R}}_+$ ein äußeres Maß und $\tilde{\mu} : \mathcal{A}_{\mu^*} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ das in Satz 3.14 konstruierte zugehörige Maß. Dann ist $(\Omega, \mathcal{A}_{\mu^*}, \tilde{\mu})$ ein vollständiger Maßraum.

Beweis: Sei $B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ mit $\tilde{\mu}(B) = 0$ und $A \subseteq B$. Zu zeigen ist, dass A in $\mathcal{A}_{\mu^*}$ liegt, dass also $\mu^*(F) \geq \mu^*(F \cap A) + \mu^*(F \setminus A)$ für alle $F \subseteq \Omega$ gilt. Sei also $F \in \mathfrak{P}(\Omega)$ beliebig vorgegeben. Auf Grund der Monotonie des äußeren Maßes gilt $\mu^*(F \setminus A) \leq \mu^*(F)$ und $\mu^*(F \cap A) \leq \mu^*(B) = 0$. Insgesamt erhalten wir tatsächlich $\mu^*(F \cap A) + \mu^*(F \setminus A) \leq \mu^*(F)$. □

Durch den folgenden Satz wird die Aussage aus Folgerung 2.19 erweitert.

Satz 4.9 Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum und $\mu^* : \mathfrak{P}(\Omega) \to \bar{\mathbb{R}}_+$ das dem Inhalt nach Satz 3.11 zugeordnete äußere Maß. Ist $A \subseteq \Omega$ eine Teilmenge und $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{A}$ mit $\mu(A_n) < +\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\lim_{n \to \infty} \mu^*(A \Delta A_n) \quad = \quad 0 \quad ,$$

dann gilt $A \in \mathcal{A}$ und $\lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

Beweis: Wegen $A \setminus A_n, A_n \setminus A \subseteq A \Delta A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt auch $\lim_{n \to \infty} \mu^*(A \setminus A_n) = \lim_{n \to \infty} \mu^*(A_n \setminus A) = 0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ finden wir also ein $B_n \in \mathcal{A}$, $B_n \supseteq A \setminus A_n$, so dass $\lim_{n \to \infty} \mu(B_n) = 0$ gilt. Setzen wir $C_n = A_n \cup B_n$, dann ist $A \subseteq C_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Außerdem gilt $C_n \setminus A = (A_n \setminus A) \cup (B_n \setminus A) \subseteq (A_n \setminus A) \cup B_n$, also $\mu^*(C_n \setminus A) \leq \mu^*(A_n \setminus A) + \mu^*(B_n)$ und somit $\lim_{n \to \infty} \mu^*(C_n \setminus A) = 0$. Setzen wir $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$, dann gilt $C \supseteq A$ und $0 \leq \mu^*(C \setminus A) \leq \mu^*(C_n \setminus A)$; durch den Grenzübergang $n \to \infty$ erhält man $\mu^*(C \setminus A) = 0$.

Wir wählen nun für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $M_n \in \mathcal{A}$ mit $M_n \supseteq C \setminus A$ und $\mu(M_n) < \frac{1}{n}$. Dann ist $M = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$ ein Element in $\mathcal{A}$ mit $M \supseteq C \setminus A$, außerdem gilt $\mu(M) \leq \mu(M_n) < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $\mu(M) = 0$. Auf Grund der Vollständigkeit von $\mathcal{A}$ bezüglich μ ist damit auch $C \setminus A$ in $\mathcal{A}$ enthalten. Damit ist auch $A = C \setminus (C \setminus A)$ ein Element der σ-Algebra $\mathcal{A}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $A \cup (A_n \setminus A) = A \cup A_n = A_n \cup (A \setminus A_n)$. Zusammen mit $\lim_{n \to \infty} \mu(A_n \setminus A) = \lim_{n \to \infty} \mu(A \setminus A_n) = 0$ folgt daraus

$$\mu(A) \quad = \quad \lim_{n \to \infty} (\mu(A) + \mu(A_n \setminus A)) \quad = \quad \lim_{n \to \infty} (\mu(A_n) + \mu(A \setminus A_n)) \quad = \quad \lim_{n \to \infty} \mu(A_n).$$ □

Folgerung 4.10 Jede Jordan-messbare Teilmenge $E \subseteq \mathbb{R}^d$ ist in $\mathcal{A}_d$ enthalten, und es gilt jeweils $\mu_d(E) = c_d(E)$, d.h. der Jordan-Inhalt stimmt mit dem Lebesgue-Maß von A überein.

Beweis: Ist $E \subseteq \mathbb{R}^d$ Jordan-messbar, dann existiert nach Folgerung 2.19 eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Figuren, die die Bedingung $\lim_n c_d^*(A_n \,\Delta\, E) = 0$ erfüllt. Wie wir im Anschluss an Definition 3.12 bemerkt haben, gilt $\mu_d^*(A) \le c_d^*(A)$ für beliebige Teilmengen $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Deshalb gilt auch $\lim_n \mu_d^*(A_n \,\Delta\, E) = 0$, und außerdem $\mu_d^*(A_n \,\Delta\, E) \le c_d^*(A_n \,\Delta\, E) \le c_d^*(E) < +\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Durch Anwendung von Satz 4.9 folgt $E \in \mathcal{A}_d$, und zusammen mit Folgerung 2.19 erhalten wir $\mu_d(E) = \lim_n \mu_d(A_n) = \lim_n c_d(A_n) = c_d(E)$, wobei wir im zweiten Schritt verwendet haben, dass μ_d den Jordan-Inhalt vom Ring $\mathcal{R}_d$ der Figuren auf $\mathcal{A}_d$ fortsetzt. □

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Ein weiteres Maß $(\Omega, \mathcal{B}, \nu)$ wird ***Erweiterung*** von $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ genannt, wenn $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ und $\nu|_{\mathcal{A}} = \mu$ gilt. Wir werden nun zeigen, dass jeder Maßraum eine eindeutig bestimmte minimale vollständige Erweiterung besitzt.

Proposition 4.11 Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Dann ist

$$\bar{\mathcal{A}} \quad = \quad \{A \cup N \mid A \in \mathcal{A} \,,\; N \in \mathfrak{P}(\Omega) \,,\; \exists M \in \mathcal{A} : \mu(M) = 0 \wedge N \subseteq M\}$$

eine σ-Algebra mit $\bar{\mathcal{A}} \supseteq \mathcal{A}$.

Beweis: Die Inklusion $\mathcal{A} \subseteq \bar{\mathcal{A}}$ ist wegen $\varnothing \in \mathcal{A}$ offensichtlich, damit auch $\varnothing \in \bar{\mathcal{A}}$. Sei nun $B \in \bar{\mathcal{A}}$ vorgegeben. Dann gibt es ein $M \in \mathcal{A}$ mit $\mu(M) = 0$ und eine Teilmenge $N \subseteq M$ mit $B = A \cup N$. Nun gilt

$$\Omega \setminus B \quad = \quad \Omega \setminus (A \cup N) \quad = \quad (\Omega \setminus A) \cap (\Omega \setminus N) \quad = \quad (\Omega \setminus A) \cap ((M \setminus N) \cup (\Omega \setminus M)) \quad =$$
$$((\Omega \setminus A) \cap (M \setminus N)) \cup ((\Omega \setminus A) \cap (\Omega \setminus M)) \quad = \quad ((\Omega \setminus A) \cap (M \setminus N)) \cup (\Omega \setminus (A \cup M)).$$

Die Menge $(\Omega \setminus A) \cap (M \setminus N)$ ist enthalten in der Menge M mit $\mu(M) = 0$. Die Menge $\Omega \setminus (A \cup M)$ ist ein Element von $\mathcal{A}$, weil $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist. Nach Definition ist $\Omega \setminus B$ damit ein Element aus $\bar{\mathcal{A}}$.

Sei nun $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\bar{\mathcal{A}}$. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ jeweils Mengen $A_n, M_n \in \mathcal{A}$ und Teilmengen $N_n \subseteq M_n$, so dass $\mu(M_n) = 0$ und $B_n = A_n \cup N_n$ erfüllt ist. Es gilt

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \quad = \quad \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n\right).$$

Die Menge $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ liegt in $\mathcal{A}$, weil $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist. Auch die Menge $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ liegt in $\mathcal{A}$, und auf Grund der σ-Additivität von μ gilt $\mu(M) = 0$. Ferner ist $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ eine Teilmenge von M. Insgesamt haben wir damit nachgewiesen, dass $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ in $\bar{\mathcal{A}}$ enthalten ist. Damit sind für $\bar{\mathcal{A}}$ alle Eigenschaften einer σ-Algebra verifiziert. □

Proposition 4.12 Es gibt auf $\bar{\mathcal{A}}$ eine Funktion $\bar{\mu} : \bar{\mathcal{A}} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ mit der folgenden Eigenschaft:
Ist $B \in \bar{\mathcal{A}}$, und sind $A, M \in \mathcal{A}$ Mengen mit $\mu(M) = 0$ und $N \subseteq M$ mit $B = A \cup N$, dann gilt $\bar{\mu}(B) = \mu(A)$.

Beweis: Nach Definition von $\bar{\mathcal{A}}$ können wir für jedes $B \in \bar{\mathcal{A}}$ jeweils Elemente A_B, M_B der σ-Algebra $\mathcal{A}$ mit $\mu(M_B) = 0$ und eine Teilmenge $N_B \subseteq M_B$ wählen, so dass $B = A_B \cup N_B$ erfüllt ist. Wir definieren dann jeweils $\bar{\mu}(B) = \mu(A_B)$. Zu überprüfen ist, dass $\bar{\mu}$ die im Satz angegebene Eigenschaft besitzt. Wir bezeichnen mit μ^* das dem Inhalt μ nach Satz 3.11 zugeordnete äußere Maß. Nach Satz 3.16 gilt $\mu^*(A) = \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$.

Sei nun $B \in \bar{\mathcal{A}}$ vorgegeben, und seien $A, M \in \mathcal{A}$ und $N \subseteq M$, so dass die Bedingungen $B = A \cup N$ und $\mu(M) = 0$ erfüllt sind. Zu zeigen ist $\bar{\mu}(B) = \mu(A)$. Es gilt

$$\begin{aligned} \bar{\mu}(B) &= \mu(A_B) = \mu^*(A_B) \leq \mu^*(A_B \cup N_B) = \mu^*(B) = \mu^*(A \cup N) \leq \mu^*(A \cup M) \\ &= \mu(A \cup M) \leq \mu(A) + \mu(M) = \mu(A) + 0 = \mu(A). \end{aligned}$$

Ebenso erhält man

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu^*(A) \leq \mu^*(A \cup N) = \mu^*(B) = \mu^*(A_B \cup N_B) \leq \\ \mu(A_B \cup M_B) &= \mu(A_B) + \mu(M_B) = \mu(A_B) + 0 = \mu(A_B) = \bar{\mu}(B). \end{aligned}$$

Insgesamt gilt also tatsächlich $\bar{\mu}(B) = \mu(A)$. □

Proposition 4.13 Durch die Funktion $\bar{\mu}$ ist ein vollständiges Maß auf $\bar{\mathcal{A}}$ definiert.

Beweis: Nach Definition gilt $\bar{\mu}(\varnothing) = \mu(\varnothing) = 0$. Sei nun $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\bar{\mathcal{A}}$ und $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Zu zeigen ist $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(B_n) = \bar{\mu}(B)$.

Nach Definition von $\bar{\mathcal{A}}$ gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ jeweils $A_n, M_n \in \mathcal{A}$ und Teilmengen $N_n \subseteq M_n$, so dass $B_n = A_n \cup N_n$ und $\mu(M_n) = 0$ erfüllt ist. Setzen wir $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ und $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, dann gilt $B = A \cup N$, $N \subseteq M$, und außerdem $\mu(M) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(M_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$. Auf Grund der Definition von $\bar{\mu}$ folgt daraus $\bar{\mu}(B) = \mu(A)$, und ebenso gilt $\bar{\mu}(B_n) = \mu(A_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weil auch $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ eine disjunkte Vereinigung ist, erhalten wir insgesamt

$$\bar{\mu}(B) = \mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(B_n).$$

Nun überprüfen wir noch, dass $\bar{\mathcal{A}}$ vollständig bezüglich $\bar{\mu}$ ist. Sei $B \in \bar{\mathcal{A}}$ mit $\bar{\mu}(B) = 0$ und $F \subseteq B$; dann ist $F \in \bar{\mathcal{A}}$ zu zeigen. Wegen $B \in \bar{\mathcal{A}}$ gibt es $A, M \in \mathcal{A}$ mit $\mu(M) = 0$ und eine Teilmenge $N \subseteq M$ mit $B = A \cup N$. Nach Definition gilt $\bar{\mu}(B) = \mu(A)$. Es folgt $0 \leq \mu(A \cup M) \leq \mu(A) + \mu(M) = \mu(A) + 0 = \bar{\mu}(B) = 0$ und damit $\mu(A \cup M) = 0$. Nach Voraussetzung ist $F \subseteq B \subseteq A \cup M$. Schreiben wir F also in der Form $\varnothing \cup F$, dann ist F nach Definition in der σ-Algebra $\bar{\mathcal{A}}$ enthalten. □

Man bezeichnet den Maßraum $(\Omega, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$ als ***Vervollständigung*** von $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Der folgende Satz besagt, dass es sich um die kleinste vollständige Erweiterung von $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ handelt.

Satz 4.14 Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(\Omega, \mathcal{B}, \nu)$ eine beliebige vollständige Erweiterung. Dann ist $(\Omega, \mathcal{B}, \nu)$ auch eine Erweiterung von $(\Omega, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$.

Beweis: Zunächst überprüfen wir, dass $\bar{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{B}$ gilt. Sei $B \in \bar{\mathcal{A}}$. Dann gibt es $A, M \in \mathcal{A}$ und eine Teilmenge $N \subseteq M$, so dass $\mu(M) = 0$ und $B = A \cup N$ erfüllt ist. Wegen $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ gilt $M \in \mathcal{B}$. Auf Grund der Vollständigkeit von $\mathcal{B}$ und wegen $\nu(M) = \mu(M) = 0$ gilt auch $N \in \mathcal{B}$. Zusammen mit $A \in \mathcal{B}$ folgt $B = A \cup N \in \mathcal{B}$. Außerdem gilt $\nu(A) \leq \nu(B) \leq \nu(A) + \nu(N) \leq \nu(A) + \nu(M) = \nu(A)$ und somit $\nu(B) = \nu(A) = \mu(A) = \bar{\mu}(B)$. Dies zeigt, dass $\nu|_{\bar{\mathcal{A}}} = \bar{\mu}$ erfüllt ist. □

Satz 4.15 Sei $\mathcal{R}$ ein Ring, $\mu : \mathcal{R} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ ein σ-endliches Prämaß und $(\Omega, A_{\mu^*}, \tilde{\mu})$ der in Satz 3.14 konstruierte Maßraum. Dann ist dieser Maßraum eine Vervollständigung von $(\Omega, \sigma(\mathcal{R}), \tilde{\mu}|_{\sigma(\mathcal{R})})$, wobei $\sigma(\mathcal{R})$ die von $\mathcal{R}$ erzeugte σ-Algebra bezeichnet.

Beweis: Nach Satz 4.8 ist $(\Omega, A_{\mu^*}, \tilde{\mu})$ ein vollständiger Maßraum. Nach Satz 3.16 ist $\mathcal{R}$ in $\mathcal{A}_{\mu^*}$ enthalten, und damit gilt auch $\mathcal{A}_{\mu^*} \supseteq \sigma(\mathcal{R})$. Nach Satz 4.14 enthält $\mathcal{A}_{\mu^*}$ damit auch die Vervollständigung $\bar{\sigma}(\mathcal{R})$ von $\sigma(\mathcal{R})$. Es genügt also zu zeigen, dass $\mathcal{A}_{\mu^*}$ im Mengensystem $\bar{\sigma}(\mathcal{R})$ enthalten ist. Zunächst zeigen wir, dass jede Menge $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ mit $\mu^*(A) < +\infty$ auch in $\bar{\sigma}(\mathcal{R})$ liegt. Nach Definition von μ^* gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $B_n \in \sigma(\mathcal{R})$ mit $B_n \supseteq A$ und $\mu(B_n) \le \mu^*(A) + \frac{1}{n}$. Definieren wir $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, dann gilt $B \in \sigma(\mathcal{R})$, $A \subseteq B$ und

$$\mu^*(A) \quad \le \quad \mu^*(B) \quad \le \quad \mu^*(B_n) \quad \le \quad \mu^*(A) + \tfrac{1}{n}.$$

Lassen wir n gegen unendlich laufen, erhalten wir $\mu^*(A) = \mu^*(B)$, also $\mu^*(B \setminus A) = \mu^*(B) - \mu^*(A) = 0$. Setzen wir $C_n = B_n \setminus A$, dann gilt also $B \setminus A \subseteq C_n$ und $\mu^*(C_n) \le \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \in \sigma(\mathcal{R})$. Dann gilt $C \supseteq B \setminus A$ und $\mu^*(C) = \mu^*(B \setminus A) = 0$. Aus $C \supseteq B \setminus A$ folgt $B \setminus C \subseteq A$ und somit $A = (B \setminus C) \cup (A \cap C)$. Aus $B \setminus C \in \sigma(\mathcal{R})$ und $A \cap C \subseteq C$, $\mu^*(C) = 0$ folgt wiederum $A \in \bar{\sigma}(\mathcal{R})$.

Sei nun $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$, wobei nun auch $\mu(A) = +\infty$ zugelassen ist. Weil das Prämaß μ nach Voraussetzung σ-endlich ist, gibt es eine Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{R}$ mit $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ und $\mu(S_n) < +\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap S_n)$. Wegen $A \cap S_n \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ und $\mu^*(A \cap S_n) < +\infty$ folgt $A \cap S_n \in \bar{\sigma}(\mathcal{R})$ auf Grund des bereits bewiesenen Teils. Weil es sich bei $\bar{\sigma}(\mathcal{R})$ um eine σ-Algebra handelt, ist damit auch A in $\bar{\sigma}(\mathcal{R})$ enthalten. □

Folgerung 4.16 Für jedes $d \in \mathbb{N}$ ist der Lebesguesche Maßraum $(\mathbb{R}^d, \mathcal{A}_d, \mu_d)$ die Vervollständigung von $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_d, \mu_d|_{\mathcal{B}_d})$, wobei $\mathcal{B}_d$ die Borelsche σ-Algebra in $\mathbb{R}^d$ bezeichnet. Ist $A \subseteq \mathbb{R}^d$ und gibt es eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Lebesgue-messbarer Mengen in $\mathbb{R}^d$, so dass

$$\lim_{n\to\infty} \mu_d^*(A \Delta A_n) \quad = \quad 0 \qquad \text{und} \qquad \mu_d(A_n) < +\infty \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

mit dem äußeren Lebesgue-Maß μ_d^* gilt, dann ist auch A Lebesgue-messbar, und man erhält das Lebesgue-Maß von A durch $\mu_d(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_d(A_n)$.

Beweis: Dies sind die Spezialfälle der Sätze 4.15 und 4.9, angewendet auf das Lebesgue-Maß. □

Wir beenden den Abschnitt mit einem Satz, der die Beziehung zwischen den Lebesgue-messbaren Mengen und der Borel-Algebra weiter verdeutlicht.

Lemma 4.17 Ist $A \in \mathcal{A}_d$ und $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{A}_d$ mit $A_m \subseteq A_{m+1}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und $A = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$, dann folgt $\lim_m \mu_d(A_m) = \mu_d(A)$.

Beweis: Setzen wir $B_1 = A$ und $B_{m+1} = A_{m+1} \setminus A_m$ für jedes $m \in \mathbb{N}$, dann ist $(B_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge disjunkter Teilmengen in $\mathcal{A}_d$ mit $A = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$. Außerdem gilt $A_m = B_1 \cup \ldots \cup B_m$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Auf Grund der σ-Additivität des Lebesgue-Maßes folgt

$$\lim_{m\to\infty} \mu_d(A_m) \quad = \quad \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \mu_d(B_k) \quad = \quad \sum_{m=1}^{\infty} \mu_d(B_m) \quad = \quad \mu_d(A).$$ □

Satz 4.18 *(Regularität des Lebesgue-Maßes)*

Sei $d \in \mathbb{N}$. Für alle Lebesgue-messbaren Teilmengen $A \subseteq \mathbb{R}^d$ gilt

(i) $\mu_d(A) = \inf\{\, \mu_d(U) \mid U \subseteq \mathbb{R}^d \text{ offen}, U \supseteq A\}$

(ii) $\mu_d(A) = \sup\{\, \mu_d(K) \mid K \subseteq \mathbb{R}^d \text{ kompakt}, K \subseteq A\}$

Beweis: zu (i) Dass es sich bei $\mu_d(A)$ eine untere Schranke der Menge rechts handelt, ist offensichtlich. Zu zeigen bleibt, dass es die größte untere Schranke ist. Es genügt, den Fall $\mu_d(A) < +\infty$ zu betrachten, weil die Menge rechts ansonsten keine endlichen Werte enthält und die Aussage somit offensichtlich ist. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Zu zeigen ist, dass eine offene Menge $U \supseteq A$ mit $\mu_d(U) < \mu_d(A) + \varepsilon$ existiert. Nach Definition des (äußeren) Lebesgue-Maßes gibt es eine Folge $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Quadern mit $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_d(Q_n) < \mu_d(A) + \frac{1}{2}\varepsilon$. Durch geringfügige Vergrößerung jedes Quaders Q_n und Übergang zum offenen Inneren erhalten wir eine Folge $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *offener* Quader mit $\mu_d(P_n) \le \mu_d(Q_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Definieren wir $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$, dann ist U offen, es gilt $U \supseteq A$ und

$$\mu_d(U) \quad = \quad \mu_d\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n\right) \quad \le \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu_d(P_n) \quad \le \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\mu_d(Q_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right) \quad =$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} d(Q_n) + \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad < \quad \mu_d(A) + \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad = \quad \mu_d(A) + \varepsilon.$$

zu (ii) Wir betrachten zunächst den Fall, dass A eine beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ ist. Dann ist $\mu_d(A)$ endlich und offenbar eine obere Schranke der Menge rechts. Um nachzuweisen, dass $\mu_d(A)$ die kleinste obere Schranke ist, sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Wir müssen zeigen, dass eine kompakte Teilmenge $C \subseteq A$ mit $\mu_d(C) > \mu_d(A) - \varepsilon$ existiert. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^d$ eine kompakte Teilmenge, die A enthält. Nach Teil (i) existiert eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $U \supseteq M \setminus A$ und $\mu_d(U) < \mu_d(M \setminus A) + \varepsilon$. Setzen wir $C = M \setminus U$, dann ist C kompakt, und wir erhalten

$$\mu_d(C) \quad = \quad \mu_d(M) - \mu_d(M \cap U) \quad \ge \quad \mu_d(M) - \mu_d(U) \quad = \quad \mu_d(M \setminus A) + \mu_d(A) - \mu_d(U) \quad =$$
$$\mu_d(M \setminus A) + \varepsilon + \mu_d(A) - \mu_d(U) - \varepsilon \quad > \quad \mu_d(U) + \mu_d(A) - \mu_d(U) - \varepsilon \quad = \quad \mu_d(A) - \varepsilon.$$

Betrachten wir nun den Fall, dass A unbeschränkt ist. Dann definieren wir $A_m = [-m,m]^d \cap A$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Wegen $A = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$ und auf Grund von Lemma 4.17 gilt $\lim_m \mu_d(A_m) = \mu_d(A)$, und jede der Teilmengen A_m ist beschränkt und in $\mathcal{A}_d$ enthalten. Setzen wir nun zunächst $\mu_d(A) = +\infty$ voraus. Dann gilt $\lim_m \mu_d(A_m) = +\infty$, und auf Grund des bereits behandelten Falls für jedes $m \in \mathbb{N}$ eine kompakte Teilmenge C_m mit $C_m \subseteq A_m$ mit $\mu_d(C_m) > \mu_d(A_m) - 1$. Es ist dann $(C_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge kompakter Teilmengen von A mit $\lim_m \mu_d(C_m) = +\infty$. Damit ist die Gleichung unter (ii) in diesem Fall nachgewiesen.

Nehmen wir nun an, dass $\mu_d(A)$ endlich ist. Ist $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig vorgegeben, dann existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\mu_d(A_m) > \mu_d(A) - \frac{1}{2}\varepsilon$. Da A_m beschränkt ist, finden wir eine kompakte Teilmenge $C \subseteq A_m$ mit $\mu_d(C) > \mu_d(A_m) - \frac{1}{2}\varepsilon$. Damit ist C auch eine kompakte Teilmenge von A, und es ist $\mu_d(C) > \mu_d(A_m) - \frac{1}{2}\varepsilon > \mu_d(A) - \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon = \mu_d(A) - \varepsilon$. Also ist die Gleichung unter (ii) auch in diesem Fall gültig. □

Ist allgemein $(\Omega, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{B}$ die Borelsche σ-Algebra, also die σ-Algebra erzeugt von den offenen Teilmengen, dann wird ein Maß μ auf $\mathcal{B}$ als ***von außen regulär*** bezeichnet, wenn es die Eigenschaft (i) besitzt. Die Maße mit der Eigenschaft (ii) bezeichnet man als ***von innen regulär***.

§ 5. Messbare Funktionen

Zusammenfassung. Eine reellwertige Funktion f auf einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ wird *messbar* genannt, wenn das Urbild jeder Borelschen Teilmenge Teilmenge von $\mathbb{R}$ in $\mathcal{A}$ enthalten ist. Die Messbarkeit einer Funktion ist ein notwendige Bedingung für die Integrierbarkeit, die wir im nächsten Kapitel behandeln. Das Hauptanliegen dieses Kapitels besteht in dem Nachweis, dass die Messbarkeit von Funktionen unter bestimmten Operationen (zum Beispiel punktweiser Addition, Multiplikation...) erhalten bleibt.

Wichtige Grundbegriffe

- Messraum
- messbare Abbildung
- $\mathcal{A}$-messbare und Borel-messbare Funktion

Zentrale Sätze

- Borel-Messbarkeit stetiger Funktionen
- Messbarkeits-Kriterium anhand der Teilmengen $\Lambda^{\pm}(f, \alpha)$
- Erhaltung der Messbarkeit unter punktweiser Addition, Subtraktion und Multiplikation
- Erhaltung der Messbarkeit unter Infimums- und Supremumsbildung

Im folgenden bezeichnen wir als ***Messraum*** ein Paar $(\Omega, \mathcal{A})$ bestehend aus einer nichtleeren Menge Ω und einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ in Ω. Ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ besteht also aus einem Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$ und einem Maß μ auf dem Messraum.

Im weiteren Verlauf wird es sich als nützlich herausstellen, auch neben reellwertigen Funktionen auf einem Messraum auch Funktionen mit Werten in $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ zuzulassen. Dazu definieren wir

$$\bar{\mathcal{B}}_1 \quad = \quad \{\bar{A} \subseteq \bar{\mathbb{R}} \mid \bar{A} \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}_1\}.$$

Man überprüft leicht, dass es sich bei $\bar{\mathcal{B}}_1$ um eine σ-Algebra mit $\mathcal{B}_1 \subseteq \bar{\mathcal{B}}_1$ handelt.

Definition 5.1 Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\Omega', \mathcal{A}')$ Messräume. Eine Abbildung $f : \Omega \to \Omega'$ wird ***messbar*** bezüglich $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ genannt, wenn $f^{-1}(A') \in \mathcal{A}$ für alle $A' \in \mathcal{A}'$ erfüllt ist. Ist speziell $(\Omega', \mathcal{A}') = (\bar{R}, \bar{\mathcal{B}}_1)$, dann sprechen wir von einer $\mathcal{A}$-messbaren Funktion. Ist darüber hinaus $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ und $\mathcal{A} = \{A \cap \Omega \mid A \in \mathcal{B}_d\}$, dann nennen wir die bezüglich $\mathcal{A}$ messbaren Funktionen auch ***Borel-messbar***.

Ist beispielsweise $f : \Omega \to \Omega'$ konstant, dann ist f messbar. Ist nämlich $c \in \Omega'$ der konstante Wert von f und $A' \in \mathcal{A}'$, so gilt $f^{-1}(A') = \Omega$ falls $c \in A'$ und $f^{-1}(A') = \varnothing$ sonst. In jedem Fall ist $f^{-1}(A')$ ein Element von $\mathcal{A}$.

Proposition 5.2 Die Komposition messbarer Abbildungen ist messbar. Genauer: Sind $(\Omega,\mathcal{A})$, $(\Omega',\mathcal{A}')$ und $(\Omega'',\mathcal{A}'')$ drei Messräume, ist $f:\Omega\to\Omega'$ messbar bezüglich $\mathcal{A},\mathcal{A}'$ und $g:\Omega'\to\Omega''$ messbar bezüglich $\mathcal{A}',\mathcal{A}''$, dann ist $g\circ f:\Omega\to\Omega''$ messbar bezüglich $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}''$.

Beweis: Ist $A''\in\mathcal{A}''$, dann gilt $A'=g^{-1}(A'')\in\mathcal{A}'$ und $(g\circ f)^{-1}(A'')=f^{-1}(g^{-1}(A''))=f^{-1}(A')\in\mathcal{A}$. □

Proposition 5.3 Seien die Bezeichnungen wie in Definition 5.1 gewählt. Ist $\mathcal{E}'$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{A}'$ als σ-Algebra, so ist f genau dann messbar bezüglich $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$, wenn $f^{-1}(E')\in\mathcal{A}$ für alle $E'\in\mathcal{E}'$ erfüllt ist.

Beweis: Die Implikation „$\Rightarrow$“ ist offensichtlich, denn jedes $E'\in\mathcal{E}'$ ist auch ein Element aus $\mathcal{A}'$. Für die Richtung „$\Leftarrow$“ überprüfen wir, dass das System $\mathcal{B}=\{A'\subseteq\Omega'\mid f^{-1}(A')\in\mathcal{A}\}$ eine σ-Algebra ist. Wegen $f^{-1}(\varnothing)=\varnothing\in\mathcal{A}$ und $f^{-1}(\Omega')=\Omega\in\mathcal{A}$ sind $\varnothing$ und Ω' in $\mathcal{B}$ enthalten. Ist $B\in\mathcal{B}$, dann gilt $f^{-1}(B)\in\mathcal{A}$. Weil $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist, liegt damit auch $f^{-1}(\Omega'\setminus B)=\Omega\setminus f^{-1}(B)$ in $\mathcal{A}$ und somit $\Omega'\setminus B$ in $\mathcal{B}$. Sei schließlich $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{B}$. Dann gilt $f^{-1}(B_n)\in\mathcal{A}$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Setzen wir $B=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$, dann erhalten wir

$$f^{-1}(B) \quad = \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n) \quad \in \quad \mathcal{A} \quad ,$$

weil $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist. Daraus folgt $B\in\mathcal{B}$. Nach Voraussetzung ist nun $\mathcal{E}'$ eine Teilmenge von $\mathcal{B}$. Weil $\mathcal{A}'=\sigma(\mathcal{E}')$ nach Definition die kleinste σ-Algebra ist, die $\mathcal{E}'$ umfasst, erhalten wir $\mathcal{A}'\subseteq\mathcal{B}$. Daraus wiederum folgt $f^{-1}(A')\in\mathcal{A}$ für alle $A'\in\mathcal{A}'$. □

Proposition 5.4 Sei $(\Omega,\mathcal{A})$ ein Messraum und $A\subseteq\Omega$ eine Teilmenge. Die Indikatorfunktion $1_A:\Omega\to\bar{\mathbb{R}}$ von A definiert durch

$$1_A(x) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{falls } x\in A \\ 0 & \text{falls } x\notin A \end{cases}$$

ist genau dann messbar bezüglich $\mathcal{A}$, wenn $A\in\mathcal{A}$ gilt.

Beweis: „$\Rightarrow$“ Die einelementige Menge $\{1\}$ liegt in $\bar{\mathcal{B}}_1$. Auf Grund der Messbarkeit von 1_A ist $1_A^{-1}(\{1\})=A$ also in $\mathcal{A}$ enthalten. „$\Leftarrow$“ Ist $A\in\mathcal{A}$, dann liegt auch $\Omega\setminus A$ in $\mathcal{A}$. Sei nun $U\in\bar{\mathcal{B}}_1$ beliebig vorgegeben. Im Fall $0,1\notin U$ gilt $1_A^{-1}(U)=\varnothing$, für $0\in U, 1\notin U$ ist $1_A^{-1}(U)=\Omega\setminus A$, für $0\notin U, 1\in U$ ist $1_A^{-1}(U)=A$ und im Fall $0,1\in U$ ist $1_A^{-1}(U)=\Omega$. Also ist die Urbildmenge $1_A^{-1}(U)$ in jedem Fall ein Element der σ-Algebra $\mathcal{A}$, und 1_A ist messbar. □

Proposition 5.5 Sei $\Omega\subseteq\mathbb{R}^d$ und $f:\Omega\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist f Borel-messbar.

Beweis: Sei $\mathcal{A}=\{A\cap\Omega\mid A\in\mathcal{B}_d\}$. Nach Satz 3.8 wird $\mathcal{B}_1$ von den offenen Teilmengen $U\subseteq\mathbb{R}$ erzeugt. Nach Proposition 5.3 genügt es deshalb, die Bedingung $f^{-1}(U)\in\mathcal{A}$ für diese Mengen U zu überprüfen. Sei also $U\subseteq\mathbb{R}$ offen. Auf Grund der Stetigkeit von f ist $f^{-1}(U)$ offen in Ω. Es gibt also eine offene Teilmenge $A\subseteq\mathbb{R}^d$ mit $A\cap\Omega=f^{-1}(U)$. Als offene Menge ist A in $\mathcal{B}_d$ enthalten. Also gilt $f^{-1}(U)\in\mathcal{A}$. □

Satz 5.6 Sei $(\Omega,\mathcal{A})$ ein Messraum. Eine Funktion $f:\Omega\to\bar{\mathbb{R}}$ ist genau dann messbar bezüglich $\mathcal{A}$, wenn für jedes $\alpha\in\mathbb{R}$ die Menge

$$\bar{\Lambda}^+(f,\alpha) \quad = \quad \{x\in\Omega \mid f(x)\geq\alpha\} \qquad \text{in } \mathcal{A} \text{ liegt.}$$

Beweis: „$\Rightarrow$" Die Borelsche σ-Algebra $\mathcal{B}_1$ enthält für jedes $\alpha\in\mathbb{R}$ die Menge $[\alpha,+\infty[$, weil diese in $\mathbb{R}$ abgeschlossen ist. Damit ist nach Definition die Menge $[\alpha,+\infty]$ in $\bar{\mathcal{B}}_1$ enthalten. Weil f messbar bezüglich $\mathcal{A}$ ist, folgt $\bar{\Lambda}^+(f,\alpha) = f^{-1}([\alpha,+\infty])\in\mathcal{A}$.

„$\Leftarrow$" Sei $\mathcal{Q}\subseteq\mathfrak{P}(\bar{\mathbb{R}})$ die von den Teilmengen der Form $[\alpha,+\infty]$ mit $\alpha\in\mathbb{R}$ erzeugte σ-Algebra. Wir zeigen zunächst, dass $\mathcal{Q}=\bar{\mathcal{B}}_1$ gilt. Wie wir im ersten Teil des Beweises bereits festgestellt haben, gilt $[\alpha,+\infty]\in\bar{\mathcal{B}}_1$ für alle $\alpha\in\mathbb{R}$ und damit $\mathcal{Q}\subseteq\bar{\mathcal{B}}_1$. Zeigen wir nun, dass $\mathcal{B}_1$ in $\mathcal{Q}$ enthalten ist. Dafür genügt es zu zeigen, dass sämtliche endlichen Intervalle in $\mathcal{Q}$ liegen, denn $\mathcal{B}_1$ wird von den endlichen Intervallen erzeugt. Es gilt $\bar{\mathbb{R}}\setminus[\alpha,+\infty]=[-\infty,\alpha[$, außerdem

$$[-\infty,\alpha] \quad = \quad \bigcap_{n=1}^{\infty}[-\infty,\alpha+\tfrac{1}{n}[\qquad \text{und} \qquad]\alpha,+\infty] \quad = \quad \bar{\mathbb{R}}\setminus[-\infty,\alpha].$$

Sind nun $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha\leq\beta$, dann gilt $[\alpha,\beta]=[-\infty,\beta]\cap[\alpha,+\infty]\in\mathcal{Q}$, und auf ähnliche Weise erhält man auch $[\alpha,\beta[$, $]\alpha,\beta]$ und $]\alpha,\beta[$ als Elemente von $\mathcal{Q}$. Wegen

$$\{-\infty\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}[-\infty,-n] \qquad \text{und} \qquad \{+\infty\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}[n,+\infty]$$

sind auch $\{-\infty\}$ und $\{+\infty\}$ in $\mathcal{Q}$ enthalten. Weil jede Menge in $\bar{\mathcal{B}}_1$ durch Vereinigung einer Menge aus $\mathcal{B}_1$ mit einer Teilmenge von $\{-\infty,+\infty\}$ zu Stande kommt, ist damit das gesamte System $\bar{\mathcal{B}}_1$ in $\mathcal{Q}$ enthalten. Wir haben damit nachgewiesen, dass die Mengen $[\alpha,+\infty]$ ein Erzeugendensystem von $\bar{\mathcal{B}}_1$ bilden. Nach Proposition 5.3 genügt es für die Messbarkeit von f bezüglich $\mathcal{A}$ nachzuweisen, dass die Urbilder $f^{-1}([\alpha,+\infty])$ dieser Mengen in $\mathcal{A}$ liegen. Dies ist durch die Voraussetzung $\bar{\Lambda}^+(f,\alpha)\in\mathcal{A}$ für alle $\alpha\in\mathbb{R}$ gewährleistet. □

Folgerung 5.7 Sei $(\Omega,\mathcal{A})$ ein Messraum und $f:\Omega\to\bar{\mathbb{R}}$. Dann ist die $\mathcal{A}$-Messbarkeit von f zu jeder der folgenden Aussagen äquivalent.

(i) Für jedes $\alpha\in\mathbb{R}$ gilt $\Lambda^+(f,\alpha)=\{x\in\Omega \mid f(x)>\alpha\}\in\mathcal{A}$.

(ii) Für jedes $\alpha\in\mathbb{R}$ gilt $\Lambda^-(f,\alpha)=\{x\in\Omega \mid f(x)<\alpha\}\in\mathcal{A}$.

(iii) Für jedes $\alpha\in\mathbb{R}$ gilt $\bar{\Lambda}^-(f,\alpha)=\{x\in\Omega \mid f(x)\leq\alpha\}\in\mathcal{A}$.

Beweis: Nach Satz 5.6 genügt es zu zeigen, dass jede der drei Bedingungen dazu äquivalent ist, dass $\bar{\Lambda}^+(f,\alpha)\in\mathcal{A}$ für alle $\alpha\in\mathbb{R}$ erfüllt ist. Für die Bedingung (i) gilt dies auf Grund der Gleichungen

$$\Lambda^+(f,\alpha) \quad = \quad \bigcup_{n=1}^{\infty}\bar{\Lambda}^+(f,\alpha+\tfrac{1}{n}) \qquad \text{und} \qquad \bar{\Lambda}^+(f,\alpha) \quad = \quad \bigcap_{n=1}^{\infty}\Lambda^+(f,\alpha-\tfrac{1}{n}).$$

und der Tatsache, dass die σ-Algebra $\mathcal{A}$ unter abzählbaren Vereinigungen und Durchschnitten abgeschlossen ist. Die Mengengleichungen wiederum ergeben sich aus den für alle $x \in \Omega$ gültigen Äquivalenzen $f(x) > \alpha \Leftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}: f(x) \geq \alpha + \frac{1}{n}$ und $f(x) \geq \alpha \Leftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}: f(x) > \alpha - \frac{1}{n}$.

Für die Bedingung (ii) überprüft man zunächst, dass für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ jeweils $\Lambda^{-}(f,\alpha) = \Omega \setminus \bar{\lambda}^{+}(f,\alpha)$ gilt. Die Äquivalenz folgt dann aus der Tatsache, dass die σ-Algebra $\mathcal{A}$ auch unter Komplementbildung abgeschlossen ist. Auf dieselbe überprüft man, dass Bedingung (iii) zu Bedingung (i) äquivalent ist. □

Folgerung 5.8 Sind $f, g : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar bezüglich $\mathcal{A}$, dann sind die Mengen

(i) $\{x \in \Omega \mid f(x) < g(x)\}$ (ii) $\{x \in \Omega \mid f(x) \leq g(x)\}$ (iii) $\{x \in \Omega \mid f(x) = g(x)\}$
(iv) $\{x \in \Omega \mid f(x) \neq g(x)\}$

in $\mathcal{A}$ enthalten.

Beweis: Weil die Menge $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ dicht liegt, gibt es für jedes $x \in \Omega$ mit $f(x) < g(x)$ ein $a \in \mathbb{Q}$ mit $f(x) < a < g(x)$. Wir erhalten somit für die unter (i) angegebene Menge

$$\begin{aligned} \{x \in \Omega \mid f(x) < g(x)\} &= \bigcup_{a \in \mathbb{Q}} \{x \in \Omega \mid f(x) < a < g(x)\} \\ &= \bigcup_{a \in \mathbb{Q}} \left(\{x \in \Omega \mid f(x) < a\} \cap \{x \in \Omega \mid g(x) > a\}\right). \end{aligned}$$

Auf Grund der Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ und der Messbarkeit von f und g ist diese Menge in der σ-Algebra $\mathcal{A}$ enthalten. Dass die Mengen unter (ii), (iii) und (iv) auch in $\mathcal{A}$ liegen, folgt nun unmittelbar aus den beiden Mengengleichungen $\{x \in \Omega \mid f(x) \leq g(x)\} = \Omega \setminus \{x \in \Omega \mid g(x) < f(x)\}$ und

$$\{x \in \Omega \mid f(x) = g(x)\} = \{x \in \Omega \mid f(x) \leq g(x)\} \cap \{x \in \Omega \mid f(x) \geq g(x)\}$$

sowie $\{x \in \Omega \mid f(x) \neq g(x)\} = \Omega \setminus \{x \in \Omega \mid f(x) = g(x)\}$. □

Im weiteren Verlauf werden wir auch zulassen, dass $\bar{R}$-wertige Funktionen punktweise addiert, subtrahiert und multipliziert werden. Dabei kann sich allerdings der Definitionsbereich der Funktion verkleinern, weil die Werte $a \pm b$ und ab nicht für alle $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$ definiert sind. Wir legen für die Addition und Multiplikation folgende Konvention fest.

$+$	$-\infty$	$b \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	undef.
$a \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$a+b$	$+\infty$
$+\infty$	undef.	$+\infty$	$+\infty$

$-$	$-\infty$	$b \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	undef.	$-\infty$	$-\infty$
$a \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$a-b$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	undef.

$\cdot$	$-\infty$	$b<0$	$b=0$	$b>0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	$-\infty$	$-\infty$
$a<0$	$+\infty$	ab	0	ab	$-\infty$
$a=0$	0	0	0	0	0
$a>0$	$-\infty$	ab	0	ab	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$

Proposition 5.9 Ist $g : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-messbar, dann auch die Funktion $a + bg$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

Beweis: Ist $b > 0$, dann gilt für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ jeweils

$$\{x \in \Omega \mid a + bg(x) \geq \alpha\} \quad = \quad \{x \in \Omega \mid g(x) \geq b^{-1}(\alpha - a)\} \quad ,$$

und diese Menge liegt auf Grund der Messbarkeit von g in $\mathcal{A}$. Für $b < 0$ kommt man durch die Gleichung $\{x \in \Omega \mid a + bg(x) \geq \alpha\} = \{x \in \Omega \mid g(x) \leq b^{-1}(\alpha - a)\}$ zum selben Ergebnis. Im Fall $b = 0$ ist die Funktion $a + bg$, sofern sie überall definiert ist, konstant und damit ebenfalls messbar. □

Satz 5.10 Sind $f, g : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ zwei $\mathcal{A}$-messbare Funktionen, dann sind auch die Funktion $f \pm g$ und fg messbar bezüglich $\mathcal{A}$, sofern sie auf ganz Ω definiert sind.

Beweis: Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig vorgegeben. Auf Grund der Messbarkeit von g und Proposition 5.9 ist $\alpha - g$ messbar, und mit Folgerung 5.8 erhalten wir

$$\{x \in \Omega \mid f(x) + g(x) \geq \alpha\} \quad = \quad \{x \in \Omega \mid f(x) \geq \alpha - g(x)\} \quad \in \quad \mathcal{A}.$$

Daraus folgt die Messbarkeit von $f + g$. Ebenso ist auf Grund der Proposition die Funktion $-g$ messbar, und wir erhalten damit die Messbarkeit von $f + (-g) = f - g$.

Beim Beweis der Messbarkeit von fg beschränken wir uns zunächst auf den Fall, dass fg nur endliche Werte annimmt. Wegen $fg = \frac{1}{4}(f+g)^2 - \frac{1}{4}(f-g)^2$ genügt es, den Fall $f = g$ zu betrachten und die Messbarkeit von f^2 zu beweisen. Sei dazu $\alpha \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Ist $\alpha \leq 0$, dann gilt

$$\{x \in \Omega \mid f(x)^2 \geq \alpha\} \quad = \quad \Omega \quad \in \quad \mathcal{A}.$$

Im Fall $\alpha > 0$ gilt

$$\{x \in \Omega \mid f(x)^2 \geq \alpha\} \quad = \quad \{x \in \Omega \mid f(x) \geq \sqrt{\alpha}\} \cup \{x \in \Omega \mid f(x) \leq -\sqrt{\alpha}\} \quad ,$$

und auf Grund der Messbarkeit sind diese beiden Mengen ebenfalls in $\mathcal{A}$ enthalten. Damit ist die Messbarkeit im eingeschränkten Fall bewiesen, und wir betrachten nun die Situation, dass fg auch unendliche Werte annimmt. Dazu definieren wir die Mengen

$$\Omega^+ = \{x \in \Omega \mid f(x)g(x) = +\infty\} \quad , \quad \Omega^- = \{x \in \Omega \mid f(x)g(x) = -\infty\} \quad \text{und} \quad \tilde{\Omega} = \Omega \setminus (\Omega^+ \cup \Omega^-).$$

Es gilt $x \in \Omega^+$ genau dann, wenn $f(x) = +\infty$, $g(x) > 0$ oder $f(x) = -\infty$, $g(x) < 0$ gilt, oder wenn eine dieser Bedingungen mit vertauschten Rollen von f und g erfüllt ist. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \Omega^+ \quad = \quad & (\{x \in \Omega \mid f(x) = +\infty\} \cap \{x \in \Omega \mid g(x) > 0\}) \cup \\ & (\{x \in \Omega \mid f(x) = -\infty\} \cap \{x \in \Omega \mid g(x) < 0\}) \cup \\ & (\{x \in \Omega \mid f(x) > 0\} \cap \{x \in \Omega \mid g(x) = +\infty\}) \cup \\ & (\{x \in \Omega \mid f(x) < 0\} \cap \{x \in \Omega \mid g(x) = -\infty\}) \quad , \end{aligned}$$

und diese Gleichung zeigt, dass Ω^+ in $\mathcal{A}$ liegt. Ebenso beweist man $\Omega^- \in \mathcal{A}$, und es folgt $\tilde{\Omega} \in \mathcal{A}$.

Sei $\tilde{\mathcal{A}} = \{A \in \mathcal{A} \mid A \subseteq \tilde{\Omega}\}$; wie man leicht überprüft, handelt es sich um eine σ-Algebra bezüglich der Menge $\tilde{\Omega}$. Weil f und g messbar bezüglich $\mathcal{A}$ sind, sind die Funktionen $f_1 = f|_{\tilde{\Omega}}$ und $g_1 = g|_{\tilde{\Omega}}$ messbar bezüglich $\tilde{\mathcal{A}}$, denn für jede Menge $B \in \bar{\mathcal{B}}_1$ gilt $f_1^{-1}(B) = f^{-1}(B) \cap \tilde{\Omega} \in \tilde{\mathcal{A}}$, ebenso für die Funktion g_1. Das Produkt $f_1 g_1$ nimmt auf seinem Definitionsbereich nur endliche Werte an, ist also auf Grund der bereits gezeigten Aussage ebenfalls $\tilde{\mathcal{A}}$-messbar. Ist nun $B \in \bar{\mathcal{B}}_1$ vorgegeben, so gilt $(fg)^{-1}(B) = (f_1 g_1)^{-1}(B) \in \tilde{\mathcal{A}}$ im Fall $+\infty, -\infty \notin B$, ansonsten ist $(fg)^{-1}(B)$ gleich einer der Mengen $(f_1 g_1)^{-1}(B) \cup \Omega^+$, $(f_1 g_1)^{-1}(B) \cup \Omega^-$ oder $(f_1 g_1)^{-1}(B) \cup \Omega^+ \cup \Omega^-$. Wegen $\tilde{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{A}$ und $\Omega^+, \Omega^- \in \mathcal{A}$ liegt $(fg)^{-1}(B)$ in jedem Fall in der σ-Algebra $\mathcal{A}$. □

Wir erinnern an die folgende Definition aus der Analysis einer Variablen: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen (oder allgemeiner, eine Folge von Elementen aus $\bar{\mathbb{R}}$), dann sind der *limes superior* und *limes inferior* der Folge definiert durch

$$\limsup a_n = \lim_{m\to\infty} \sup\{a_n \mid n \geq m\} \qquad \text{und} \qquad \liminf a_n = \lim_{m\to\infty} \inf\{a_n \mid n \geq m\}.$$

Beide können Werte in ganz $\bar{\mathbb{R}}$ annehmen. Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$, dann bezeichnen wir mit $\sup f_n$ die Funktion gegeben durch $(\sup f_n)(x) = \sup\{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$ für alle $x \in \Omega$, und mit $\limsup f_n$ die Funktion $x \mapsto \limsup f_n(x)$. Ebenso sind die Funktionen $\inf f_n$ und $\liminf f_n$ definiert.

Satz 5.11 Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von $\mathcal{A}$-messbaren Funktionen. Dann sind auch die Funktionen $\sup f_n$, $\inf f_n$, $\limsup f_n$ und $\liminf f_n$ messbar bezüglich $\mathcal{A}$.

Beweis: Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\{x \in \Omega \mid (\sup f_n)(x) \leq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in \Omega \mid f_n(x) \leq \alpha\}$, denn für jedes $x \in \Omega$ ist α genau dann eine obere Schranke von $\{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$, wenn $\alpha \geq \sup\{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$ erfüllt ist. Weil f_n messbar bezüglich $\mathcal{A}$ ist, liegt die Menge $\{x \in \Omega \mid f_n(x) \leq \alpha\}$ in $\mathcal{A}$, für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dies zeigt, dass auch $\{x \in \Omega \mid (\sup f_n)(x) \leq \alpha\}$ in $\mathcal{A}$ liegt, und wir erhalten die $\mathcal{A}$-Messbarkeit von $\sup f_n$. Die $\mathcal{A}$-Messbarkeit von $\inf f_n$ beweist man analog mit Hilfe der Gleichung

$$\{x \in \Omega \mid (\inf f_n)(x) \geq \alpha\} \quad = \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in \Omega \mid f_n(x) \geq \alpha\}.$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Funktion $\sup_n f_m$ definiert durch $\Omega \to \bar{\mathbb{R}}$, $x \mapsto \sup\{f_m(x) \mid m \geq n\}$, und $\inf_n f_m$ entsprechend durch $x \mapsto \inf\{f_m(x) \mid m \geq n\}$. Auch diese Funktionen sind $\mathcal{A}$-messbar, denn es gilt

$$\{x \in \Omega \mid (\sup_n f_m)(x) \leq \alpha\} \quad = \quad \bigcap_{m=n}^{\infty} \{x \in \Omega \mid f_m(x) \leq \alpha\}$$

und

$$\{x \in \Omega \mid (\inf_n f_m)(x) \geq \alpha\} \quad = \quad \bigcap_{m=n}^{\infty} \{x \in \Omega \mid f_m(x) \geq \alpha\}.$$

Für jedes $x \in \Omega$ ist die Folge $((\sup_n f_m)(x))_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend, deshalb gilt

$$\limsup f_n(x) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} (\sup_n f_m)(x) \quad = \quad \inf\{(\sup_n f_m)(x) \mid n \in \mathbb{N}\} \quad = \quad (\inf(\sup_n f_m))(x).$$

Aus der $\mathcal{A}$-Messbarkeit der Funktionen $\sup_n f_m$ folgt also die Messbarkeit von $\limsup f_n$. Ebenso beweist man die $\mathcal{A}$-Messbarkeit von $\liminf f_n$ durch

$$\liminf f_n(x) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} (\inf_n f_m)(x) \quad = \quad \sup\{(\inf_n f_m)(x) \mid n \in \mathbb{N}\} \quad = \quad (\sup(\inf_n f_m))(x) \quad ,$$

wobei wir im zweiten Schritt verwendet haben, dass die Folge $((\inf_n f_m)(x))_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ monton wachsend ist. □

Folgerung 5.12

(i) Sind $f_1, \dots, f_r : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ messbare Funktionen bezüglich $\mathcal{A}$, dann gilt dasselbe für die Funktionen $x \mapsto \min\{f_1(x), \dots, f_r(x)\}$ und $x \mapsto \max\{f_1(x), \dots, f_r(x)\}$.

(ii) Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge $\mathcal{A}$-messbarer Funktionen, die punktweise gegen eine Funktion $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ konvergiert, dann ist auch f eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion.

Beweis: Sowohl (i) als auch (ii) ist ein Spezialfälle des vorherigen Satzes. Definieren wir $f_n(x) = f_r(x)$ für $n \geq r$, dann gilt $\min\{f_1(x), \dots, f_r(x)\} = (\inf f_n)(x)$ und $\max\{f_1(x), \dots, f_r(x)\} = (\sup f_n)(x)$. Konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen f, dann gilt $f = \limsup f_n = \liminf f_n$. □

Ist $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ eine beliebige Funktion, dann definieren wir nichtnegative Funktionen f^+ und f^- durch $f^+(x) = \max\{0, f(x)\}$ und $f^-(x) = -\min\{0, f(x)\}$ für $x \in \Omega$. Offenbar gilt dann $f = f^+ - f^-$. Den *Betrag* von f definieren wir durch $|f|(x) = |f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$. Aus der Folgerung 5.12 ergibt sich unmittelbar

Folgerung 5.13 Eine Funktion $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ ist genau dann $\mathcal{A}$-messbar, wenn f^+ und f^- beide $\mathcal{A}$-messbar sind. Ist die Funktion f messbar bezüglich $\mathcal{A}$, dann gilt dasselbe für $|f|$.

§ 6. Integrierbare Funktionen

Zusammenfassung. Für jeden Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ definieren wir den $\mathbb{R}$-Vektorraum der μ-integrierbaren Funktionen und ordnen jeder solchen Funktion f ein Integral $\int f \, d\mu$ zu. Dabei gehen wir schrittweise vor, indem wir zunächst für die messbaren Funktionen mit endlicher Wertemenge, den sog. *Stufenfunktionen*, ein Integral definieren und diese Definition dann auf messbare nicht-negative Funktionen ausdehnen. Für unser neues Integral werden einige elementare Rechenregeln hergeleitet. Außerdem führen wir den Begriff der *Nullmenge* in einem Maßraum ein. Auf solchen Mengen können Funktionen beliebig abgeändert werden, ohne dass sich dies auf die μ-Integrierbarkeit oder den Wert des Integrals auswirkt.

Wichtige Grundbegriffe

- Menge $E(\Omega, \mathcal{A})$ der Stufenfunktionen
- μ-Integral einer Stufenfunktion auf einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$
- μ-Integral einer nicht-negativen messbaren Funktion
- μ-Integrierbarkeit und μ-Integral einer Funktion auf einem Maßraum
- Nullfortsetzung einer Funktion
- Nullmenge in einem Maßraum
- μ-fast überall bestehende Eigenschaften

Zentrale Sätze

- Charakterisierung der nichtnegativen messbaren Funktionen durch monoton wachsende Folgen von Stufenfunktionen
- Satz über die monotone Konvergenz für nicht-negative messbare Funktionen
- Lebesgue-Integrierbarkeit stetiger Funktionen mit kompaktem Träger
- Verhalten des μ-Integrals bei Einschränkung und Nullfortsetzung
- Invarianz der μ-Integrierbarkeit und des μ-Integrals bei Wechsel zu einer μ-fast überall übereinstimmenden Funktion

Auch hier bezeichnet im gesamten Abschnitt das Paar $(\Omega, \mathcal{A})$ einen festgewählten Messraum.

Definition 6.1 Als ***$\mathcal{A}$-Stufenfunktion*** bezeichnen wir eine nichtnegative, $\mathcal{A}$-messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$, die nur endlich viele reelle Werte annimmt. Die Menge der $\mathcal{A}$-Stufenfunktionen bezeichnen wir mit $E(\Omega, \mathcal{A})$.

Die meisten Funktionen, die uns in der Analysis begegnen, sind natürlich keine Stufenfunktionen. Insbesondere sind stetige Funktionen in der Regel keine Stufenfunktionen. Dem Begriff kommt auf unserem Weg zur Integraldefinition lediglich eine Hilfsfunktion zu.

Proposition 6.2 Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ist genau dann eine $\mathcal{A}$-Stufenfunktion, wenn ein $n \in \mathbb{N}_0$, paarweise disjunkte Mengen $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$ mit $\Omega = A_1 \cup ... \cup A_n$ und $u_1, ..., u_n \in \mathbb{R}_+$ existieren, so dass $f = \sum_{i=1}^{n} u_i 1_{A_i}$ erfüllt ist.

Beweis: „⇒" Sei $f \in E(\Omega, \mathcal{A})$, und seien $u_1, ..., u_n \in \mathbb{R}_+$ die verschiedenen Werte von f. Wegen $\{u_i\} \in \bar{\mathcal{B}}^1$ für $1 \le i \le n$ und auf Grund der $\mathcal{A}$-Messbarkeit von f sind die Mengen $A_i = f^{-1}(\{u_i\})$ in $\mathcal{A}$ enthalten. Die Mengen $A_1, ..., A_n$ sind paarweise disjunkt, und offenbar gilt $\Omega = A_1 \cup ... \cup A_n$. Man überprüft nun unmittelbar die Gleichung $f(x) = \sum_{i=1}^n u_i 1_{A_i}(x)$ für alle $x \in \Omega$, indem man die Fälle $x \in A_i$ für $1 \le i \le n$ der Reihe nach durchgeht.

„⇐" Sei f eine Funktion der Form $\sum_{i=1}^n u_i 1_{A_i}$. Nach Proposition 5.4 sind die Funktionen 1_{A_i} messbar bezüglich $\mathcal{A}$, und mit Satz 5.10 erhalten wir die Messbarkeit von f. Offenbar ist f nichtnegativ und nimmt nur die Werte $u_1, ..., u_n$ an. □

Proposition 6.3 Sind $f, g \in E(\Omega, \mathcal{A})$, dann sind auch die Funktionen $f + g$, fg, $\max\{f, g\}$ und $\min\{f, g\}$ in $E(\Omega, \mathcal{A})$ enthalten.

Beweis: Aus dem letzten Abschnitt ist bekannt, dass $f + g$, fg, $\max\{f, g\}$ und $\min\{f, g\}$ messbar bezüglich $\mathcal{A}$ ist. Darüber hinaus ist unmittelbar klar, dass alle Funktionen nur endlich viele verschiedene, nichtnegative reelle Werte annehmen. □

Aus der soeben bewiesenen Proposition folgt unmittelbar, dass $E(\Omega, \mathcal{A})$ die Struktur eines $\mathbb{R}$-Vektorraums besitzt. Unser nächstes Ziel besteht darin, den Stufenfunktionen ein Integral zuzuordnen. Dafür erweitern wir unseren Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$ zu einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Lemma 6.4 Sei $f \in E(\Omega, \mathcal{A})$, und seien

$$f \quad = \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i 1_{A_i} \quad = \quad \sum_{j=1}^n \beta_j 1_{B_j}$$

zwei Darstellungen von f mit $m, n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ..., \beta_n \in \mathbb{R}_+$ sowie $A_1, ..., A_m, B_1, ..., B_n \in \mathcal{A}$, wobei $A_1, ..., A_m$ und $B_1, ..., B_n$ jeweils paarweise disjunkt sind und ihre Vereinigung jeweils Ω ergibt. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(A_i) \quad = \quad \sum_{j=1}^n \beta_j \mu(B_j).$$

Beweis: Wegen $\Omega = A_1 \cup ... \cup A_m = B_1 \cup ... \cup B_n$ gelten die Mengengleichungen $A_i = \bigcup_{j=1}^n (A_i \cap B_j)$ und $B_j = \bigcup_{i=1}^m (A_i \cap B_j)$ für $1 \le i \le m$ bzw. $1 \le j \le n$, wobei die Mengen $A_i \cap B_j$ in beiden Vereinigungen jeweils paarweise disjunkt sind. Es folgt

$$\mu(A_i) = \sum_{j=1}^n \mu(A_i \cap B_j) \qquad \text{und} \qquad \mu(B_j) = \sum_{i=1}^m \mu(A_i \cap B_j).$$

Sei $\mathcal{S}$ die Menge aller Paare (i, j) mit $A_i \cap B_j \neq \emptyset$. Für diese Paare (i, j) und beliebige Punkte $x \in A_i \cap B_j$ gilt $\alpha_i = f(x) = \beta_j$. Wir definieren $\gamma_{ij} = \alpha_i = \beta_j$ für alle $(i, j) \in \mathcal{S}$ und erhalten

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(A_i) \quad = \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) \quad = \quad \sum_{(i,j) \in \mathcal{S}} \gamma_{ij} \mu(A_i \cap B_j) \quad =$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \beta_j \mu(A_i \cap B_j) \quad = \quad \sum_{j=1}^n \beta_j \mu(B_j).$$ □

Definition 6.5 Das μ-***Integral*** einer Funktion $f \in E(\Omega, \mathcal{A})$ der Form $f = \sum_{i=1}^{m} u_i 1_{A_i}$ mit $u_1, ..., u_m \in \mathbb{R}_+$ und paarweise disjunkten $A_1, ..., A_m \in \mathcal{A}$ mit $\Omega = A_1 \cup ... \cup A_m$ ist definiert durch

$$\int f \, d\mu \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} u_i \mu(A_i),$$

wobei wir $u_i \mu(A_i)$ im Fall $u_i = 0$, $\mu(A_i) = +\infty$ gleich Null setzen.

Nach Lemma 6.4 ist der Wert des Integral von der Darstellung der Funktion f unabhängig.

Proposition 6.6 Für $A \in \mathcal{A}$, $f, g \in E(\Omega, \mathcal{A})$ und $\alpha \in \mathbb{R}_+$ gelten folgende Rechenregeln.

(i) $\int 1_A \, d\mu = \mu(A)$

(ii) $\int (\alpha f) \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu$

(iii) $\int (f+g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$

(iv) $f \le g \Rightarrow \int f \, d\mu \le \int g \, d\mu$

Beweis: Gleichung (i) ergibt sich direkt aus der Definition. Für den Beweis von (ii) bis (iv) seien die Funktionen f, g in der Form $f = \sum_{i=1}^{m} u_i 1_{A_i}$ und $g = \sum_{j=1}^{n} v_j 1_{B_j}$ vorgegeben, mit $u_i, v_j \in \mathbb{R}_+$ und $A_i, B_j \in \mathcal{A}$, wobei die Mengen $A_1, ..., A_m$ und $B_1, ..., B_n$ jeweils paarweise disjunkt sind und ihre Vereinigung jeweils Ω ergibt. Weil der Wert des Integrals von der Darstellung der Funktion als Summe unabhängig ist, können wir an Stelle von $A_1, ..., A_m$ und $B_1, ..., B_n$ das System der Schnittmengen $A_i \cap B_j$ zu Grund legen. Es gilt dann $f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} u_{ij} 1_{A_i \cap B_j}$, $g = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} v_{ij} 1_{A_i \cap B_j}$ und

$$\int f \, d\mu = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} u_{ij} \mu(A_i \cap B_j) \qquad , \qquad \int g \, d\mu = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} v_{ij} \mu(A_i \cap B_j)$$

mit $u_{ij} = u_i$ und $v_{ij} = v_j$ für $1 \le i \le m$ und $1 \le j \le n$. Wegen $f + g = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (u_{ij} + v_{ij}) 1_{A_i \cap B_j}$ folgt

$$\int (f+g) \, d\mu \quad = \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (u_{ij} + v_{ij}) \mu(A_i) \quad =$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} u_{ij} \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} v_{ij} \mu(A_i \cap B_j) \quad = \quad \int f \, d\mu + \int g \, d\mu.$$

Durch die Darstellung $\alpha f = \sum_{i=1}^{m} (\alpha u_i) 1_{A_i}$ erhalten wir

$$\int (\alpha f) \, d\mu \quad = \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha u_i \mu(A_i) \quad = \quad \alpha \sum_{i=1}^{m} u_i \mu(A_i) \quad = \quad \alpha \int f \, d\mu.$$

Aus $f \le g$ folgt schließlich $u_{ij} \le v_{ij}$ für $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ und damit

$$\int f \, d\mu \quad = \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} u_{ij} \mu(A_i \cap B_j) \quad \le \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} v_{ij} \mu(A_i \cap B_j) \quad = \quad \int g \, d\mu. \qquad \square$$

Unser nächstes Ziel besteht darin, den Integralbegriff auf allgemeinere nicht-negative Funktionen auszudehnen

Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ bezeichnen wir als ***monoton wachsend***, wenn $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ für alle $x \in \Omega$ und $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. Weiterhin sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein festgewählter Maßraum.

Satz 6.7 Eine Funktion $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}_+$ ist genau dann $\mathcal{A}$-messbar, wenn eine monoton wachsende Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $E(\Omega, \mathcal{A})$ mit $f = \sup f_n$ existiert.

Beweis: „$\Leftarrow$" Nach Satz 5.11 ist f als Supremum einer Folge $\mathcal{A}$-messbarer Funktionen selbst $\mathcal{A}$-messbar.
„$\Rightarrow$" Die wesentliche Idee besteht darin, f durch $\mathcal{A}$-Stufenfunktionen zunehmend genauer zu approximieren, wobei wir die Stellen $x \in \Omega$ mit $f(x) = +\infty$ gesondert berücksichtigen müssen. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ seien die Mengen A_{np} gegeben durch

$$A_{np} \quad = \quad \begin{cases} \{x \in \Omega \mid p2^{-n} \le f(x) < (p+1)2^{-n}\} & \text{für } 0 \le p \le n2^n - 1 \\ \{x \in \Omega \mid f(x) \ge n\} & \text{für } p = n2^n \end{cases}$$

Die Menge der $x \in \Omega$ mit $0 \le f(x) < n$ wird also zunehmend feiner aufgeteilt, je nach Wert der Funktion f, während die übrigen Punkte in der Menge $A_{n,n2^n}$ zusammengefasst werden. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sind die Mengen A_{np} in $\mathcal{A}$ enthalten, paarweise disjunkt, und es gilt $\Omega = \bigcup_{p=0}^{n2^n} A_{np}$. Durch $f_n = \sum_{p=0}^{n2^n} p2^{-n} \cdot 1_{A_{np}}$ erhalten wir jeweils eine Funktion in $E(\Omega, \mathcal{A})$. Wir zeigen nun, dass die Folge dieser Funktionen monoton wächst. Für alle n, p mit $0 \le p < n2^n$ gilt $A_{np} = A_{n+1,2p} \cup A_{n+1,2p+1}$ auf Grund der Äquivalenzen

$$x \in A_{np} \quad \Leftrightarrow \quad p2^{-n} \le f(x) < (p+1)2^{-n} \quad \Leftrightarrow \quad (2p)2^{-(n+1)} \le f(x) < (2p+2)2^{-(n+1)} \quad \Leftrightarrow$$
$$(2p)2^{-(n+1)} \le f(x) < (2p+1)2^{-(n+1)} \ \vee \ (2p+1)2^{-(n+1)} \le f(x) < (2p+2)2^{-(n+1)}$$
$$\Leftrightarrow \quad x \in A_{n+1,2p} \vee x \in A_{n+1,2p+1} \quad \Leftrightarrow \quad x \in A_{n+1,2p} \cup A_{n+1,2p+1}.$$

Auf A_{np} ist f_n konstant gleich $p2^{-n}$, und f_{n+1} nimmt nur die Werte $p2^{-n} = (2p)2^{-(n+1)}$ und $(2p+1)2^{-(n+1)}$ an, also gilt hier $f_{n+1}(x) \ge f_n(x)$. Für alle $x \in \Omega$ gilt $f(x) \ge n$ genau dann, wenn $p2^{-(n+1)} \le f(x) < (p+1)2^{-(n+1)}$ für ein p mit $n2^{n+1} \le p \le (n+1)2^{n+1} - 1$ gilt, oder wenn $f(x) \ge n+1$ erfüllt ist. Im ersten Fall ist $f_{n+1}(x) = p2^{-(n+1)} \ge n = f_n(x)$, im zweiten $f_{n+1}(x) = n+1 \ge n = f_n(x)$. Insgesamt ist die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ also überall monoton wachsend.

Wir zeigen nun, dass $f = \sup f_n$ gilt und betrachten dafür einen beliebigen Punkt $x \in \Omega$. Im Fall $f(x) = +\infty$ gilt $f_n(x) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $\sup f_n(x) = +\infty = f(x)$. Ist $f(x)$ endlich, dann gilt $f_n(x) \le f(x) < f_n(x) + 2^{-n}$ für alle $n > f(x)$. Durch Grenzübergang $n \to \infty$ erhalten wir $f(x) = \lim f_n(x) = \sup f_n(x)$. □

Wir werden nun diese monoton wachsenden Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dazu verwenden, der Funktion f ein Integral zuzuordnen. Zur Vorbereitung beweisen wir

Satz 6.8 Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge in $E(\Omega, \mathcal{A})$ und $f \in E(\Omega, \mathcal{A})$ eine Funktion mit $f \le \sup f_n$. Dann folgt

$$\int f \, d\mu \quad \le \quad \sup \int f_n \, d\mu.$$

Beweis: Wir stellen die Funktion f in der Form $f = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j 1_{A_j}$ mit $\alpha_j \in \mathbb{R}_+$ und $A_j \in \mathcal{A}$ dar. Sei $\alpha \in \,]0,1[$ vorgegeben und $B_n = \{x \in \Omega \mid f_n(x) \geq \alpha f(x)\}$. Wir zeigen

$$\text{(i)} \int f_n \, d\mu \geq \alpha \int f \cdot 1_{B_n} d\mu \;\text{ für alle }\; n \in \mathbb{N} \qquad \text{und} \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \int f \cdot 1_{B_n} \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

zu (i) Nach Definition gilt $\alpha f \cdot 1_{B_n} \leq f_n 1_{B_n} \leq f_n$. Für die Integrale folgt daraus

$$\alpha \int f \cdot 1_{B_n} d\mu \quad = \quad \int \alpha f \cdot 1_{B_n} d\mu \quad \leq \quad \int f_n \, d\mu.$$

zu (ii) Weil die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist, gilt dasselbe für die Folge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$, und aus $f \leq \sup f_n$ folgt $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Somit ist für jedes $j \in \{1,...,m\}$ auch die Folge $(A_j \cap B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend, und es gilt $A_j = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_j \cap B_n)$. Auf Grund der σ-Additivität des Maßes μ erhalten wir

$$\int f \, d\mu \quad = \quad \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mu(A_j) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mu(A_j \cap B_n) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \int f \cdot 1_{B_n} d\mu.$$

Die Aussagen (i) und (ii) liefern zusammen

$$\sup \int f_n \, d\mu \quad \geq \quad \sup \alpha \int f \cdot 1_{B_n} \, d\mu \quad = \quad \alpha \cdot \lim_{n\to\infty} \int f \cdot 1_{B_n} \, d\mu \quad = \quad \alpha \int f \, d\mu.$$

Weil $\alpha \in \,]0,1[$ beliebig gewählt war, folgt aus dieser Abschätzung die Behauptung. □

Folgerung 6.9 Sind $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei monoton wachsende Folgen in $E(\Omega, \mathcal{A})$ mit $\lim f_n = \lim g_n$, dann folgt $\sup \int f_n \, d\mu = \sup \int g_n \, d\mu$.

Beweis: Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $g_m \leq \sup f_n$, also $\int g_m \, d\mu \leq \sup \int f_n \, d\mu$ nach Satz 6.8. Es folgt $\sup \int g_m \, d\mu \leq \sup \int f_n \, d\mu$. Ebenso erhält man die umgekehrte Abschätzung. □

Definition 6.10 Sei $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}_+$ eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge in $E(\Omega, \mathcal{A})$ mit $\sup f_n = f$. Dann ist das ***μ-Integral*** von f definiert durch

$$\int f \, d\mu \quad = \quad \sup \int f_n \, d\mu.$$

Nach Satz 6.7 existiert zumindest eine Folge von Stufenfunktionen mit den angegebenen Eigenschaften, und nach Folgerung 6.9 ist die Definition von der Wahl der Folge unabhängig.

Satz 6.11 Für alle $\mathcal{A}$-messbaren Funktionen f, g und alle $\alpha \in \mathbb{R}_+$ gilt

(i) $\int (\alpha f)\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu$

(ii) $\int (f+g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu$

(iii) Ist $f \le g$, dann folgt $\int f\, d\mu \le \int g\, d\mu$.

Beweis: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge in $E(\Omega, \mathcal{A})$ mit $\sup f_n = f$. Dann ist $(\alpha f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls eine monoton wachsende Folge in $E(\Omega, \mathcal{A})$ mit $\sup \alpha f_n = \alpha f$. Die Folge der Integrale $\int f_n\, d\mu$ ist monoton wachsend, deshalb gilt $\sup \int f_n\, d\mu = \lim_n \int f_n\, d\mu$. Entsprechendes gilt für die Folge der Integrale über die Funktionen αf_n. Insgesamt erhalten wir

$$\int (\alpha f)\, d\mu \quad = \quad \sup \int (\alpha f_n)\, d\mu \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \int (\alpha f_n)\, d\mu \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \alpha \int f_n\, d\mu \quad =$$

$$\alpha \cdot \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu \quad = \quad \alpha \cdot \sup \int f_n\, d\mu \quad = \quad \alpha \int f\, d\mu.$$

wobei wir verwendet haben, das die Vertauschbarkeit von skalarer Multiplikation und Integrationen für Funktionen aus $E(\Omega, \mathcal{A})$ bereits gezeigt wurde. Genauso beweist man auch die Gleichung (ii). Ist $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\sup g_n = g$, dann gilt $\sup(f_n + g_n) = f + g$, und wir erhalten

$$\int (f+g)\, d\mu \quad = \quad \sup \int (f_n + g_n)\, d\mu \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \int (f_n + g_n)\, d\mu \quad =$$

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu + \lim_{n\to\infty} \int g_n\, d\mu \quad = \quad \sup \int f_n\, d\mu + \sup \int g_n\, d\mu \quad = \quad \int f\, d\mu + \int g\, d\mu.$$

Setzen wir nun $f \le g$ voraus, und beweisen wir die Ungleichung (iii) zwischen den Integralen. Wieder seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsende Folgen in $E(\Omega, \mathcal{A})$ mit $f = \sup f_n$ und $g = \sup g_n$. Aus $f \le g$ folgt $f_m \le \sup g_n$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Nach Satz 6.8 folgt $\int f_m\, d\mu \le \sup \int g_n\, d\mu$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Durch Übergang zum Supremum erhalten wir

$$\int f\, d\mu \quad = \quad \sup \int f_n\, d\mu \quad \le \quad \sup \int g_n\, d\mu \quad = \quad \int g\, d\mu.$$

□

Satz 6.12 *(Satz über die monotone Konvergenz)*

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge $\mathcal{A}$-messbarer Funktionen $f_n : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}_+$, und sei $f = \sup f_n$. Dann ist auch f eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion, und es gilt

$$\int f\, d\mu \quad = \quad \sup \int f_n\, d\mu.$$

Beweis: Dass das Supremum einer Folge $\mathcal{A}$-messbarer Funktionen selbst $\mathcal{A}$-messbar ist, wurde bereits gezeigt. Es gilt $f_n \le f$ für alle $n \in \mathbb{N}$, nach Satz 6.11 (iii) folgt daraus $\int f_n \, d\mu \le \int f \, d\mu$, durch Übergang zum Supremum also $\sup \int f_n \, d\mu \le \int f \, d\mu$. Um auch die umgekehrte Abschätzung zu beweisen, wählen wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine monoton wachsende Folge $(u_{np})_{p\in\mathbb{N}}$ in $E(\Omega, \mathcal{A})$ mit $f_n = \sup_{p\in\mathbb{N}} u_{np}$. Für jedes $p \in \mathbb{N}$ sei $v_p = \max\{u_{1p}, ..., u_{pp}\}$. Auch diese Funktionen sind in $E(\Omega, \mathcal{A})$ enthalten. Wir beweisen nun die Gleichung $f = \sup_{n\in\mathbb{N}} v_n$. Zunächst gilt $v_p \le \max\{f_1, ..., f_p\} = f_p$ und somit $\sup_{p\in\mathbb{N}} v_p \le \sup_{p\in\mathbb{N}} f_p = f$. Andererseits ist $u_{np} \le v_p$ für $n \le p$, also $\sup_{p\in\mathbb{N}} u_{np} \le \sup_{p\in\mathbb{N}} v_p$ und somit $f_n \le \sup_{p\in\mathbb{N}} v_p$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt $f = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \le \sup_{p\in\mathbb{N}} v_p$ durch Übergang zum Supremum, insgesamt also $f = \sup_{p\in\mathbb{N}} v_p$. Dies bedeutet, dass wir die Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $E(\Omega, \mathcal{A})$ zur Berechnung des Integrals der Funktion f verwenden können. Zusammen mit der Abschätzung $v_n \le f_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir

$$\int f \, d\mu \quad = \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \int v_n \, d\mu \quad \le \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n \, d\mu \quad ,$$

insgesamt also $\sup \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$ wie gewünscht. □

Im nachfolgenden Teil soll nun noch die Beschränkung auf nichtnegative Funktionen aufgehoben werden.

Definition 6.13 Eine Funktion $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ wird ***μ-integrierbar*** genannt, wenn f eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion und die Integrale $\int f^+ \, d\mu$, $\int f^- \, d\mu$ endlich (also $\mathbb{R}$-wertig) sind. In diesem Fall nennt man

$$\int f \, d\mu \quad = \quad \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu \qquad \text{das } \mu\text{-}\textbf{\textit{Integral}} \text{ von } f.$$

Ist der zu Grunde liegende Maßraum speziell der Raum $(\mathbb{R}^d, \mathcal{A}_d, \mu_d)$ mit dem Lebesgue-Maß μ_d und der σ-Algebra $\mathcal{A}_d$ der Lebesgue-messbaren Funktionen, dann nennt man die μ_d-integrierbaren Funktionen auch ***Lebesgue-integrierbar*** und spricht vom ***Lebesgue-Integral*** der Funktion.

Eine nicht-negative, $\mathcal{A}$-messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$ ist nach Definition genau dann μ-integrierbar, wenn das Integral $\int f \, d\mu$ in $\mathbb{R}$ liegt. Ist dies nämlich der Fall, dann ist auch $\int f^+ \, d\mu$ endlich wegen $f^+ = f$, und $f^- = 0$ ist eine Stufenfunktion mit Integral Null. Also ist f nach Definition μ-integrierbar. Setzen wir dies umgekehrt voraus, dann ist das Integral über $f^+ = f$ endlich.

Satz 6.14 Für eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(i) Die Funktion f ist μ-integrierbar.

(ii) Es gibt μ-integrierbare Funktionen $g, h : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}_+$ mit $f = g - h$.

(iii) Es gibt eine μ-integrierbare Funktion $g_1 : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}_+$ mit $|f| \le g_1$.

(iv) Die Funktion $|f|$ ist μ-integrierbar.

Ist Bedingung (ii) mit den Funktionen g und h erfüllt, dann gilt $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu - \int h \, d\mu$.

Beweis: „(i) $\Rightarrow$ (ii)" Sei $g = f^+$ und $h = f^-$. Auf Grund der Bemerkung sind g und h beides μ-integrierbare Funktionen, und es gilt $f = g - h$.

„(ii) $\Rightarrow$ (iii)" Mit g und h ist auch $g_1 = g + h$ eine μ-integrierbare Funktion. Es gilt $f = g - h \leq g + h = g_1$ und $-f = h - g \leq h \leq g + h = g_1$, insgesamt also $|f| \leq g_1$.

„(iii) $\Rightarrow$ (iv)" Es gilt $|f|^- = 0$, also ist $|f|^-$ eine Stufenfunktion, und das μ-Integral über $|f|^-$ ist gleich Null. Außerdem gilt $\int |f|\, d\mu \leq \int g_1\, d\mu < +\infty$.

„(iv) $\Rightarrow$ (i)" Wegen $f^+ \leq |f|$ und $f^- \leq |f|$ sind die μ-Integrale über f^+ und f^- endlich. Also ist f nach Definition eine μ-integrierbare Funktion.

Zum Schluss beweisen wir die zusätzliche Aussage zum Punkt (ii). Aus $f = g - h = f^+ - f^-$ folgt $g + f^- = h + f^+$. Es folgt $\int g\, d\mu + \int f^-\, d\mu = \int (g + f^-)\, d\mu = \int (h + f^+)\, d\mu = \int h\, d\mu + \int f^+\, d\mu$, also $\int f\, d\mu = \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu = \int g\, d\mu - \int h\, d\mu$. □

Satz 6.15 Seien $f, g : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ zwei μ-integrierbare Funktionen und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen $f + g$, αf, $\min\{f, g\}$ und $\max\{f, g\}$, sofern sie auf ganz Ω definiert sind, jeweils μ-integrierbar. Es gilt dann

$$\int (f+g)\, d\mu \;=\; \int f\, d\mu + \int g\, d\mu \quad \text{und} \quad \int (\alpha f)\, d\mu \;=\; \alpha \int f\, d\mu.$$

Beweis: Sei zunächst $\alpha \geq 0$. Dann gilt $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$, $(\alpha f)^- = \alpha f^-$, und mit f^+, f^- sind auch $(\alpha f)^+$ und $(\alpha f)^-$ beides $\mathcal{A}$-messbare Funktionen. Weil $\int f^+\, d\mu$ endlich ist, gilt dasselbe für $\int (\alpha f)^+\, d\mu = \alpha \int f^+\, d\mu$, ebenso ist $\int (\alpha f)^-\, d\mu$ endlich. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \int (\alpha f)\, d\mu &= \int (\alpha f)^+\, d\mu - \int (\alpha f)^-\, d\mu = \alpha \int f^+\, d\mu - \alpha \int f^-\, d\mu = \\ &\alpha \left(\int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu \right) = \alpha \int f\, d\mu. \end{aligned}$$

Im Fall $\alpha < 0$ gilt $(\alpha f)^+ = (-\alpha) f^-$ und $(\alpha f)^- = (-\alpha) f^+$. Aus $\int f^-\, d\mu < +\infty$ folgt $\int (\alpha f)^+\, d\mu = \int (-\alpha) f^-\, d\mu = (-\alpha) \int f^-\, d\mu < +\infty$, und auf Grund der Voraussetzung $\int f^+\, d\mu < +\infty$ gilt $\int (\alpha f)^-\, d\mu = \int (-\alpha) f^+\, d\mu = (-\alpha) \int f^+\, d\mu < +\infty$. Also ist αf eine μ-integrierbare Funktion. Für das Integral gilt

$$\begin{aligned} \int \alpha f\, d\mu &= \int (\alpha f)^+\, d\mu - \int (\alpha f)^-\, d\mu = (-\alpha) \int f^-\, d\mu - (-\alpha) \int f^+\, d\mu = \\ &\alpha \int f^+\, d\mu - \alpha \int f^-\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu. \end{aligned}$$

Nun beweisen wir die entsprechenden Aussagen für die Funktion $f + g$. Mit f^+, f^-, g^+ und g^- sind auch die Funktionen $u = f^+ + g^+$ und $v = f^- + g^-$ jeweils μ-integrierbar, und es gilt $u - v = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-) = f + g$. Nach

Satz 6.14 (ii) ist damit auch $f+g$ eine μ-integrierbare Funktion, und es gilt

$$\int (f+g)\,d\mu \quad = \quad \int u\,d\mu - \int v\,d\mu \quad = \quad \int f^+\,d\mu + \int g^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu - \int g^-\,d\mu \quad = \quad \int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu + \int g^+\,d\mu - \int g^-\,d\mu \quad = \quad \int f\,d\mu + \int g\,d\mu.$$

Die Funktionen $\min\{f,g\}$ und $\max\{f,g\}$ sind nach Folgerung 5.12 beide $\mathcal{A}$-messbar, und es gilt $|\min\{f,g\}| \le |f|+|g|$ sowie $|\max\{f,g\}| \le |f|+|g|$. Die Funktion $|f|+|g|$ ist μ-integrierbar, wie wir bereits festgestellt haben. Also sind $\min\{f,g\}$ und $\max\{f,g\}$ nach Satz 6.14 (iii) jeweils μ-integrierbar. □

Der Satz zeigt insbesondere, dass die reellwertigen μ-integrierbaren Funktionen einen $\mathbb{R}$-Vektorraum bilden, den wir mit $\mathscr{L}^1(\mu)$ bezeichnen. Im Fall des Lebesgue-Maßes μ_d auf dem $\mathbb{R}^d$ bezeichnen wir diesen Raum auch mit $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$.

Bemerkenswerterweise ist das Produkt fg zweier μ-integrierbarer Funktionen im allgemeinen nicht μ-integrierbar. Sei $p \in \mathbb{N}$ mit $p \ge 2$ und der Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu_p)$ gegeben durch $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ und die Funktion

$$\mu_p(A) \quad = \quad \sum_{n\in A} n^{-p-1}.$$

Man überprüft unmittelbar, dass durch μ_p tatsächlich ein Maß definiert ist. Ist $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ eine Funktion, die nur an endlich vielen Stellen einen Wert ungleich Null annimmt, dann ist f eine Stufenfunktion, und die einelementigen Mengen $\{n\}$ sind in $\mathcal{A} = \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ enthalten. Nach Definition des μ_p-Integrals gilt

$$\int f\,d\mu_p \quad = \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)\mu_p(\{n\}) \quad = \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} f(n) n^{-p-1}.$$

Sei nun f eine beliebige nicht-negative Funktion. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $M_n = \{k \in \mathbb{N} \mid 1 \le k \le n\}$ und $f_n = f \cdot 1_{M_n}$. Dann ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge in $E(\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}))$ mit $\sup f_n = f$. Dies zeigt, dass f eine $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$-messbare Funktion ist. Weiter gilt

$$\int f\,d\mu_p \quad = \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n\,d\mu_p \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu_p \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in M_n} f_n(k) n^{-p-1} \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in M_n} f(k) k^{-p-1} \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(k) k^{-p-1} \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty} f(n) n^{-p-1}.$$

Wir betrachten nun die spezielle Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben durch $n \mapsto n$. Dann gilt $\int f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} < +\infty$, aber $\int f^p\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} = +\infty$. Die p-te Potenz von f ist also im Gegensatz zu f nicht μ-integrierbar. Es gilt aber

Proposition 6.16 Ist $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ μ-integrierbar und $g : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ beschränkt und messbar, dann ist auch das Produkt μ-integrierbar, sofern es auf ganz Ω definiert ist.

Beweis: Nach Satz 5.10 ist fg eine messbare Funktion. Da g beschränkt ist, existiert eine Konstante $\gamma \in \mathbb{R}^+$ mit $|g(x)| \le \gamma$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$. Es gilt also $|g| \le \gamma$, und daraus folgt $(fg)^+ \le |fg| \le \gamma|f|$ und $(fg)^- \le |fg| \le \gamma|f|$. Weil f eine μ-integrierbare Funktion ist, gilt $\int |f|\,d\mu < +\infty$. Auf Grund der Ungleichungen folgt $\int (fg)^+\,d\mu \le \gamma \int |f|\,d\mu < +\infty$ und ebenso $\int (fg)^-\,d\mu \le \gamma \int |f|\,d\mu < +\infty$. Dies zeigt, dass auch fg eine μ-integrierbare Funktion ist. □

Ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so wird der Abschluss der Menge $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ der ***Träger*** der Funktion genannt.

Satz 6.17 Jede stetige Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger ist Lebesgue-integrierbar.

Beweis: Aus Proposition 5.5 folgt, dass f Borel-messbar und damit auch Lebesgue-messbar ist. Sei $T \subseteq \mathbb{R}^d$ der kompakte Träger von f. Auf Grund des Maximumsprinzips und der Stetigkeit von f existiert eine Konstante $\gamma \in \mathbb{R}^+$ mit $|f(x)| \leq \gamma$ für alle $x \in T$; es gilt also $|f| \leq \gamma \cdot 1_T$. Da T als kompakte Menge auch beschränkt ist, hat das Lebesgue-Maß $\mu_d(T)$ einen endlichen Wert. Wegen $f^+ \leq |f| \leq \gamma \cdot 1_T$ gilt $\int f^+ \, d\mu_d \leq \int \gamma \cdot 1_T \, d\mu = \gamma \cdot \mu_d(T) < +\infty$, und ebenso weist man die Endlichkeit des Integrals $\int f^- \, d\mu_d$ nach. Also ist f tatsächlich Lebesgue-integrierbar. □

Definition 6.18 Sei $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ eine μ-integrierbare Funktion und $A \in \mathcal{A}$. Dann ist das ***μ-Integral von f über A*** definiert durch

$$\int_A f \, d\mu \quad = \quad \int f \cdot 1_A \, d\mu \quad ,$$

wobei wir von der Konvention $(+\infty) \cdot 0 = 0$ und $(-\infty) \cdot 0 = 0$ Gebrauch machen, falls f unendliche Werte annimmt. Man beachte, dass das Integral auf der rechten Seite wegen $|1_A \cdot f| \leq |f|$ tatsächlich existiert.

Ist $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ eine μ-integrierbare Funktion, und sind $A, B \in \mathcal{A}$, dann gilt

$$\int_{A \cup B} f \, d\mu + \int_{A \cap B} f \, d\mu \quad = \quad \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu.$$

Dies folgt unmittelbar aus der Gleichung $f \cdot 1_{A \cup B} + f \cdot 1_{A \cap B} = f \cdot 1_A + f \cdot 1_B$. Sind A und B disjunkt, dann gilt insbesondere $\int_{A \cup B} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu$.

Ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $B \in \mathcal{A}$, dann ist $\mathcal{A}_B = \{A \cap B \mid A \in \mathcal{A}\}$ offenbar eine in $\mathcal{A}$ enthaltene σ-Algebra. Durch das Tripel $(A, \mathcal{A}_B, \mu_B)$ mit und $\mu_B = \mu|_{\mathcal{A}_B}$ ist wiederum ein Maßraum gegeben, denn mit μ ist auch die eingeschränkte Abbildung μ_B abzählbar additiv.

Lemma 6.19 Sei $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ eine μ-integrierbare Funktion und $B \in \mathcal{A}$. Dann ist die Einschränkung $f|_B$ eine μ_B-integrierbare Funktion, und es gilt

$$\int (f|_B) \, d\mu_B \quad = \quad \int_B f \, d\mu. \tag{6.1}$$

Beweis: Wir betrachten zunächst den Fall, dass f nicht-negativ und lediglich $\mathcal{A}$-messbar ist. Für alle $C \in \bar{\mathcal{B}}^1$ gilt $(f|_B)^{-1}(C) = B \cap f^{-1}(C) \in \mathcal{A}$. Also ist $f|_B$ eine $\mathcal{A}_B$-messbare Funktion. Wir beweisen nun die Gleichung (6.1). Weil

$f \cdot 1_B$ eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion ist, gibt es eine monoton wachsende Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $E(\Omega,\mathcal{A})$ mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n = f \cdot 1_B$. Die Folge $(f_n|_B)|_{n\in\mathbb{N}}$ ist dann in $E(B,\mathcal{A}_B)$ enthalten, ebenfalls monoton wachsend, und es gilt $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n|_B = f|_B$. Nach Definition gilt

$$\int_B f \; d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n \; d\mu \qquad \text{und} \qquad \int (f|_B) \; d\mu_B = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int (f_n|_B) \; d\mu_B. \tag{6.2}$$

Wir zeigen nun, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung $\int f_n \; d\mu = \int (f_n|_B) \; d\mu_B$ erfüllt ist. Wegen $f_n \in E(\Omega,\mathcal{A})$ gibt es ein $k_n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1,...,\alpha_{k_n} \in \mathbb{R}_+$ und $B_1,...,B_{k_n} \in \mathcal{A}$ mit $f_n = \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_i \cdot 1_{B_i}$, wobei wir $\alpha_i > 0$ für $1 \le i \le k_n$ annehmen können. Wegen $0 \le f_n \le f \cdot 1_B$ gilt $B_i \subseteq B$ für $1 \le i \le k_n$. Außerdem ist $f_n|_B = \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_i \cdot 1_{B_i}|_B$. Damit erhalten wir für die Integrale

$$\int f_n \; d\mu \quad = \quad \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_i \mu(B_i) \quad = \quad \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_i \mu_B(B_i) \quad = \quad \int (f_n|_B) \; d\mu_B.$$

Wegen (6.2) ist die Gleichung (6.1) also für nicht-negatives f bewiesen. Insbesondere ist das Integral $\int (f|_B) \; d\mu_B$ genau dann endlich, wenn $\int_B f \; d\mu$ endlich ist.

Sei nun $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ eine μ-integrierbare Funktion. Dann sind die Integrale $\int_B f^+ \; d\mu$ und $\int_B f^- \; d\mu$ endlich, auf Grund des bisher Gezeigten wegen $(f|_B)^+ = f^+|_B$ und $(f|_B)^- = f^-|_B$ also auch $\int (f|_B)^+ \; d\mu_B$ und $\int (f|_B)^- \; d\mu_B$. Damit ist $f|_B$ eine μ_B-integrierbare Funktion. Außerdem gilt

$$\int_B f \; d\mu \quad = \quad \int_B f^+ \; d\mu - \int_B f^- \; d\mu \quad = \quad \int_B (f|_B)^+ \; d\mu_A - \int_B (f|_B)^- \; d\mu_B \quad = \quad \int (f|_B) \; d\mu_B. \qquad \square$$

Ist B eine Teilmenge unseres Maßraums $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ mit $B \in \mathcal{A}$, so bezeichnen wir eine Funktion $f : B \to \bar{\mathbb{R}}$ als ***μ-integrierbar***, wenn f auf dem Maßraum $(B,\mathcal{A}_B,\mu_B)$ eine μ_B-integrierbare Funktion ist, und zur Vereinfachung der Notation setzt man

$$\int_B f \, d\mu \quad = \quad \int f \, d\mu_B.$$

Aus dem Lemma folgt also, dass für jede μ-integrierbare Funktion $g : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ und jedes $B \in \mathcal{A}$ auch die Einschränkung $g|_B$ eine μ-integrierbare Funktion ist und dann $\int_B g \, d\mu = \int_B (g|_B) \, d\mu$ gilt. Anstelle einer Einschränkung kann der Definitionsbereich einer Funktion auch ausgeweitet werden.

Definition 6.20 Sei $B \in \mathcal{A}$, $f : B \to \bar{\mathbb{R}}$ und $\widehat{f_B} : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ definiert durch

$$\widehat{f_B}(x) \quad = \quad \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in B \\ 0 & \text{für } x \notin B. \end{cases}$$

Dann nennen wir $\widehat{f_B}$ die ***Nullfortsetzung*** von f auf Ω.

Das folgende Lemma besagt, dass die Nullfortsetzung von messbaren bzw. integrierbaren Funktionen wiederum messbar bzw. integrierbar ist.

Lemma 6.21 Sei $B \in \mathcal{A}$ und $f : B \to \bar{\mathbb{R}}$ eine Funktion.

(i) Ist f nicht-negativ und $\mathcal{A}_B$-messbar, dann ist $\widehat{f}_B$ eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion.

(ii) Ist f μ-integrierbar, dann gilt dasselbe für $\widehat{f}_B$, und es gilt $\int_B f \, d\mu = \int \widehat{f}_B \, d\mu$.

Beweis: zu (i) Auf Grund der $\mathcal{A}_B$-Messbarkeit von f gibt es nach Satz 6.7 eine monoton wachsende Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $E(B, \mathcal{A}_B)$ mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n = f$. Sei g_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ jeweils die Nullfortsetzung von f_n. Dann ist g_n jeweils in $E(\Omega, \mathcal{A})$ enthalten. Denn für jeden der endlich vielen Werte c ungleich null, die von f_n angenommen werden, gilt $g_n^{-1}(\{c\}) = f_n^{-1}(\{c\}) \in \mathcal{A}_B$, wegen $\mathcal{A}_B \subseteq \mathcal{A}$ also auch $g_n^{-1}(\{c\}) \in \mathcal{A}$. Außerdem gilt $g_n^{-1}(\{0\}) = f_n^{-1}(\{0\}) \cup (\Omega \setminus B) \in \mathcal{A}$. Darüber hinaus gilt offenbar $\sup_{n\in\mathbb{N}} g_n = \widehat{f}_B$. Wiederum nach Satz 6.7 zeigt dies, dass $\widehat{f}_B$ eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion ist.

zu (ii) Sei f zunächst nicht-negativ. Nach Definition gilt $\widehat{f}_B|_B = f$ und $\widehat{f}_B \cdot 1_B = \widehat{f}_B$, und wegen Lemma 6.19 folgt daraus

$$\int_B f \, d\mu \quad = \quad \int (\widehat{f}_B|_B) \, d\mu_B \quad = \quad \int_B \widehat{f}_B \, d\mu \quad = \quad \int \widehat{f}_B \cdot 1_B \, d\mu \quad = \quad \int \widehat{f}_B \, d\mu.$$

Sei nun $f : B \to \bar{\mathbb{R}}$ eine beliebige μ-integrierbare Funktion. Dann gilt nach Definition $\int_B f^+ \, d\mu < +\infty$ und $\int_B f^- \, d\mu_B < +\infty$. Die Funktionen $(\widehat{f}_B)^+$ und $(\widehat{f}_B)^-$ sind die Nullfortsetzungen von f^+ bzw. f^-, und auf Grund des bisher Gezeigten gilt $\int (\widehat{f}_B)^+ \, d\mu = \int_B f^+ \, d\mu < +\infty$ und ebenso $\int (\widehat{f}_B)^- \, d\mu < +\infty$. Also ist die Funktion $\widehat{f}_B$ tatsächlich μ-integrierbar, und aus der Gleichheit der Integrale für f^+ und f^- folgt die entsprechende Gleichheit der Integrale für f. □

Definition 6.22 Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Wir bezeichnen eine Teilmenge $N \subseteq \Omega$ als ***Nullmenge***, wenn $\mu(N) = 0$ gilt.

Im weiteren Verlauf verwenden wir die folgende Sprechweise: Wir sagen, eine Funktion $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ besitzt eine Eigenschaft ***μ-fast überall***, wenn eine Nullmenge $N \subseteq \Omega$ existiert, so dass die Eigenschaft für alle $x \in \Omega \setminus N$ erfüllt ist. Wir illustrieren dies an einer Reihe von Beispielen.

(i) Wir sagen, zwei Funktionen $f, g : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ sind ***μ-fast überall gleich***, falls eine Nullmenge $N \subseteq \Omega$ existiert, so dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \Omega \setminus N$ gilt. Insbesondere sagt man, die Funktion f ***verschwindet μ-fast überall***, wenn f μ-fast überall mit der Nullfunktion übereinstimmt.

(ii) Eine Funktion $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ ist ***μ-fast überall endlich***, falls eine Nullmenge $N \subseteq \Omega$ existiert, so dass $|f(x)| < +\infty$ für alle $x \in \Omega \setminus N$ erfüllt ist.

Satz 6.23 Sei $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}_+$ eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion. Genau dann ist $\int f \, d\mu = 0$, wenn f μ-fast überall verschwindet.

Beweis:

Sei $N = \{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\} = \{x \in \Omega \mid f(x) > 0\}$. Zu zeigen ist die Äquivalenz $\int f \, d\mu = 0 \Leftrightarrow \mu(N) = 0$.

„$\Leftarrow$" Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die monoton wachsende Folge in $E(\Omega, \mathcal{A})$ gegeben durch $f_n = n \cdot 1_N$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\int f_n \, d\mu = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Definieren wir $g = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$, dann ist g eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion, und es gilt $\int g \, d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n \, d\mu = 0$. Aus $f \leq g$ folgt $0 \leq \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu = 0$ und somit $\int f \, d\mu = 0$.

„$\Rightarrow$" Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n = \{x \in \Omega \mid f(x) \geq n^{-1}\}$. Dann ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend, es gilt $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = N$ und somit $\lim_n \mu(A_n) = \mu(N)$. Wegen $f \geq n^{-1} \cdot 1_{A_n}$ gilt

$$0 \quad \leq \quad n^{-1}\mu(A_n) \quad \leq \quad \int n^{-1} \cdot 1_{A_n} \, d\mu \quad \leq \quad \int f \, d\mu \quad = \quad 0.$$

Es folgt $\mu(A_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $\mu(N) = 0$. □

Folgerung 6.24 Sei $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion und $N \subseteq \Omega$ eine Nullmenge. Dann ist f über N μ-integrierbar, und es gilt $\int_N f \, d\mu = 0$.

Beweis: Die Funktionen $f^+ \cdot 1_N$ und $f^- \cdot 1_N$ verschwinden μ-fast überall, also gilt $\int_N f^+ \, d\mu = \int_N f^- \, d\mu = 0$. Folglich ist f über N integrierbar, und es gilt $\int_N f \, d\mu = \int_N f^+ \, d\mu - \int_N f^- \, d\mu = 0$. □

Satz 6.25 Seien $f, g : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-messbare Funktionen, die μ-fast überall übereinstimmen.

(i) Sind f, g beide nicht-negativ, dann gilt $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$.

(ii) Ist f eine μ-integrierbare Funktion, dann gilt dasselbe für g, und es ist $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$. (Hier sind für f, g auch negative Werte zugelassen.)

Beweis: zu (i) Die Menge $N = \{x \in \Omega \mid f(x) \neq g(x)\}$ ist nach Definition Folgerung 5.8 in $\mathcal{A}$ enthalten und liegt außerdem nach Voraussetzung in einer Nullmenge. Also ist N selbst eine Nullmenge. Nach Satz 6.23 gilt

$$\int_N f \, d\mu \quad = \quad \int_N g \, d\mu \quad = \quad 0.$$

Setzen wir $M = \Omega \setminus N$, dann gilt $\int_M f \, d\mu = \int_M g \, d\mu$ nach Definition von M, und wir erhalten

$$\int f \, d\mu \quad = \quad \int_M f \, d\mu + \int_N f \, d\mu \quad = \quad \int_M f \, d\mu \quad = \quad \int_M g \, d\mu \quad =$$
$$\int_M g \, d\mu + \int_N g \, d\mu \quad = \quad \int g \, d\mu.$$

zu (ii) Gilt $f = g$ μ-fast überall, dann sind auch die Gleichungen $f^+ = g^+$ und $f^- = g^-$ μ-fast überall erfüllt. Nach Teil (i) folgt $\int f^+ \, d\mu = \int g^+ \, d\mu$ und $\int f^- \, d\mu = \int g^- \, d\mu$. Weil f nach Voraussetzung eine μ-integrierbare Funktion ist, gilt $\int f^+ \, d\mu < +\infty$ und $\int f^- \, d\mu < +\infty$. Also ist auch g eine μ-integrierbare Funktion, und es gilt

$$\int f \, d\mu \quad = \quad \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu \quad = \quad \int g^+ \, d\mu - \int g^- \, d\mu \quad = \quad \int g \, d\mu.$$ □

Folgerung 6.26 Seien $f, g : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ zwei $\mathcal{A}$-messbare Funktionen, und es gelte $|f| \le g$ μ-fast überall. Ist g eine μ-integrierbare Funktion, dann gilt dasselbe für f.

Beweis: Die Funktion $g_1 = \max\{g, |f|\}$ stimmt μ-fast überall mit g überein. Nach Satz 6.25 ist g_1 also μ-integrierbar. Wegen $|f| \le g_1$ auf Ω erhalten wir mit Satz 6.14 (iii) die μ-Integrierbarkeit von f. □

Wir sagen, eine Menge $B \in \mathcal{A}$ besitzt ein ***σ-endliches Maß***, wenn $\mu_B : \mathcal{A}_B \to \bar{\mathbb{R}}_+$ ein σ-endliches Maß ist. Gleichbedeutend damit ist, dass eine monoton wachsende Folge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Teilmengen $B_n \subseteq B$ mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = B$ und $\mu(B_n) < +\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert.

Satz 6.27 Sei $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ eine μ-integrierbare Funktion. Dann gilt

(i) Die Funktion f nimmt μ-fast überall endliche Werte an.

(ii) Die Menge $\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}$ besitzt ein σ-endliches Maß.

Beweis: zu (i) Sei $N = \{x \in \Omega \mid |f(x)| = +\infty\}$. Dann ist N als Durchschnitt über die Folge $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ gegeben durch $N_n = \{x \in \Omega \mid |f(x)| \ge n\}$ selbst in $\mathcal{A}$ enthalten. Für alle $\alpha \in \mathbb{R}_+$ gilt $\alpha \cdot 1_N \le |f|$. Es folgt

$$\alpha\mu(N) \quad = \quad \int \alpha \cdot 1_N \, d\mu \quad \le \quad \int |f| \, d\mu \quad = \quad \int f^+ \, d\mu + \int f^- \, d\mu \quad < \quad +\infty$$

für alle $\alpha \in \mathbb{R}_+$ und somit $\mu(N) = 0$.

zu (ii) Wir können $f \ge 0$ voraussetzen; ansonsten betrachten wir die Funktion $|f|$ an Stelle von f. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n = \{x \in \Omega \mid f(x) \ge n^{-1}\} = \{x \in \Omega \mid nf(x) \ge 1\}$. Dann gilt $1_{A_n} \le n \cdot f$, die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend, und es gilt

$$\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\} \quad = \quad \{x \in \Omega \mid f(x) > 0\} \quad = \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Aus $1_{A_n} \le n \cdot f$ folgt $\mu(A_n) \le \int 1_{A_n} \, d\mu \le n \int f \, d\mu < +\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist die σ-Endlichkeit der Menge $\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}$ bewiesen. □

Die vorhergenden Sätze zeigen, dass sich an der Integrierbarkeit und dem Integral einer Funktion f nichts ändert, wenn f auf einer Nullmenge (oder einer Teilmenge davon) modifiziert wird. Es würde deshalb auch nichts ausmachen, wenn f auf dieser Nullmenge gar nicht definiert wäre. In einigen Anwendungen ist es praktisch, die Definition von f nur außerhalb einer Nullmenge angeben zu müssen.

Dies motiviert die folgende Definition: Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Wir sagen, eine $\bar{\mathbb{R}}$-wertige Funktion f ist ***μ-fast überall*** auf Ω definiert, wenn f auf einer Menge $M \subseteq \Omega$ definiert ist, deren Komplement in einer Nullmenge enthalten ist. Wir sagen, die Funktion f ist ***μ-integrierbar***, wenn eine μ-integrierbare Funktion $g : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ mit $g|_M = f$ existiert. Das μ-Integral von f definieren wir dann durch

$$\int f \, d\mu \quad = \quad \int g \, d\mu.$$

Nach Satz 6.25 ist es von der Wahl der Fortsetzung g unabhängig.

§ 7. *Konvergenzsätze der Integrationstheorie*

Zusammenfassung. Ein wichtiger Vorteil des Lebesgue-Integrals (oder anderer maßtheoretisch definierter Integrale) gegenüber dem Riemann-Integral besteht darin, dass für Erstere vergleichsweise einfache Regeln für die Vertauschbarkeit der Integration mit Grenzprozessen gültig sind, die mit weniger Voraussetzungen auskommen. Als Beispiele für solche Regeln werden in diesem Kapitel die Konvergenzsätze von Beppo Levi und von Lebesgue behandelt. Aus diesen lassen sich weitere, für die Anwendungen nützliche Rechenregeln gewinnen. Als Anwendungen der Konvergenzsätze beweisen wir die Stetigkeit parameterabhängiger Integrale und die Vertauschbarkeit von Integration und Differentiation, die häufig auch als Zulässigkeit der „Ableitung unter dem Integralzeichen" verstanden wird.

Zentrale Sätze

- Satz von Beppo Levi über die monotone Konvergenz
- Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz
- Stetigkeit parameterabhängiger Integrale
- Differenzierbarkeit parameterabhängiger Integrale
- Übereinstimmung des Lebesgue-Integrals mit dem Riemann-Integral

Im gesamten Kapitel bezeichnet $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ einen vollständigen Maßraum.

Satz 7.1 *(Satz von Beppo Levi)*

Sei $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine μ-fast überall monoton wachsenden Folge von μ-integrierbaren Funktionen $f_m : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ mit der Eigenschaft, dass die Folge der Integrale $\int f_m \, d\mu$ in $\mathbb{R}$ beschränkt ist. Dann existiert eine μ-integrierbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ punktweise μ-fast überall gegen f konvergiert, und es gilt $\lim_m \int f_m \, d\mu = \int f \, d\mu$.

Beweis: Nach Satz 6.25 können wir jede der Funktionen f_m jeweils auf einer μ-Nullmenge so abändern, dass die Ungleichung $f_m(x) \le f_{m+1}(x)$ für alle $x \in \Omega$ und alle $m \in \mathbb{N}$ erfüllt ist, ohne an der μ-Integrierbarkeit oder den Werten der μ-Integrale etwas zu ändern. Unser Ziel besteht nun darin, die Aussage des Satzes auf Satz 6.12 zurückzuführen. Weil sich dieser Satz nur auf nicht-negative Funktionen bezieht, betrachten wir an Stelle von $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ die Folge $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $g_m = f_m - f_1$. Dabei handelt es sich eine Folge monoton wachsender, nicht-negativer und μ-integrierbarer Funktionen mit der Eigenschaft, dass der Grenzwert

$$c \quad = \quad \sup \int_{A_1} g_m \, d\mu \quad = \quad \lim_{m\to\infty} \int_{A_1} g_m \, d\mu \quad = \quad \lim_{m\to\infty} \int_{A_1} f_m \, d\mu - \int f_1 \, d\mu \qquad \text{in } \mathbb{R}_+ \text{ liegt.}$$

Definieren wir nun $g : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}_+$ durch $g(x) = \sup_m g_m(x) = \lim_m g_m(x)$, so folgt aus Satz 6.12, dass durch g eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion gegeben ist, mit $\int g \, d\mu = c$. Weil dieser Wert endlich ist, handelt es sich bei g sogar um eine μ-integrierbare Funktion.

Nun definieren wir $f = g + f_1$. Weil wir jede der Funktionen f_m nur auf einer μ-Nullmenge abgeändert haben (und weil die abzählbare Vereinigung von μ-Nullmengen wiederum eine μ-Nullmenge ist), ist die Gleichung

$$f(x) \quad = \quad g(x) + f_1(x) \quad = \quad \lim_{m\to\infty} g_m(x) + f_1(x) \quad = \quad \lim_{m\to\infty} f_m(x) - f_1(x) + f_1(x) \quad = \quad \lim_{m\to\infty} f_m(x)$$

auch dann für μ-fast alle $x \in \Omega$ erfüllt, wenn wir die ursprünglich gegebenen Funktionen f_m zu Grunde legen. Weil die Funktionen g und f_1 beide μ-integrierbar sind, gilt dasselbe für f, und nach Satz 6.27 werden folglich die Werte $\pm\infty$ nur auf einer μ-Nullmenge angenommen. Wir können also nach Änderung von f auf einer μ-Nullmenge davon ausgehen, dass f eine $\mathbb{R}$-wertige Funktion ist. Schließlich gilt auch die im Satz angebene Gleichung für das Integral, wegen

$$\int f \, d\mu \quad = \quad \int_A f \, d\mu \quad = \quad \int_A g \, d\mu + \int_A f_1 \, d\mu \quad = \quad \lim_{m\to\infty} g_m \, d\mu + \int f_1 \, d\mu \quad = \quad \lim_{m\to\infty} f_m \, d\mu. \qquad \square$$

Für Riemann-integrierbare Funktionen ist eine entsprechende Aussage falsch. Als Beispiel betrachten wir die Dirichlet-Funktion $\chi : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\chi(x) = 1$ für alle rationalen und $\chi(x) = 0$ für alle irrationalen $x \in [0,1]$. Diese ist nicht Riemann-integrierbar, wie in der Analysis einer Variablen gezeigt wurde. Sei nun $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die alle Elemente aus $N = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ durchläuft. Definieren wir eine Funktionenfolge $(\chi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ durch

$$\chi_m(x) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \{x_1, ..., x_m\} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

dann konvergiert die Folge $(\chi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ punktweise und monoton wachsend auf $[0,1]$ gegen χ. Alle Funktionen in der Folge sind Riemann-integrierbar, und es gilt jeweils $\int_0^1 \chi_m \, d\mu = 0$. Insbesondere ist die Folge der Integrale in $\mathbb{R}$ beschränkt. Aber χ als der punktweise Limes der Funktionenfolge ist nicht Riemann-integrierbar.

Der Satz von Beppo Levi gilt auch für monoton fallende Folgen μ-integrierbarer Funktionen: Man erhält ihn dadurch, dass man den ursprünglichen Satz auf die Folge $(-f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ anwendet. Hierbei muss man dann natürlich fordern, dass die Folge der μ-Integrale in $\mathbb{R}$ nach unten beschränkt ist.

Wir geben eine konkrete Anwendung für den soeben bewiesenen Satz. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{x^2}$ ist als stetige Funktion auf jedem endlichen, abgeschlossenen Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ (mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) Riemann-integrierbar. Es ist aber nicht möglich, für die Stammfunktionen von f einen geschlossenen Ausdruck bestehend aus den bekannten elementaren Funktionen (Exponentialfunktion, Logarithmus, trigonometrische Funktionen, Arcusfunktionen) anzugeben. Somit existiert auch keine einfache Formel für die Integrale $\int_a^b f(x) \, dx$.

Mit Hilfe der Konvergenzsätze können wir aber zumindest eine *Reihenentwicklung* für die Integrale angeben. Bekanntlich gilt $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Daraus folgt, dass $f(x) = e^{x^2}$ der punktweise Limes der Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{k!}$ ist, und diese Folge ist wegen $x^{2k} \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ monoton wachsend. Sei nun μ die Einschränkung des Lebesgue-Maßes μ_1 auf die σ-Algebra $(\mathcal{A}_1)_{[a,b]}$. Die Folge der μ-Integrale der Funktionen f_n ist nach oben beschränkt. Denn wie wir weiter unten zeigen werden, stimmt das Lebesgue-Integral über $[a,b]$ mit dem Riemann-Integral überein, und es folgt

$$\int f_n \, d\mu \quad = \quad \int_a^b f_n(x) \, dx \quad \leq \quad \int_a^b e^{x^2} \, dx \quad \leq \quad (b-a)e^{c^2}$$

mit $c = \max\{|a|,|b|\}$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit sind alle Voraussetzungen des Satzes von Beppo Levi erfüllt, und wir erhalten

$$\int_a^b e^{x^2}\,dx \quad=\quad \int f\,d\mu \quad=\quad \lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu \quad=\quad \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx \quad=\quad \lim_{n\to\infty}\int_a^b \left(\sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{k!}\right)dx$$

$$= \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^n \int_a^b \frac{x^{2k}}{k!}\,dx \quad=\quad \sum_{n=0}^\infty \left[\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}\right]_a^b \quad=\quad \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)n!}\left(b^{2n+1}-a^{2n+1}\right).$$

Durch die Beschränkung auf μ-fast überall monoton wachsende Funktionenfolgen kann der Satz von Beppo Levi in dieser Form nur auf Reihen mit nichtnegativen Gliedern angewendet werden. Diese Beschränkung wird durch den folgenden Satz beseitigt.

Satz 7.2 *(Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz)*

Sei $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge μ-integrierbarer Funktionen $f_m : \Omega \to \mathbb{R}$, die fast überall gegen eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ konvergiert. Sei ferner $g : \Omega \to \mathbb{R}_+$ eine μ-integrierbare Funktion mit der Eigenschaft, dass μ-fast überall jeweils $|f_m| \le g$ erfüllt ist, für jedes $m \in \mathbb{N}$. Dann ist auch f μ-integrierbar, und es gilt

$$\int f\,d\mu \quad=\quad \lim_{m\to\infty}\int f_m\,d\mu.$$

Beweis: Nach Abänderung der Funktionen f_m, f und g auf einer Nullmenge können wir davon ausgehen, dass $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ überall gegen f konvergiert, und dass $|f_m| \le g$ auf ganz Ω erfüllt ist; nach Satz 6.25 hat dies keine Auswirkungen auf die μ-Integrierbarkeit oder den Wert der Integrale. Um die Aussage des Satzes auf den Satz 7.1 von Beppo Levi zurückführen zu können, benötigen wir monoton wachsende oder fallende Funktionenfolgen. Deshalb definieren wir für alle $m, \nu \in \mathbb{N}$ die Funktionen

$$g_{m,\nu} = \max\{f_m, f_{m+1}, \ldots, f_{m+\nu}\} \qquad \text{und} \qquad g_m = \sup_\nu g_{m,\nu}.$$

Auf Grund der Voraussetzungen gilt $|g_{m,\nu}| \le g$ für alle $m,\nu \in \mathbb{N}$ und damit auch $|g_m| \le g$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Nach Satz 6.15 sind mit den f_m auch die Funktionen $g_{m,\nu}$ alle μ-integrierbar. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist die Folge $(g_{m,\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend, und die Folge der Integrale $\int g_{m,\nu}\,d\mu$ ist durch $\int g\,d\mu$ beschränkt. Aus Satz 7.1 folgt nun, dass alle g_m μ-integrierbar sind, und dass jeweils

$$\int g_m\,d\mu \quad=\quad \sup_\nu \int g_{m,\nu}\,d\mu \quad=\quad \lim_{\nu\to\infty}\int g_{m,\nu}\,d\mu \qquad \text{erfüllt ist.}$$

Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt nach Definition jeweils jeweils $g_m(x) = \sup\{f_k(x) \mid k \ge m\}$. Die Menge, über die das Supremum gebildet wird, wird also in jedem Schritt kleiner, und dies zeigt, dass die Funktionenfolge $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ der monoton fallend ist. Wegen $|g_m| \le g$ gilt auch $g_m \ge -g$ für jedes $m \in \mathbb{N}$, und daraus folgt, dass die Folge der Integrale $\int g_m\,d\mu$ nach unten durch $-\int g\,d\mu$ beschränkt ist. Eine erneute Anwendung von Satz 7.1 liefert eine μ-integrierbare Funktion $\tilde{f} : \Omega \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ punktweise μ-fast überall gegen $\tilde{f}$ konvergiert, und dass

$$\lim_{m\to\infty}\int g_m\,d\mu \quad=\quad \int \tilde{f}\,d\mu \qquad \text{gilt.}$$

Aber der punktweise Limes der Folge $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ stimmt mit f überein. Zum Nachweis dieser Aussage seien $x \in \Omega$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|f_m(x) - f(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ für alle $x \in \Omega$, was zu $f(x) - \frac{1}{2}\varepsilon < f_m(x) < f(x) + \frac{1}{2}\varepsilon$ äquivalent ist. Daraus folgt $f(x) - \frac{1}{2}\varepsilon < g_{m,\nu}(x) < f(x) + \frac{1}{2}\varepsilon$ für alle $m \geq N$ und $\nu \in \mathbb{N}$, und der Grenzübergang $\nu \to \infty$ liefert $f(x) - \frac{1}{2}\varepsilon \leq g_m(x) \leq f(x) + \frac{1}{2}\varepsilon$ für jedes $m \geq N$. Insbesondere erhalten wir $|g_m(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $m \geq N$, wodurch der Nachweis, dass die Folge $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ punktweise (überall) gegen f konvergiert, erbracht ist.

Aus dieser Beobachtung folgt, dass die Funktionen f und $\tilde{f}$ μ-fast überall übereinstimmen. Nach Satz 6.25 ist also auch f eine μ-integrierbare Funktion, und es gilt $\lim_m \int g_m \, d\mu = \int f \, d\mu$. Indem wir nun die Funktionen $h_{m,\nu} = \min\{f_m, ..., f_{m+\nu}\}$ und $h_m = \inf\{h_{m,\nu} \mid \nu \in \mathbb{N}\}$ definieren, erhalten wir nach demselben Schema eine Folge μ-integrierbarer Funktionn $(h_m)_{m\in\mathbb{N}}$, die monoton wachsend gegen f konvergiert, mit der Eigenschaft $\lim_m \int h_m \, d\mu = \int f \, d\mu$. Nun gilt $h_m \leq f_m \leq g_m$ für alle $m \in \mathbb{N}$, und daraus folgt jeweils

$$\int h_m \, d\mu \quad \leq \quad \int f_m \, d\mu \quad \leq \quad \int g_m \, d\mu.$$

Auf Grund der Gleichungen $\lim_m \int h_m \, d\mu = \int f \, d\mu = \lim_m \int g_m \, d\mu$ folgt aus dem Sandwich-Lemma, dass auch die Folge der μ-Integrale $\int f_m \, d\mu$ konvergiert, und dass der Grenzwert dieser Folge das μ-Integral der Funktion f ist. □

Im weiteren Verlauf bezeichne (T, d) einen metrischer Raum. Ist $g : \Omega \times T \to \bar{\mathbb{R}}$ und $t \in T$, dann verwenden wir für das Integral über die Funktion $g_t : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ gegeben durch $g_t(x) = g(x, t)$ (sofern es existiert) die Schreibweise

$$\int g(x, t) \, d\mu(x).$$

Satz 7.3 Sei $f : \Omega \times T \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften.

(i) Für jedes $t \in T$ ist $\Omega \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x, t)$ eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion.

(ii) Es gibt ein $t_0 \in T$, so dass $T \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x, t)$ für μ-fast alle $x \in \Omega$ in t_0 stetig ist.

(iii) Es gibt eine Umgebung $U \subseteq T$ von t_0 und eine μ-integrierbare Funktion $g : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}_+$, so dass für alle $t \in U$ jeweils $|f(x, t)| \leq g(x)$ für μ-fast alle $x \in \Omega$ erfüllt ist.

Dann ist $F : U \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \int f(x, t) \, d\mu(x)$ eine auf ganz U definierte, reellwertige, in t_0 stetige Funktion.

Beweis: Für alle $t \in U$ gilt jeweils für μ-fast alle $x \in \Omega$ die Abschätzung $|f(x, t)| \leq g(x)$. Also ist $x \mapsto f(x, t)$ jeweils eine μ-integrierbare Funktion und $F(t) \in \mathbb{R}$ damit für alle $t \in U$ definiert. Sei nun $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in T mit $\lim_n t_n = t_0$. Nach Weglassen endlich vieler Folgenglieder können wir $t_n \in U$ für alle $n \in \mathbb{N}$ voraussetzen. Weiter definieren wir eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, indem wir $f_n(x) = f(x, t_n)$ für alle $x \in \Omega$ und $n \in \mathbb{N}$ setzen. Dann sind die Werte $F(t_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert, und die Ungleichung $|f_n| \leq g$ gilt jeweils μ-fast überall. Auf Grund der Bedingung (ii) konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-fast überall gegen die Funktion $\Omega \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x, t_0)$. Wir können Satz 7.2 über die majorisierte Konvergenz anwenden und erhalten

$$\lim_{n\to\infty} F(t_n) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \int f(x, t_n) \, d\mu(x) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \quad = \quad \int f(x, t_0) \, d\mu(x) \quad = \quad F(t_0). \qquad \square$$

Satz 7.4 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : \Omega \times I \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind.

(i) Für jedes $t \in I$ ist $\Omega \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x,t)$ eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion.

(ii) Es gibt ein $t_0 \in I$, so dass $\Omega \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x,t_0)$ μ-integrierbar ist.

(iii) Auf dem gesamten Definitionsbereich $\Omega \times I$ existiert die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial t}$.

(iv) Es gibt eine μ-integrierbare Funktion $g : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}_+$, so dass für alle $t \in I$ jeweils $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \le g(x)$ für μ-fast alle $x \in \Omega$ erfüllt ist.

Dann ist $F : I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \int f(x,t)\,d\mu(x)$ eine reellwertige, auf ganz I definierte und differenzierbare Funktion, und es gilt $F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,d\mu(x)$ für alle $t \in I$.

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass $\Omega \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x,t)$ für jedes $t \in I$ eine μ-integrierbare Funktion und F somit auf ganz U definiert und reellwertig ist. Sei dazu $t \in I$ vorgegeben. Auf Grund der μ-Integrierbarkeit von g und auf Grund der Abschätzung $|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)| \le g(x)$ für μ-fast alle $x \in \Omega$ ist jedenfalls $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ eine μ-integrierbare Funktion. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung finden wir für jedes $x \in \Omega$ ein $s(x) \in I$ zwischen t und t_0 mit $f(x,t) - f(x,t_0) = \frac{\partial f}{\partial t}(x,s(x))(t-t_0)$. Es folgt

$$|f(x,t)| \quad \le \quad |f(x,t_0)| + \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,s)\right| |t-t_0| \quad \le \quad |f(x,t_0)| + g(x)|t-t_0|.$$

Die Funktionen $x \mapsto f(x,t_0)$ und $x \mapsto g(x)|t-t_0|$ sind nach Voraussetzung beide μ-integrierbar, also gilt dasselbe für $x \mapsto f(x,t)$.

Nun beweisen wir die Differenzierbarkeit von F und den angegebenen Wert für die Ableitung. Sei $t \in I$ und $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $I \setminus \{t\}$ mit $\lim_{n\to\infty} t_n = t$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} \quad = \quad \int \frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t}\,d\mu(x).$$

Erneut finden wir durch den Mittelwertsatz der Differentialrechnung für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $x \in \Omega$ ein $s_n(x) \in I$ zwischen t und t_n mit

$$\frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t} \quad = \quad \frac{\partial f}{\partial t}(x,s_n(x)).$$

Es folgt

$$\left|\frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t}\right| \quad = \quad \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,s_n(x))\right| \quad \le \quad g(x)$$

für μ-fast alle $x \in \Omega$. Außerdem konvergieren die Funktionen $x \mapsto (t_n - t)^{-1}(f(x,t_n) - f(x,t))$ punktweise überall gegen $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$. Wir können den Satz über die majorisierte Konvergenz anwenden und erhalten

$$F'(t) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \int \frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t}\,d\mu(x) \quad = \quad \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,d\mu(x). \qquad \square$$

Wir können daraus eine Regel für die partielle Differentiation unter dem Integralzeichen ableiten.

Folgerung 7.5 Seien $m,n \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Lebesgue-messbare und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, und sei $f : A \times U \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften.

(i) Für jedes $y \in U$ ist die Funktion $A \to \mathbb{R}$, $a \mapsto f(a,y)$ Lebesgue-integrierbar.

(ii) Für jeden Punkt $a \in A$ existieren die partiellen Ableitungen $\partial_j f_a$ mit $1 \le j \le n$ auf ganz U, wobei $f_a : U \to \mathbb{R}$ durch $f_a(x) = f(a,x)$ definiert ist.

(iii) Es gibt eine μ-integrierbare Funktion $g : A \to \bar{\mathbb{R}}_+$, so dass $|\partial_j f_a| \le g(a)$ für $1 \le j \le n$ gilt.

Dann ist die Funktion $F : U \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_A f(a,x)\, d\mu(a)$ partiell differenzierbar, und es gilt $\partial_j F(x) = \int_A \partial_j f_a(x)\, d\mu(a)$ für alle $x \in U$.

Beweis: Sei $j \in \{1,...,n\}$, $x_0 \in U$ und $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch $\phi(t) = x_0 + te_j$. Da $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist, existiert ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit der Eigenschaft, dass die Bildmenge $\phi(I)$ des offenen Intervalls $]-\varepsilon,\varepsilon[\subseteq I$ in U enthalten ist. Nach Definition der partiellen Ableitung gilt dann $(f_a \circ \phi)'(t) = \partial_j f_a(x_0 + te_j) = \partial_{m+j} f(a, x_0 + te_j)$ für alle $a \in A$. Wir wenden nun Satz 7.4 auf die Funktion $\widehat{f} : A \times I \to \mathbb{R}$, $(a,t) \mapsto (f_a \circ \phi)(t)$ an. Offenbar sind die Voraussetzungen (i) bis (iv) des Satzes für $\hat{f}$ erfüllt: Für jedes $t \in I$ ist $A \to \mathbb{R}$, $a \mapsto \widehat{f}(a,t)$ wegen $\widehat{f}(a,t) = (f_a \circ \phi)(t) = f(a, x_0 + te_j)$ eine Lesbesgue-integrierbare und damit erst recht eine $\mathcal{A}_m$-messbare Funktion, also sind (i) und (ii) erfüllt. Für jedes Paar $(a,t) \in A \times I$ existiert die partielle Ableitung

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial t}(a,t) \quad = \quad (f_a \circ \phi)'(t) \quad = \quad \partial_{m+j} f(a, x_0 + te_j) \quad ,$$

also ist Bedingung (iii) erfüllt. Wegen $|\partial_{m+j} f(a, x + te_j)| = |\partial_j f_a(x + te_j)| \le g(a)$ für alle $a \in A$ ist auch (iv) gültig. Somit ist $\widehat{F} : I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \int \widehat{f}(a,t)\, d\mu(a)$ auf Grund des Satzes eine reellwertige, auf ganz I differenzierbare Funktion, und es gilt

$$\widehat{F}'(0) \quad = \quad \int \frac{\partial \widehat{f}}{\partial t}(a,t)\, d\mu(a) \quad = \quad \int \partial_j f(a, x_0)\, d\mu(a).$$

Außerdem gilt

$$\widehat{F}(t) \quad = \quad \int \widehat{f}(a,t)\, d\mu(a) \quad = \quad \int (f_a \circ \phi)(t)\, d\mu(a) \quad = \quad \int f(a, x_0 + te_j)\, d\mu(a) \quad = \quad F(x_0 + te_j)$$

für alle $t \in I$ und somit $\widehat{F}'(0) = \partial_j F(x_0)$. Insgesamt ist die angegebene Gleichung im Punkt $x_0 \in U$ also erfüllt. □

Wir illustrieren den soeben bewiesenen Satz anhand eines Beispiels. Sei $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y,z) = x^2 y + 3z$. Die partiellen Ableitungen von f nach y und z sind gegeben durch $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x^2$ und $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 3$. Auf Grund der Übereinstimmung von Riemann- und Lebesgue-Integral (siehe unten) ist die Integralfunktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(y,z) \mapsto \int_{[0,1]} (x^2 y + 3z)\, d\mu_1(x)$ gegeben durch

$$F(y,z) \quad = \quad \int_0^1 (x^2 y + 3z)\, dx \quad = \quad \left[\tfrac{1}{3} x^3 y + 3xz\right]_0^1 \quad = \quad \tfrac{1}{3} y + 3z.$$

Die partiellen Ableitungen dieser Funktion sind gegeben durch $\frac{\partial F}{\partial y}(y,z) = \frac{1}{3}$ und $\frac{\partial F}{\partial z}(y,z) = 3$. Wie in Satz 7.5 angegeben, stimmen die Integrale über diese partiellen Ableitungen mit den partiellen Ableitungen von f überein, d.h. es gilt

$$\int_{[0,1]} \frac{\partial f}{\partial y} f(x,y,z)\, d\mu_1(x) \quad = \quad \int_0^1 x^2\, dx \quad = \quad \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^1 \quad = \quad \tfrac{1}{3} \quad = \quad \frac{\partial F}{\partial y}(y,z)$$

$$\int_{[0,1]} \frac{\partial f}{\partial z} f(x,y,z)\, d\mu_1(x) \quad = \quad \int_0^1 3\, dx \quad = \quad [3x]_0^1 \quad = \quad 3 \quad = \quad \frac{\partial F}{\partial z}(y,z).$$

Als letztes Thema in diesem Kapitel untersuchen wir den Zusammenhang zwischen dem Riemann- und dem Lebesgue-Integral. Wir erinnern kurz an die wichtigsten Bezeichnungen und Definitionen, die im Zusammenhang mit dem Riemann-Integral eingeführt wurden. Seien $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Sei $\mathcal{Z} = \{x_1, ..., x_{n-1}\}$ eine endliche Teilmenge von $]a,b[$ mit $x_1 < ... < x_{n-1}$; eine solche Teilmenge hatten wir als *Zerlegung* des Intervalls $[a,b]$ bezeichnet.

Zur Vereinfachung der Notation setzen wir $x_0 = a$ und $x_n = b$. Für $1 \le k \le n$ sei jeweils

$$c_k = \inf f([x_{k-1}, x_k]) \qquad \text{und} \qquad d_k = \sup f([x_{k-1}, x_k]).$$

Dann ist $\mathcal{S}_f^-(\mathcal{Z}) = \sum_{k=1}^n c_k(x_k - x_{k-1})$ die *Untersumme* und $\mathcal{S}_f^+(\mathcal{Z}) = \sum_{k=1}^n d_k(x_k - x_{k-1})$ die *Obersumme* von f bezüglich $\mathcal{Z}$. In der Analysis einer Variablen hatten wir gezeigt, dass f genau dann Riemann-integrierbar ist, wenn für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ mit der Eigenschaft $\mathcal{S}_f^+(\mathcal{Z}) - \mathcal{S}_f^-(\mathcal{Z}) < \varepsilon$ existiert. Das Riemann-Integral erfüllt dann jeweils die Ungleichungen

$$\mathcal{S}_f^-(\mathcal{Z}) \quad < \quad \int_a^b f(x)\, dx \quad < \quad \mathcal{S}_f^+(\mathcal{Z}).$$

Um die Beziehung zur Maßtheorie herzustellen, bezeichne μ wie oben die Einschränkung von μ_1 auf $(\mathcal{A}_1)_{[a,b]}$. Für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$ führen wir auf $[a,b]$ die Funktionen

$$f_{\mathcal{Z}}^-(x) = \sum_{k=1}^n c_k \cdot 1_{]x_{k-1},x_k[} + \sum_{k=0}^n f(x_k) \cdot 1_{\{x_k\}} \quad \text{und} \quad f_{\mathcal{Z}}^+(x) = \sum_{k=1}^n d_k \cdot 1_{]x_{k-1},x_k[} + \sum_{k=0}^n f(x_k) \cdot 1_{\{x_k\}}$$

ein. (Im Fall $c_k, d_k \ge 0$ für $1 \le k \le n$ handelt es sich um Stufenfunktionen.) Diese sind so konstruiert, dass jeweils $f_{\mathcal{Z}}^- \le f \le f_{\mathcal{Z}}^+$ erfüllt ist. Außerdem gilt

$$\int f_{\mathcal{Z}}^- f\, d\mu_1 \quad = \quad \sum_{k=1}^n c_k \cdot \mu(]x_{k-1}, x_k[) + \sum_{k=0}^n f(x_k) \cdot \mu(\{x_k\}) \quad =$$

$$\sum_{k=1}^n c_k(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=0}^n f(x_k) \cdot 0 \quad = \quad \sum_{k=1}^n c_k(x_k - x_{k-1}) \quad = \quad \mathcal{S}_f^-(\mathcal{Z}) \quad ,$$

und ebenso zeigt man $\int f_{\mathcal{Z}}^+ f\, d\mu = \mathcal{S}_f^+(\mathcal{Z})$.

Man überprüft leicht, dass $f_{\mathcal{Z}}^- \le f_{\mathcal{Z}'}^-$ und $f_{\mathcal{Z}'}^+ \le f_{\mathcal{Z}}^+$ gilt, wenn $\mathcal{Z}'$ eine Verfeinerung von $\mathcal{Z}$ ist, also $\mathcal{Z}' \supseteq \mathcal{Z}$ gilt: Die Infima bzw. Suprema, die man für die Unter- bzw. Obersummen bezüglich $\mathcal{Z}'$ betrachten, werden über kleine Teilintervalle gebildet als bei der Zerlegung $\mathcal{Z}$. Dadurch sind die Infima bei $\mathcal{Z}'$ größer und die Suprema kleiner. Mit demselben Argument haben wir in der Analysis einer Variablen die Ungleichungen $\mathcal{S}_f^-(\mathcal{Z}) \le \mathcal{S}_f^-(\mathcal{Z}')$ und $\mathcal{S}_f^+(\mathcal{Z}') \le \mathcal{S}_f^+(\mathcal{Z})$ hergeleitet.

Satz 7.6 Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

(i) Ist f Riemann-integrierbar, dann auch Lebesgue-integrierbar, und es gilt

$$\int f\, d\mu \quad = \quad \int_a^b f(x)\, dx.$$

(ii) Die Funktion f ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn die Menge $N = \{x \in [a,b] \mid f \text{ unstetig in } x\}$ eine Lebesguesche Nullmenge ist.

Beweis: Für jedes $m \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{Z}_m$ die äquidistante Zerlegung von $[a,b]$ im m Teilintervalle, also $\mathcal{Z}_m = \{a + k\frac{b-a}{m} \mid 1 \le k < m\}$. Ersetzen wir anschließend für alle $m \in \mathbb{N}$ nacheinander die Zerlegung $\mathcal{Z}_{m+1}$ jeweils durch $\mathcal{Z}_m \cup \mathcal{Z}_{m+1}$, dann gilt $\mathcal{Z}_m \subseteq \mathcal{Z}_{m+1}$ für alle $m \in \mathbb{N}$, und jedes Teilintervall von $[a,b]$ bezüglich $\mathcal{Z}_m$ hat eine Länge $\le \frac{b-a}{m}$.

Für jedes $m \in \mathbb{N}$ sei $\varphi_m = f^-_{\mathcal{Z}_m}$ und $\psi_m = f^+_{\mathcal{Z}_m}$. Nach Konstruktion der Folge $(\mathcal{Z}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ gilt $\varphi_m \le \varphi_{m+1} \le f \le \psi_{m+1} \le \psi_m$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Für jedes $x \in [a,b]$ ist also $(\varphi_m(x))_{m\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte monoton wachsende und $(\psi_m(x))_{m\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte monoton fallende Folge. Dies zeigt, dass $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen eine Funktion φ und $(\psi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen eine Funktion ψ auf $[a,b]$ konvergiert; dabei gilt $\varphi \le f \le \psi$. Beide Funktionenfolgen sind betragsmäßig durch die μ-integrierbare Funktion $|\varphi_1| + |\psi_1|$ beschränkt. Wir können also den Satz 7.2 über die majorisierte Konvergenz auf beide Folgen anwenden und erhalten die μ-Integrierbarkeit von φ und ψ sowie

$$\lim_{m\to\infty} \int \varphi_m\, d\mu = \int \varphi\, d\mu \quad \text{und} \quad \lim_{m\to\infty} \int \psi_m\, d\mu = \int \psi\, d\mu.$$

zu (i) Auf Grund der Riemann-Integrierbarkeit von f können die Zerlegungen $\mathcal{Z}_m$ so verfeinert werden, dass $\mathcal{S}^+_f(\mathcal{Z}_m) - \mathcal{S}^-_f(\mathcal{Z}_m) < \frac{1}{m}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. Auf Grund der Ungleichungen $\mathcal{S}^-_f(\mathcal{Z}_m) \le \int_a^b f(x)\, dx \le \mathcal{S}^+_f(\mathcal{Z}_m)$ gilt jeweils

$$0 \le \int_a^b f(x)\, dx - \mathcal{S}^-_f(\mathcal{Z}_m) \le \mathcal{S}^+_f(\mathcal{Z}_m) - \mathcal{S}^-_f(\mathcal{Z}_m) < \frac{1}{m}$$

und $0 \le \mathcal{S}^+_f(\mathcal{Z}_m) - \int_a^b f(x)\, dx \le \mathcal{S}^+_f(\mathcal{Z}_m) - \mathcal{S}^-_f(\mathcal{Z}_m) < \frac{1}{m}$. Damit erhalten wir

$$\lim_{m\to\infty} \mathcal{S}^-_f(\mathcal{Z}_m) \quad = \quad \lim_{m\to\infty} \mathcal{S}^+_f(\mathcal{Z}_m) \quad = \quad \int_a^b f(x)\, dx.$$

Wegen $\int \varphi_m\, d\mu = \mathcal{S}^-_f(\mathcal{Z}_m)$ und $\int \psi_m\, d\mu = \mathcal{S}^+_f(\mathcal{Z}_m)$ für alle $m \in \mathbb{N}$ erhalten wir damit insgesamt

$$\int \varphi\, d\mu \quad = \quad \int_a^b f(x)\, dx \quad = \quad \int \psi\, d\mu.$$

Wegen $\varphi \le f \le \psi$ gilt $\psi - \varphi \ge 0$, und aus $\int (\psi - \varphi)\, d\mu = \int \psi\, d\mu - \int \varphi\, d\mu = 0$ folgt mit Satz 6.23, dass $\psi - \varphi$ μ-fast überall gleich null ist. Wegen $0 \le f - \varphi \le \psi - \varphi$ ist auch $f - \varphi$ fast überall gleich null. Nach Satz 6.25 ist damit auch f μ-integrierbar, und es gilt $\int f\, d\mu = \int \varphi\, d\mu = \int_a^b f(x)\, dx$.

zu (ii) Sei $\mathcal{Z} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{Z}_m$. Diese Menge ist als abzählbare Vereinigung endlicher Mengen abzählbar, es gilt also $\mu(\mathcal{Z}) = 0$. Um den Beweis der Äquivalenz vorzubereiten, zeigen zunächst, dass für jeden Punkt $x_0 \in [a,b] \setminus \mathcal{Z}$ die Funktion f in x_0 genau dann stetig ist, wenn $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$ gilt.

„$\Rightarrow$" Nach Voraussetzung ist f in x_0 stetig. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Dann gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}^+$, so dass $|f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ für alle $x \in [a,b]$ mit $|x - x_0| < \delta$ erfüllt ist. Sei nun $M \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{M} < \delta$, sei $m \ge M$, und sei k so gewählt, dass x_0 im Intervall $J =]x_k, x_{k+1}[$ enthalten ist. Dann ist der Abstand sämtlicher Punkte des Intervals J durch δ beschränkt, und wir erhalten

$$\psi_m(x_0) - \varphi_m(x_0) \;=\; \sup f(J) - \inf f(J) \;=\; (\sup f(J) - f(x_0)) + (f(x_0) - \inf f(J)) \;\le\; \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon \;=\; \varepsilon.$$

Daraus folgt $\lim_m(\psi_m(x_0) - \varphi_m(x_0)) = 0$, und auf Grund der punktweisen Konvergenz von $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ und $(\psi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ folgt $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$.

„$\Leftarrow$" Setzen wir $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$ voraus. Wegen $\varphi(x_0) \le f(x_0) \le \psi(x_0)$ konvergieren dann die Folgen $(\varphi_m(x_0))_{m\in\mathbb{N}}$ und $(\psi_m(x_0))_{m\in\mathbb{N}}$ beide gegen $f(x_0)$. Für vorgegebenes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ finden wir demzufolge ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\psi_m(x_0) - f(x_0) < \frac{1}{2}\varepsilon$ und $f(x_0) - \varphi_m(x_0) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Sei nun $y, z \in \mathcal{Z}_m$ die eindeutig bestimmten Punkte mit $y < x_0 < z$ und dem minimalen Abstand zu x_0. Setzen wir $\delta = \min\{x_0 - y, z - x_0\}$, dann ist $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ im Teilintervall $[y,z]$ der Zerlegung $\mathcal{Z}_m$ enthalten. Nach Definition von φ_m und ψ_m gilt

$$\varphi_m(x_0) \;=\; \inf f([y,z]) \;\le\; f(x) \;\le\; \sup f([y,z]) \;=\; \psi_m(x_0)$$

für alle $x \in [a,b]$ mit $|x - x_0| < \delta$. Es folgt $|f(x) - f(x_0)| \le \psi_m(x_0) - \varphi_m(x_0) = (\psi_m(x_0) - f(x_0)) + (f(x_0) - \varphi_m(x_0)) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$ für alle $x \in [a,b]$ mit $|x - x_0| < \delta$. Dies zeigt, dass f stetig in x_0 ist.

Nun beweisen wir die Aussage (ii). „$\Rightarrow$" Sei f Riemann-integrierbar. Wie wir in Teil (i) gezeigt haben, gilt $\varphi(x) = f(x) = \psi(x)$ für μ-fast alle $x \in [a,b]$, damit auch für μ-fast alle $x \in [a,b] \setminus \mathcal{Z}$. Auf Grund unserer zuvor bewiesenen Hilfsaussage ist f damit in μ-fast allen Punkten von $x \in [a,b] \setminus \mathcal{Z}$ stetig. Weil $\mathcal{Z}$ eine Nullmenge ist, ist f somit auch μ-fast überall auf $[a,b]$ stetig.

„$\Leftarrow$" Ist f μ-fast überall stetig, dann gilt auf Grund der Hilfsaussage insbesondere $\varphi(x) = f(x) = \psi(x)$ für μ-fast alle $x \in [a,b] \setminus \mathcal{Z}$. Wegen $\mu(\mathcal{Z}) = 0$ gilt also $\varphi(x) = \psi(x)$ also μ-fast überall auf $[a,b]$, und es folgt $\int \varphi \, d\mu = \int \psi \, d\mu$. Der Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz liefert nun

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} S^+(Z_m, f) - \lim_{m\to\infty} S^-(Z_m, f) \quad &= \quad \lim_{m\to\infty} \int \psi_m \, d\mu - \lim_{m\to\infty} \int \varphi_m \, d\mu \quad = \\ \int \psi \, d\mu - \int \varphi \, d\mu \quad &= \quad 0. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass f Riemann-integrierbar ist. □

§ 8. *Produktmaße und Satz von Fubini*

Zusammenfassung. Je zwei Messräumen $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ kann ein neuer Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$ zugeordnet werden, wobei $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ ist und $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ die von den kartesischen Produkten $A_1 \times A_2$ mit $A_1 \in \mathcal{A}_1$ und $A_2 \in \mathcal{A}_2$ erzeugte σ-Algebra bezeichnet. Ist μ_j für $j = 1, 2$ jeweils ein σ-endliches Maß, dann existiert $(\Omega, \mathcal{A})$ ein eindeutig bestimmtes Maß μ mit $\mu(A_1 \times A_2) = \mu(A_1) \cdot \mu(A_2)$ für alle $A_1 \in \mathcal{A}_1$, $A_2 \in \mathcal{A}_2$. Für eine beliebige Menge $C \in \mathcal{A}$ kann $\mu(C)$ durch geeignete μ_1- oder μ_2-Integrale berechnet werden. Daraus ergibt sich der für die mehrdimensionale Integration wichtige *Satz von Fubini*, welcher besagt, dass die höherdimensionale Integration auf die eindimensionale Integration zurückgeführt werden kann.

Wichtige Grundbegriffe

- Produkt endlich vieler von Messräume
- Produktmaß
- Schnitt senkrecht zur ersten bzw. zweiten Koordinatenachse
- Lebesgue-Borelsches Maß

Zentrale Sätze

- Eindeutigkeit des Produktmaßes
- Existenz des Produktmaßes für σ-endliche Maße
- Cavalierisches Prinzip
- Satz von Tonelli
- Satz von Fubini

Wir beginnen mit der Definition des Produkts von σ-Algebren und Messräumen. Im gesamten weiteren Verlauf dieses Kapitels seien $(\Omega_k, \mathcal{A}_k)$ Messräume für $k \in \{1, 2\}$, außerdem $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, und es bezeichen $\pi_1 : \Omega \to \Omega_1$ und $\pi_2 : \Omega \to \Omega_2$ die zugehörigen Projkektionsabbildungen.

Definition 8.1 Als ***Produkt*** $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ der beiden σ-Algebren $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ bezeichnet man die von dem System

$$\left\{\pi_k^{-1}(A) \mid k \in \{1, 2\}\ ,\ A \in \mathcal{A}_k\right\}$$

erzeugte σ-Algebra. Das Paar $(\Omega, \mathcal{A})$ wird dann das Produkt der beiden Messräume $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ genannt.

Man sieht unmittelbar, dass $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ die kleinste σ-Algebra in $\Omega_1 \times \Omega_2$ ist, bezüglich der die beiden Projektionsabbildungen π_1, π_2 messbar sind. Unser erstes Ziel besteht darin, möglichst einfache Erzeugendensysteme für diese σ-Algebra anzugeben.

Satz 8.2 Für $k = 1, 2$ sei $\mathcal{E}_k$ jeweils ein Erzeugendensystem von $\mathcal{A}_k$, wobei wir zusätzlich annehmen, dass in $\mathcal{E}_k$ jeweils eine monoton wachsende Folge mit $(E_{km})_{m \in \mathbb{N}}$ mit $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} E_{km} = \Omega_k$ exstiert. Dann bilden die Mengen der Form $E_1 \times E_2$ mit $E_1 \in \mathcal{E}_1$ und $E_2 \in \mathcal{E}_2$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.

Beweis: Es bezeichne $\mathcal{A}'$ die σ-Algebra in Ω, die von den Mengen der angegebenen Form erzeugt wird. Zunächst zeigen wir, dass $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ gilt. Dafür reicht es zu überprüfen, dass für alle $E_1 \in \mathcal{E}_1$ und $E_2 \in \mathcal{E}_2$ die Menge $E_1 \times E_2$ jeweils in $\mathcal{A}$ liegt. Seien also E_1 und E_2 zwei solchen Mengen. Nach Definition von $\mathcal{A}$ liegt sowohl $\pi_1^{-1}(E_1) = E_1 \times \Omega$ als auch $\pi_2^{-1}(E_2) = \Omega \times E_2$ in $\mathcal{A}$, und damit auch der Durchschnitt dieser beiden Urbildmengen, der mit $E_1 \times E_2$ übereinstimmt.

Für die umgekehrte Inklusion $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$ genügt es zu zeigen, dass für $k \in \{1,2\}$ die Projektionsabbildung π_k jeweils messbar bezüglich $\mathcal{A}'$ und $\mathcal{A}_k$ ist, denn wie oben angemerkt, ist $\mathcal{A}$ die kleinste σ-Algebra mit der Eigenschaft, dass π_k bezüglich $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}_k$ messbar ist. Wir beschränken uns auf den Nachweis für $k = 1$. Nach Proposition 5.3 genügt es zu überprüfen, dass $\pi_1^{-1}(E)$ für jedes $E \in \mathcal{E}_1$ in $\mathcal{A}'$ liegt. Sei also ein solches E vorgegeben. Dann gilt

$$\pi_1^{-1}(E) \quad = \quad E \times \Omega_2 \quad = \quad E \times \left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} E_{2m} \right) \quad = \quad \bigcup_{m \in \mathbb{N}} E \times E_{2m}.$$

Die Produkte $E \times E_{2m}$ sind nach Definition alle in der σ-$\mathcal{A}'$ enthalten, also gilt dasselbe auch für die abzählbare Vereinigung. □

Der Satz zeigt auch, dass unter der angegebenen Voraussetzung die Mengen der Form $A_1 \times A_2$ mit $A_k \in \mathcal{A}_k$ für $k \in \{1,2\}$ in $\mathcal{A}$ enthalten sind und ein Erzeugendensystem dieser σ-Algebra bilden.

Wie man sich leicht überzeugt, kann das Produkt der Messräume von zwei auf eine beliebige endliche Anzahl von Faktoren ausgedehnt werden. Ist $r \in \mathbb{N}$, und sind $(\Omega_k, \mathcal{A}_k)$ Messräume für $1 \le k \le r$, und existiert für die σ-Algebra $\mathcal{A}_k$ jeweils ein Erzeugendensystem $\mathcal{E}_k$ mit einer monoton wachsenden Folge $(E_{km})_{m \in \mathbb{N}}$ wie in Satz 8.2, dann ist $\mathcal{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}_r$ also eine σ-Algebra in $\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_r$, die von den Mengen der Form $A_1 \times \ldots \times A_r$ mit $A_k \in \mathcal{A}_k$ für $1 \le k \le r$ erzeugt wird.

Folgerung 8.3 Für jedes $n \in \mathbb{N}$ stimmt die Borelsche σ-Algebra $\mathcal{B}_n$ in $\mathbb{R}^n$ stimmt mit der σ-Algebra $\bigotimes_{k=1}^n \mathcal{B}_1$ überein.

Beweis: Nach Definition wird die σ-Algebra $\mathcal{B}_1$ von den endlichen Intervallen in $\mathbb{R}^1$ erzeugt. Weil $\mathbb{R}^1$ durch endliche Intervalle ausgeschöpft werden kann, bilden die kartesischen Produkte $I_1 \times \ldots \times I_n$, I_k Intervall in $\mathbb{R}^1$ für $1 \le k \le n$, wie soeben bemerkt, ein Erzeugendensystem von $\bigotimes_{k=1}^n \mathcal{B}_1$. Andererseits sind die angegebenen kartesischen Produkte genau die Quader im $\mathbb{R}^n$, und diese bilden ein Erzeugendensystem der σ-Algebra $\mathcal{B}_n$. Also stimmen die beiden σ-Algebren $\mathcal{B}_n$ und $\bigotimes_{k=1}^n \mathcal{B}_1$ überein. □

Wie wir allerdings in Kürze feststellen werden, ist die σ-Algebra $\mathcal{A}_n$ der Lebesgue-messbaren Mengen im $\mathbb{R}^n$ eine echte Obermenge von $\bigotimes_{k=1}^n \mathcal{A}_1$.

Im weiteren Verlauf beschränken wir uns aus Gründen der Übersichtlichkeit wieder auf den Fall $r = 2$. Wir setzen nun voraus, dass auf jedem unseren beiden Messräume $(\Omega, \mathcal{A}_k)$ jeweils ein Maß μ_k existiert und beschäftigen uns mit der Frage, unter welchen Voraussetzungen sich daraus ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ gewinnen lässt.

Satz 8.4 *(Eindeutigkeit des Produktmaßes)*

Für $k = 1,2$ sei $\mathcal{E}_k$ jeweils ein $\cap$-stabiles Erzeugendensystem von $\mathcal{A}_k$, das eine monoton wachsende Folge $(E_{km})_{m\in\mathbb{N}}$ mit $\bigcup_{m=1}^{\infty} E_{km} = \Omega_k$ und $\mu_k(E_{km}) < +\infty$ für alle $m \in \mathbb{N}$ enthält. Dann gibt es höchstens ein Maß μ auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit

$$\mu(E_1 \times E_2) \quad = \quad \mu_1(E_1)\mu_2(E_2) \qquad \text{für alle} \quad E_1 \in \mathcal{E}_1 \text{ und } E_2 \in \mathcal{E}_2.$$

Beweis: Sei $\mathcal{E}$ das System aller Mengen $E_1 \times E_2$ mit $E_k \in \mathcal{E}_k$ für $k = 1,2$. Nach Satz 8.2 handelt es bei $\mathcal{E}$ um ein Erzeugendensystem von $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Auch $\mathcal{E}$ ist $\cap$-stabil, denn für beliebige Produkte $E_1 \times E_2$ und $F_1 \times F_2$ aus $\mathcal{E}$ liegt die Menge $(E_1 \times E_2) \cap (F_1 \times F_2) = (E_1 \cap F_1) \times (E_2 \cap F_2)$ in $\mathcal{E}$. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ sei $G_m = E_{1m} \times E_{2m}$. Sind $\mu, \tilde{\mu}$ zwei Maße auf $\mathcal{A}$ mit der im Satz angegebenen Eigenschaft, dann gilt $\mu(G_m) = \mu_1(E_{1m})\mu_2(E_{2m})$ und ebenso $\tilde{\mu}(G_m) = \mu_1(E_{1m})\mu_2(E_{2m})$ für jedes $m \in \mathbb{N}$, und diese Zahlen sind jeweils endlich. Außerdem gilt $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} G_m = \Omega$. Damit ist insgesamt das Eindeutigkeitskriterium in Proposition 4.4 erfüllt, und es folgt $\mu = \tilde{\mu}$. □

Wiederum lässt sich der Beweis leicht auf endlich viele Faktoren übertragen.

Folgerung 8.5 Ist μ_k für $1 \le k \le n$ jeweils ein σ-endliches Maß auf $\mathcal{A}_k$, dann gibt es höchstens ein Maß μ auf $\bigotimes_{k=1}^{n} \mathcal{A}_k$ mit

$$\mu(A_1 \times \ldots \times A_n) \quad = \quad \prod_{k=1}^{n} \mu_k(A_k) \qquad \text{für} \quad A_k \in \mathcal{A}_k \ , \ 1 \le k \le n.$$

Kommen wir nun zum Nachweis der Existenz von Produktmaßen. Für den Rest des Kapitels setzen wir voraus, dass $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ zwei Maßräume mit σ-endlichen Maßen μ_1, μ_2 sind.

Definition 8.6 Sei $C \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$ eine beliebige Teilmenge, $x \in \Omega_1$ und $y \in \Omega_2$. Dann definieren wir

$$C_x^1 \; = \; \{y \in \Omega_2 \mid (x,y) \in C\} \qquad \text{und} \qquad C_y^2 \; = \; \{x \in \Omega_1 \mid (x,y) \in C\}.$$

Wir nennen C_x^1 bzw. C_y^2 einen ***Schnitt*** durch C senkrecht zur x- bzw. zur y-Achse.

Wie man sich leicht überzeugt, ist die Bildung von Schnitten verträglich mit den Mengenooperationen Vereinigung und Differenz.

Lemma 8.7 Sei $C \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$ und $(C_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\Omega_1 \times \Omega_2$. Dann gelten für alle $x \in \Omega_1$ die Gleichungen $(\Omega \setminus C)_x^1 = \Omega_2 \setminus C_x^1$ und $\left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} C_m\right)_x^1 = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} (C_m)_x^1$. Analoge Gleichungen gelten auch für die Schnitte senkrecht zur y-Achse.

Beweis: Sei $x \in \Omega_1$. Für ein beliebiges Element $y \in \Omega_2$ gelten dann die Äquivalenzen

$$y \in (\Omega \setminus C)^1_x \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) \in \Omega \setminus C \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) \in \Omega \wedge (x,y) \notin C \quad \Leftrightarrow \quad y \in \Omega_2 \wedge y \notin C^1_x \quad \Leftrightarrow \quad y \in \Omega_2 \setminus C^1_x.$$

Dies beweist die erste Mengengleichung. Ebenso gelten für alle $y \in \Omega_2$ die Äquivalenzen

$$y \in \left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} C_m \right)^1_x \Leftrightarrow (x,y) \in \bigcup_{m \in \mathbb{N}} C_m \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N} : (x,y) \in C_m \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N} : y \in (C_m)^1_x \Leftrightarrow y \in \bigcup_{m \in \mathbb{N}} (C_m)^1_x. \quad \square$$

Lemma 8.8 Sei $C \in \mathcal{A}$. Dann ist für jedes $x \in \Omega_1$ die Menge C^1_x in $\mathcal{A}_2$ enthalten. Ebenso gilt $C^2_y \in \mathcal{A}_1$ für alle $y \in \Omega_2$.

Beweis: Es genügt, die erste Aussage zu beweisen, da der Beweis der zweiten völlig analog verläuft. Wir zeigen, dass für vorgegebenes $x \in \Omega_1$ das System

$$\mathcal{A}^1_x \quad = \quad \{C \in \Omega \mid C^1_x \in \mathcal{A}_2\}$$

eine σ-Algebra bildet, die sämtliche Produkte $A_1 \times A_2$ mit $A_1 \in \mathcal{A}_1$, $A_2 \in \mathcal{A}_2$ enthält. Wegen $\varnothing^1_x = \varnothing \in \mathcal{A}_2$ gilt zunächst $\varnothing \in \mathcal{A}^1_x$. Setzen wir nun $C \in \mathcal{A}^1_x$ voraus. Dann gilt $C^1_x \in \mathcal{A}_2$, und aus dem vorhergehenden Lemma folgt $(\Omega \setminus C)^1_x = \Omega_2 \setminus C^1_x \in \mathcal{A}_2$, also $\Omega \setminus C \in \mathcal{A}^1_x$. Sei nun $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{A}^1_x$. Dann gilt $(C_n)^1_x \in \mathcal{A}_2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wiederum auf Grund von Lemma 8.7 folgt

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \right)^1_x \quad = \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} (C_n)^1_x \quad \in \mathcal{A}_2$$

und somit $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \in \mathcal{A}^1_x$. Damit ist der Nachweis, dass es sich bei $\mathcal{A}^1_x$ um eine σ-Algebra handelt, abgeschlossen. Sei nun eine Teilmenge $A_1 \times A_2 \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$ mit $A_1 \in \mathcal{A}_1$, $A_2 \in \mathcal{A}_2$ vorgegeben. Es gilt

$$(A_1 \times A_2)^1_x \quad = \quad \begin{cases} A_2 & \text{falls} \quad x \in A_1 \\ \varnothing & \text{falls} \quad x \notin A_1, \end{cases}$$

in jedem Fall also $(A_1 \times A_2)^1_x \in \mathcal{A}_2$. Dies zeigt, dass $\mathcal{A}^1_x$ alle Produkte der Form $A_1 \times A_2$ mit $A_1 \in \mathcal{A}_1$, $A_2 \in \mathcal{A}_2$ enthält. Weil die σ-Algebra $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ von diesen Produkten erzeugt wird, ist sie in $\mathcal{A}^1_x$ enthalten. Ist also $C \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ und $x \in \Omega_1$, dann folgt $C \in \mathcal{A}^1_x$ und nach Definition von $\mathcal{A}^1_x$ somit $C^1_x \in \mathcal{A}_2$. $\square$

Sei $C \in \mathcal{A}$. Dann gilt $C^1_x \in \mathcal{A}_2$ für jedes $x \in \Omega_1$ nach Lemma 8.8. Die Menge C^1_x ist also $\mathcal{A}_2$-messbar, und das Maß $\mu_2(C^1_x)$ für jedes $x \in \Omega$ definiert. Wir erhalten für jedes $C \in \mathcal{A}$ also eine Funktion $s_C : \Omega_1 \to \bar{\mathbb{R}}_+$, $x \mapsto \mu_2(C^1_x)$.

Lemma 8.9 Für alle $C \in \mathcal{A}$ und $x \in \Omega_1$ erfüllt die Funktion s_C folgende Regeln.

(i) $s_\Omega(x) = \mu_2(\Omega_2)$ (ii) $s_{\Omega \setminus C}(x) = \mu_2(\Omega_2) - s_C(x)$

(iii) Gilt $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ für eine Folge $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ bestehend aus paarweise disjunkten Mengen, dann folgt $s_C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} s_{C_n}(x)$.

(iv) Ist $A_1 \in \mathcal{A}_1$ und $A_2 \in \mathcal{A}_2$, dann gilt $s_{A_1 \times A_2} = \mu_2(A_2) \cdot 1_{A_1}$

Beweis: Gleichung (i) folgt aus $\Omega_x^1 = \Omega_2$, Gleichung (ii) aus $(\Omega \setminus C)_x^1 = \Omega_2 \setminus C_x^1$ und Gleichung (iii) aus $C_x^1 = (\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n)_x^1$ (siehe Lemma 8.7). Die vierte Gleichung folgt aus der Tatsache, dass die Menge $(A_1 \times A_2)_x^1$ im Fall $x \in A_1$ gleich A_2 und im Fall $x \notin A_1$ die leere Menge ist. □

In § 4 hatten wir den Begriff des *Dynkin-Systems* in einer Menge Ω eingeführt. Dabei handelte es sich um ein System von Teilmengen von Ω, dass die leere Menge $\varnothing$ enthält und abgeschlossen unter Komplementen und abzählbaren disjunkten Vereinigungen ist.

Lemma 8.10 Sei $C \in \mathcal{A}$. Dann gilt

(i) Die Funktion $s_C : \Omega_1 \to \bar{\mathbb{R}}_+, x \mapsto \mu_2(C_x^1)$ ist $\mathcal{A}_1$-messbar.

(ii) Die Funktion $s'_C : \Omega_2 \to \bar{\mathbb{R}}_+, y \mapsto \mu_1(C_y^2)$ ist $\mathcal{A}_2$-messbar.

Beweis: Wir beschränken uns auf den Beweis der Aussage (i) und setzen dafür zunächst $\mu_2(\Omega_2) < +\infty$ voraus. Zunächst weisen wir nach, dass das System $\mathcal{D}$ gegeben durch

$$\mathcal{D} \quad = \quad \{C \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \mid s_C \text{ ist } \mathcal{A}_1\text{-messbar}\}$$

ein Dynkin-System ist. Sei $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. Als konstante Funktion $s_\Omega(x) = \mu_2(\Omega_2)$ ist s_Ω offenbar $\mathcal{A}_1$-messbar, also gilt $\Omega \in \mathcal{D}$. Liegt eine Menge $C \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ in $\mathcal{D}$, dann ist s_C nach Definition von $\mathcal{D}$ eine $\mathcal{A}_1$-messbare Funktion. Mit s_C ist auch $s_{\Omega\setminus C}(x) = \mu_2(\Omega_2) - s_C(x)$ $\mathcal{A}_1$-messbar. Ist schließlich $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{D}$ bestehend aus paarweise disjunkten Mengen, dann ist s_{C_n} $\mathcal{A}_1$-messbar für alle $n \in \mathbb{N}$. Setzen wir $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, dann gilt $s_C = \sum_{n=1}^{\infty} s_{C_n}$. Als Summe $\mathcal{A}_1$-messbarer Funktionen ist auch s_C $\mathcal{A}_1$-messbar und somit $C \in \mathcal{D}$. Wir haben somit gezeigt, dass $\mathcal{D}$ in der Tat ein Dynkin-System ist. Die Gleichung $s_{A_1 \times A_2} = \mu_2(A_2) \cdot 1_{A_1}$ zeigt außerdem, dass $\mathcal{D}$ alle Produkte $A_1 \times A_2$ mit $A_1 \in \mathcal{A}_1$ und $A_2 \in \mathcal{A}_2$ enthält.

Nach Satz 8.2 ist das System $\mathcal{E}$ der Mengen $A_1 \times A_2$ mit $A_1 \in \mathcal{A}_1$ und $A_2 \in \mathcal{A}_2$ ein Erzeugendensystem der σ-Algebra $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Wegen $(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \cap B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)$ für $A_1, B_1 \in \mathcal{A}_1$ und $A_2, B_2 \in \mathcal{A}_2$ ist es $\cap$-stabil, damit nach Satz 4.3 auch ein Erzeugendensystem von $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ als Dynkin-System. Aus $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ folgt also $\mathcal{D} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Damit ist die Aussage (i) im Fall $\mu_2(\Omega_2) < +\infty$ bewiesen.

Setzen wir nun voraus, dass das Maß μ_2 nur σ-endlich ist. Sei $(B_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge in $\mathcal{A}_2$ mit $\mu_2(B_m) < +\infty$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} B_m = \Omega_2$. Dann ist $\mu_{2,m} : A \mapsto \mu_2(A \cap B_m)$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein endliches Maß auf $\mathcal{A}_2$. Auf Grund der bereits bewiesenen Aussage ist also $\Omega_1 \to \bar{\mathbb{R}}_+$, $x \mapsto \mu_{2,m}(C_x^1)$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ und jedes $C \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ eine $\mathcal{A}_1$-messbare Funktion. Für jede solche Menge C gilt wegen $C_x^1 = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} (C_x^1 \cap B_m)$ außerdem

$$s_C(x) \quad = \quad \mu_2(C_x^1) \quad = \quad \sup_{m\in\mathbb{N}} \mu_2(C_x^1 \cap B_m) \quad = \quad \sup_{m\in\mathbb{N}} \mu_{2,m}(C_x^1).$$

Als Supremum $\mathcal{A}_1$-messbarer Funktionen ist nach Satz 5.11 auch s_C $\mathcal{A}_1$-messbar. □

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{A}_n$ die σ-Algebra der Lebesgue-messbaren Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Dann ist $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_1$ in $\mathcal{A}_2$ enthalten. Weil nämlich die σ-Algebra Lebesgue-messbaren Mengen durch Vervollständigung der Borelschen σ-Algebra zustande kommt, gibt es für vorgegebene $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_1$ jeweils $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_1$ und $N_1, N_2 \subseteq \mathbb{R}^1$, so dass $A_1 = B_1 \cup N_1, A_2 = B_2 \cup N_2$ gilt und N_1, N_2 jeweils in einer Borelschen Nullmenge enthalten sind. Es folgt

$$A_1 \times A_2 \quad = \quad (B_1 \times B_2) \cup (B_1 \times N_2) \cup (B_2 \times N_1) \cup (N_1 \times N_2).$$

Die Menge $B_1 \times B_2$ liegt in $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$, die übrigen drei Mengen sind in Nullmengen enthalten. Es folgt damit $A_1 \times A_2 \in \mathcal{A}_2$. Weil die σ-Algebra $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_1$ von kartesischen Produkten der Form $A_1 \times A_2$ erzeugt wird, ist sie in $\mathcal{A}_2$ enthalten.

Andererseits ist $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_1$ eine *echte* Teilmenge von $\mathcal{A}_2$. Würde $\mathcal{A}_2$ mit der Produktalgebra übereinstimmen, dann müsste jeder Schnitt einer Menge aus $\mathcal{A}_2$ senkrecht zur ersten Koordinatenachse nach Lemma 8.8 in der σ-Algebra $\mathcal{A}_1$ liegen. Wählen wir aber eine nicht Lebesgue-messbare Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^1$ und setzen $B = A \times \{0\}$, dann ist $B \subseteq \mathbb{R}^2$ Lebesgue-messbar, der Schnitt $B_0^1 = A$ aber nicht. Statt dessen handelt es sich bei $\mathcal{A}_2$ um die Vervollständigung von $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_1$, denn aus § 4 ist bekannt, dass $\mathcal{A}_2$ die Vervollständigung von $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$ ist.

Satz 8.11 *(Existenz des Produktmaßes)*

Es gibt auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ ein eindeutig bestimmtes Maß μ mit

$$\mu(A_1 \times A_2) \quad = \quad \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) \qquad \text{für alle} \quad A_1 \in \mathcal{A}_1 \ , \ A_2 \in \mathcal{A}_2 .$$

Dabei gilt

$$\mu(C) \quad = \quad \int \mu_2(C_x^1)\, d\mu_1(x) \quad = \quad \int \mu_1(C_y^2)\, d\mu_2(y)$$

für alle $C \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Das Maß μ ist ebenfalls σ-endlich. Wir bezeichnen es als das ***Produktmaß*** $\mu_1 \otimes \mu_2$ von μ_1 und μ_2. Die Gleichungen für $\mu(C)$ sind unter dem Namen „Cavalierisches Prinzip" bekannt.

Beweis: Wir zeigen, dass durch

$$\mu : \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \to \bar{\mathbb{R}}_+ \quad , \quad C \mapsto \int s_C \, d\mu_1 = \int \mu_2(C_x^1)\, d\mu_1(x)$$

ein Maß auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ definiert ist. Für $C = \varnothing$ ist die Funktion s_C konstant gleich Null und somit $\mu(\varnothing) = 0$. Sei nun $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Dann gilt $s_C = \sum_{n=1}^{\infty} s_{C_n}$ und somit

$$\mu(C) \quad = \quad \int s_C \, d\mu_1 \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty} \int s_{C_n} \, d\mu_1 \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n).$$

Damit sind die Maßeigenschaften nachgewiesen. Ist $A_1 \in \mathcal{A}_1$ und $A_2 \in \mathcal{A}_2$, dann liefert die Formel $s_{A_1 \times A_2} = \mu_2(A_2) \cdot 1_{A_1}$ die Gleichung

$$\mu(A_1 \times A_2) \quad = \quad \int s_{A_1 \times A_2} \, d\mu_1 \quad = \quad \int \mu_2(A_2) \cdot 1_{A_1} \, d\mu_1 \quad = \quad \mu_1(A_1)\mu_2(A_2).$$

Die Gleichung $\mu(C) = \int \mu_1(C_y)\, d\mu_2(y)$ folgt aus der Tatsache, dass auch $\tilde{\mu} : C \mapsto \int \mu_1(C_y)\, d\mu_2(y)$ ein Maß auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ mit der Eigenschaft $\tilde{\mu}(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$ definiert, sowie der Eindeutigkeit des Produktmaßes (Satz 8.4). Zum Nachweis der σ-Endlichkeit wählen wir monoton wachsende Folgen $(A_{1n})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(A_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\Omega_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{1n}$, $\Omega_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{2n}$ sowie $\mu_1(A_{1n}), \mu_2(A_{2n}) < +\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\mu(A_{1n} \times A_{2n}) = \mu_1(A_{1n})\mu_2(A_{2n}) < +\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$, außerdem offenbar $\Omega_1 \times \Omega_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_{1n} \times A_{2n})$. □

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir die Einschränkung des Lebesgue-Maßes μ_n auf die Borelsche σ-Algebra $\mathcal{B}_n$ ebenfalls mit μ_n. Man bezeichnet diese Einschränkung als das ***Lebesgue-Borelsche Maß***. Setzen wir $n \geq 2$, dann ist jeder Quader $P \subseteq \mathbb{R}^n$ kartesisches Produkt $P = Q \times I$ eines Quaders $Q \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ und eines endlichen Intervalls $I \subseteq \mathbb{R}^1$. Nach Satz 8.11 gilt $(\mu^{n-1} \otimes \mu^1)(P) = \mu^{n-1}(P)\mu^1(I)$, das Produktmaß stimmt also auf den Quadern im $\mathbb{R}^n$ mit der natürlichen Volumenfunktion überein. Weil die eindeutig bestimmte Fortsetzung der natürlichen Volumenfunktion auf $\mathcal{B}_n$ das Lebesgue-Borelsche Maß ist, folgt $\mu^n = \mu^{n-1} \otimes \mu^1$.

Als Anwendungsbeispiele berechnen wir den Flächeninhalt des Kreises und das Volumen der Kugel. Sei $r \in \mathbb{R}^+$ und $C_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$ die Kreisscheibe vom Radius r. Für alle $y \in \mathbb{R}^1$ gilt

$$\begin{aligned} y \in (C_r)^1_x \quad &\Leftrightarrow \quad (x,y) \in C_r \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 \leq r^2 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 \leq r^2 - x^2 \\ &\Leftrightarrow \quad |y| \leq \sqrt{r^2 - x^2} \quad \Leftrightarrow \quad -\sqrt{r^2-x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2-x^2} \quad , \end{aligned}$$

und wir erhalten $(C_r)^1_x = [-\sqrt{r^2-x^2}, \sqrt{r^2-x^2}]$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \leq r$. Im Fall $|x| > r$ gilt $(C_r)^1_x = \emptyset$. Mit Hilfe von Satz 8.11 können wir den Flächeninhalt von C_r berechnen.

$$\begin{aligned} \mu_2(C_r) \quad &= \quad \int \mu_1(C^1_x)\, d\mu_1 \quad = \quad 2 \cdot \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\, dx \quad = \quad 2r \cdot \int_{-r}^{r} \sqrt{1 - (\frac{x}{r})^2}\, dx \\ &= \quad 2r^2 \cdot \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx \quad = \quad 2r^2 \cdot \left(\tfrac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{2}\arcsin(x)\right)\Big|_{-1}^{1} \quad = \quad \pi r^2. \end{aligned}$$

Sei nun $B_r = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$ die Einheitskugel. In diesem Fall gilt $(B_r)^1_x = C_{\sqrt{r^2-x^2}}$ für $|x| \leq r$ und $(B_r)^1_x = \emptyset$ sonst. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \mu_3(B_r) \quad &= \quad \int \mu_2(C_{\sqrt{r^2-x^2}})\, d\mu_1 \quad = \quad \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx \quad = \quad \left(\pi r^2 x - \tfrac{1}{3}\pi x^3\right)\Big|_{-r}^{r} \\ &= \quad (2 - \tfrac{1}{3})\pi r^3 \quad = \quad \tfrac{4}{3}\pi r^3. \end{aligned}$$

Das in Satz 8.11 formulierte Prinzip wurde von seinem Namensgeber *Bonaventura Cavalieri (1598 - 1647)* verwendet, um den Rauminhalt einer großen Zahl geometrischer Körper zu bestimmen. Dies waren einige der ersten Ergebnisse der Geometrie, die über das seit der Antike bekannte Wissen wesentlich hinausgingen. Da die Infinitesimalrechnung zu dieser Zeit noch nicht existierte (diese begann sich mit Newton und Leibniz erst gegen Ende des 17. Jahrhunderts zu entwickeln), konnte Cavalieri den in Satz 8.11 vorhandenen Integralausdruck nicht symbolisch berechnen, sondern musste sich statt dessen mit Vergleichen behelfen.

Beispielsweise leitete er aus dem bereits bekannten Kegel- und Zylindervolumen das Volumen der Kugel ab, in dem er neben eine Halbkugel H vom Radius r einen Zylinder Z mit Radius und Höhe r setzte. In diesem Zylinder wurde ein auf der Spitze stehender Kreisregel K mit Grundfläche und Höhe r untergebracht. Schneidet man die Halkugel nun auf Höhe h mit einer zur Grundfäche parallelen Ebene E_h, dann erhält man nach dem Satz des Pythagoras eine Kreisschreibe vom Radius $\sqrt{r^2 - h^2}$, deren Flächeninhalt $\pi(r^2 - h^2)$ beträgt. Schneidet man den Zylinder auf gleicher Höhe, so ergibt dies eine Kreisscheibe mit Flächeninhalt πr^2, und der Schnitt von E_h mit de Kegel ergibt einen Kreis vom Flächeninhalt πh^2. Der Schnitt von E_h mit der *Differenzmenge* $Z \setminus K$ beträgt also ebenfalls $\pi(r^2 - h^2)$, ist also genauso groß wie der Schnitt zwischen E_h und Halbkugel! Weil dies für *alle* $h \in [0, r]$ der Fall ist, schloss Cavalieri, dass das Halbkugelvolumen gleich dem Volumen von $Z \setminus K$ sein muss. Da $v_3(Z) = \pi r^2 \cdot r = \pi r^3$ und $v_3(K) = \frac{1}{3}\pi r^3$

bereits bekannt war, erhielt er damit $v_3(H) = v_3(Z \setminus K) = v_3(Z) - v_3(K) = \pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$ und schließlich das Volumen $\frac{4}{3}\pi r^3$ für die Vollkugel.

Allerdings waren viele von Cavalieris Kollegen damals nicht bereit, seine Herleitung der Gleichung $v_3(H) = v_3(Z \setminus K)$ zu akzeptieren. Scheinbar erforderte sie, die Körper H, Z und K in unendlich viele, unendlich dünne Scheiben zu zerlegen und deren unendlich kleine Volumina aufzuaddieren, was ihnen suspekt erschien. Erst durch die Integralrechnung konnte Cavalieris Schluss im Nachhinein gerechtfertigt werden. Einen Einblick in die damalige Auseinandersetzung erhält man durch einen sehr lesenswerten Spektrum-Artikel in der Ausgabe vom Oktober 2015.

Unser nächstes Ziel besteht darin, das Cavalierische Prinzip von Volumina auf Integrale zu übertragen. Sei $(\Omega', \mathcal{A}')$ ein weiterer Messraum und $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \Omega'$ eine Abbildung. Für jedes $x \in \Omega_1$ bezeichnen wir mit f_x^1 die Funktion gegeben durch $f_x^1 : \Omega_2 \to \Omega'$, $y \mapsto f(x,y)$. Entsprechend sei für jedes $y \in \Omega_2$ die Funktion $f_y^2 : \Omega^1 \to \Omega'$ gegeben durch $f_y^2(x) = f(x,y)$ für alle $x \in \Omega_1$. Ist $C \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$ eine beliebige Teilmenge, dann gilt $(1_C)_x^1 = 1_{C_x^1}$ und $(1_C)_y^2 = 1_{C_y^2}$.

Lemma 8.12 Sei $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \Omega'$ eine $(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$-$\mathcal{A}'$-messbare Funktion. Dann gilt

(i) Die Funktion f_x^1 ist $\mathcal{A}_2$-$\mathcal{A}'$-messbar für jedes $x \in \Omega_1$.

(ii) Die Funktion f_y^2 ist $\mathcal{A}_1$-$\mathcal{A}'$-messbar für jedes $y \in \Omega_2$.

Beweis: Wir beschränken uns auf den Beweis der Aussage (i). Seien $A' \in \mathcal{A}'$ und $x \in \Omega_1$ vorgegeben. Für alle $y \in \Omega_2$ gelten die Äquivalenzen

$$y \in (f_x^1)^{-1}(A') \quad \Leftrightarrow \quad f_x^1(y) \in A' \quad \Leftrightarrow \quad f(x,y) \in A' \quad \Leftrightarrow \quad y \in (f^{-1}(A'))_x^1$$

also $(f_x^1)^{-1}(A') = (f^{-1}(A'))_x^1$. Auf Grund der Messbarkeit von f gilt $f^{-1}(A') \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, und mit Lemma 8.8 über die Messbarkeit der Schnitte erhalten wir $(f^{-1}(A'))_x^1 \in \mathcal{A}_2$. □

Satz 8.13 *(Satz von Tonelli)*

Sei $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}_+$ eine $(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$-messbare Funktion. Dann gilt

(i) Die Abbildung $\Omega_2 \to \bar{\mathbb{R}}_+$, $y \mapsto \int f_y^2 \, d\mu_1$ ist $\mathcal{A}_2$-messbar.

(ii) Die Abbildung $\Omega_1 \to \bar{\mathbb{R}}_+$, $x \mapsto \int f_x^1 \, d\mu_2$ ist $\mathcal{A}_1$-messbar.

(iii) Es gilt $\displaystyle\int f \, d(\mu_1 \otimes \mu_2) \quad = \quad \int \left(\int f_y^2 \, d\mu_1 \right) d\mu_2(y) \quad = \quad \int \left(\int f_x^1 \, d\mu_2 \right) d\mu_1(x).$

Beweis: Sei $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ und $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$. Wir beweisen den Satz zunächst für den Spezialfall, dass f eine Stufenfunktion ist. Sei also $f = \sum_{i=1}^r \alpha_i \cdot 1_{C_i}$ mit $\alpha_1, ..., \alpha_r \in \mathbb{R}_+$ und $C_1, ..., C_r \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkte Menge, deren Vereinigung Ω ergibt. Für jedes $y \in \Omega_2$ gilt dann

$$f_y^2 \quad = \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i \cdot (1_{C_i})_y^2 \quad = \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i \cdot 1_{(C_i)_y^2}$$

und somit $\int f_y^2\, d\mu_1 = \sum_{i=1}^r \alpha_i \mu_1((C_i)_y^2)$. Nach Lemma 8.10 ist die Abbildung $y \mapsto \mu_1((C_i)_y^2)$ jeweils $\mathcal{A}_2$-messbar, also auch die Funktion $y \mapsto \int f_y^2\, d\mu_1$ als Linearkombination dieser Funktionen. Mit Hilfe der Formel aus dem Existenzsatz für Produktmaße erhalten wir außerdem

$$\begin{aligned}\int\left(\int f_y^2\, d\mu_1\right) d\mu_2(y) &= \int\left(\sum_{i=1}^r \alpha_i \mu_1((C_i)_y^2)\right) d\mu_2(y) \\ &= \sum_{i=1}^r \alpha_i \int \mu_1((C_i)_y^2)\, d\mu_2(y) \;=\; \sum_{i=1}^r \alpha_i \mu(C_i) \;=\; \int f\, d\mu.\end{aligned}$$

Nun sei $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}_+$ eine beliebige nicht-negative, $\mathcal{A}$-messbare Funktion und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von $\mathcal{A}$-Stufenfunktionen mit der Eigenschaft $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n = f$. Dann gilt $\sup_{n\in\mathbb{N}}(f_n)_y^2 = f_y^2$ für alle $y \in \Omega_2$, und die Folge $((f_n)_y^2)_{n\in\mathbb{N}}$ ist jeweils monoton wachsend. Mit dem Satz über die monotone Konvergenz erhalten wir

$$\int f_y^2\, d\mu_1 \quad = \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \int (f_n)_y^2\, d\mu_1 \qquad \text{für alle} \quad y \in \Omega_2.$$

Dabei ist die Folge der Integrale auf der rechten Seite monoton wachsend. Auf Grund der bereits bewiesenen Aussage ist die Abbildung $\Omega_2 \to \bar{\mathbb{R}}_+$, $y \mapsto \int (f_n)_y^2\, d\mu_1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine $\mathcal{A}_2$-messbare Funktion. Als punktweises Supremum der monoton wachsenden Funktionenfolge $\mathcal{A}_2$-messbaren Funktionen $y \mapsto \int (f_n)_y^2\, d\mu_1$ ist auch $y \mapsto \int f_y^2\, d\mu_1$ $\mathcal{A}_2$-messbar. Nochmalige Anwendung des Satzes von der monotonen Konvergenz liefert

$$\int\left(\int f_y^2\, d\mu_1\right) d\mu_2(y) \;=\; \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\left(\int (f_n)_y^2\, d\mu_1\right) d\mu_2(y) \;=\; \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n\, d\mu \;=\; \int f\, d\mu.$$

Der Beweis der Aussage (ii) und der zweiten Gleichung unter (iii) verläuft völlig analog. □

Satz 8.14 *(Satz von Fubini)*

Sei $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \bar{\mathbb{R}}$ eine $\mu_1 \otimes \mu_2$-integrierbare Funktion. Dann gilt

(i) Die Funktion f_x^1 ist für μ_1-fast alle $x \in \Omega_1$ μ_2-integrierbar.

(ii) Die Funktion f_y^2 ist für μ_2-fast alle $y \in \Omega_2$ μ_1-integrierbar.

(iii) Die μ_1-fast überall definierte Funktion $x \mapsto \int f_x^1\, d\mu_2$ ist μ_1-integrierbar, und die μ_2-fast überall definierte Funktion $y \mapsto \int f_y^2\, d\mu_1$ ist μ_2-integrierbar. Es gilt

$$\int f\, d(\mu_1 \otimes \mu_2) \;=\; \int\left(\int f_y^2\, d\mu_1\right) d\mu_2(y) \;=\; \int\left(\int f_x^1\, d\mu_2\right) d\mu_1(x).$$

Beweis: Nach Voraussetzung ist das Integral $\int |f|\, d(\mu_1 \otimes \mu_2)$ endlich, und aus dem Satz von Tonelli folgt

$$\int\left(\int |f_y^2|\, d\mu_1\right) d\mu_2(y) \;=\; \int\left(\int |f|_y^2\, d\mu_1\right) d\mu_2(y) \;=\; \int |f|\, d(\mu_1 \otimes \mu_2) < +\infty$$

Nach Satz 6.27 bedeutet dies $\int |f|_y^2 \, d\mu_1 < +\infty$ für μ_2-fast alle $y \in \Omega_2$, die Aussage (ii) ist also erfüllt. Genauso beweist man (i). Die erste Gleichung unter (iii) erhält man unter erneuter Anwendung des Satzes von Tonelli durch die Rechnung

$$\int f \, d(\mu_1 \otimes \mu_2) \quad = \quad \int f^+ \, d(\mu_1 \otimes \mu_2) - \int f^- \, d(\mu_1 \otimes \mu_2) \quad =$$

$$\int \left(\int (f^+)_y^2 \, d\mu_1 \right) d\mu_2(y) - \int \left(\int (f^-)_y^2 \, d\mu_1 \right) d\mu_2(y) \quad =$$

$$\int \left(\int (f_y^2)^+ \, d\mu_1 \right) d\mu_2(y) - \int \left(\int (f_y^2)^- \, d\mu_1 \right) d\mu_2(y) \quad = \quad \int \left(\int f_y^2 \, d\mu_1 \right) d\mu_2(y) \quad ,$$

der Beweis der zweiten Gleichung funktioniert analog. □

Folgerung 8.15 Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c < d$, sei $Q = [a,b] \times [c,d]$, und sei $f : Q \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist f Lebesgue-integrierbar, die Funktion $[c,d] \to \mathbb{R}$, $y \mapsto f(x,y)$ ist für jedes $x \in [a,b]$ Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\int_Q f \, d\mu_2 \quad = \quad \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) \, dy \right) dx.$$

Beweis: Als stetige Funktion ist f auf jedenfalls Lebesgue-messbar. Auf Grund des Maximumsprinzips nimmt die stetige Funktion f auf dem kompakten Bereich Q ihr Minimum und ihr Maximum an; insbesondere existiert ein $\gamma \in \mathbb{R}^+$ mit $|f(x,y)| \le \gamma$ für alle $(x,y) \in Q$. Die Abschätzung $|f| \le \gamma \cdot 1_Q$ liefert $\int |f| \, d\mu_2 \le \gamma \mu_2(Q) < +\infty$. Also ist f eine Lebesgue-integrierbare Funktion; die Voraussetzung des Satzes von Fubini ist damit erfüllt. Mit f ist auch die Funktion $y \mapsto f(x,y)$ für jedes $[a,b]$ eine stetige Funktion, mit $[c,d]$ als Definitionsbereich, somit Riemann- und damit nach Satz 7.6 auch Lebesgue-integrierbar. Die auf $[a,b]$ definierte Funktion, die jedem $x \in [a,b]$ den Wert $\int_c^d f(x,y) \, dy = \int_{[c,d]} f_x^1 \, d\mu_1$ zuordnet, ist nach Satz 7.3 stetig, und damit ebenfalls Riemann-integrierbar. Auf Grund des Satzes von Fubini und der Übereinstimmung von Riemann- und Lebesgue-Integral erhalten wir

$$\int_Q f \, d\mu_2 \quad = \quad \int_{[a,b]} \left(\int_{[c,d]} f_x^1 \, d\mu_2 \right) d\mu_1(x) \quad = \quad \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) \, dy \right) dx. \qquad \square$$

Als konkretes Anwendungsbeispiel können wir die Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto xy$ auf dem Quader $Q = [0,1] \times [0,1]$ berechnen. Es gilt

$$\int_Q f \, d\mu_2 \quad = \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 xy \, dy \right) dx \quad = \quad \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2} x y^2 \right]_{y=0}^{y=1} dx \quad = \quad \int_0^1 \tfrac{1}{2} x \, dx \quad = \quad \left[\; \tfrac{1}{4} x^2 \; \right]_0^1 \quad = \quad \tfrac{1}{4}.$$

Natürlich lässt sich diese Aussage problemlos auf höhere Dimension verallgemeinern: Ist $Q \subseteq \mathbb{R}^3$ ein kompakter Quader, $Q = [a,b] \times [c,d] \times [u,v]$ mit $a, b, c, d, u, v \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $c < d$, $u < v$, dann ist auch jede stetige Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar, und es gilt

$$\int_Q f \, d\mu_3 \quad = \quad \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_u^v f(x,y,z) \, dz \right) dy \right) dz.$$

Die Voraussetzung der Integrierbarkeit von f über $\Omega_1 \times \Omega_2$ ist wesentlich für die Hauptaussage des Satzes von Fubini, die Vertauschbarkeit der beiden Integrationsschritte. Das sie im allgemeinen tatsächlich notwendig ist, sieht man zum Beispiel anhand der Funktion

$$f :]0,1] \times]0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad (x,y) \mapsto \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad ,$$

die über ihren Definitionsbereich nicht Lebesgue-integrierbar ist. Einerseits gilt

$$\int_{]0,1]} \left(\int_{]0,1]} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \, d\mu(x) \right) d\mu(y) \quad = \quad \int_{]0,1]} \left(-\frac{x}{x^2+y^2} \right) \Bigg|_0^1 d\mu(y) \quad =$$
$$-\int_{]0,1]} \frac{1}{1+y^2} \, d\mu(y) \quad = \quad -\arctan(y) \Big|_0^1 \quad = \quad -\tfrac{\pi}{4}.$$

Die Vertauschung der Integrationsschritte liefert aber das Ergebnis

$$\int_{]0,1]} \left(\int_{]0,1]} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \, d\mu(y) \right) d\mu(x) \quad = \quad \int_{]0,1]} \left(\frac{y}{x^2+y^2} \right) \Bigg|_0^1 d\mu(x) \quad =$$
$$\int_{]0,1]} \frac{1}{1+x^2} \, d\mu(x) \quad = \quad \arctan(x) \Big|_0^1 \quad = \quad \tfrac{\pi}{4}.$$

Als Anwendung der Produktmaße behandeln wir den Zusammenhang zwischen der Messbarkeit einer Funktion und der Messbarkeit der Fläche unter ihrem Funktionsgraphen. Auch hier sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein beliebiger Maßraum. Mit $\mathcal{B}_1$ bezeichnen wir die Borelsche σ-Algebra in $\mathbb{R}^1$ und mit $\mu^1 : \mathcal{B}_1 \to \bar{\mathbb{R}}^+$ das Lebesgue-Borelsche Maß.

Definition 8.16 Sei $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}_+$ eine nicht-negative Funktion. Dann bezeichnen wir die Menge

$$A_f \quad = \quad \{(x,y) \in \Omega \times \mathbb{R} \mid 0 \le y < f(x)\}$$

als ***Teilmenge unter dem Funktionsgraphen*** von f.

Der folgende Satz besagt nun, dass das Maß solcher Mengen durch ein Integral ausgedrückt werden kann.

Satz 8.17 Eine nicht-negative Funktion $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}_+$ ist genau dann $\mathcal{A}$-messbar, wenn $A_f \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_1$ erfüllt ist. In diesem Fall gilt

$$(\mu \otimes \mu_1)(A_f) \quad = \quad \int f \, d\mu.$$

Beweis: „$\Leftarrow$" Setzen wir $A_f \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_1$ voraus. Nach Lemma 8.8 gilt dann $(A_f)_y \in \mathcal{A}$ für alle $y \in \mathbb{R}_+$. Für jedes $x_0 \in \Omega$ gelten die Äquivalenzen

$$x_0 \in (A_f)_y \quad \Leftrightarrow \quad (x_0, y) \in A_f \quad \Leftrightarrow \quad f(x_0) > y \quad \Leftrightarrow \quad x_0 \in \{x \in \Omega \mid f(x) > y\} \quad \Leftrightarrow \quad x_0 \in \Lambda^+(f, y).$$

Es gilt also $\Lambda^+(f, y) = (A_f)_y \in \mathcal{A}$ für alle $y \in \mathbb{R}_+$. Für $y < 0$ gilt $\Lambda^+(f, y) = \Omega \in \mathcal{A}$, weil f nicht-negativ ist. Nach Folgerung 5.7 ergibt sich daraus insgesamt die Messbarkeit von f.

„$\Rightarrow$" Ist f messbar, dann gilt insbesondere $\Lambda^+(f, \alpha) \in \mathcal{A}$ für alle $\alpha \in \mathbb{Q}^+$ und somit $\Lambda^+(f, \alpha) \times [0, \alpha] \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_1$. Wir beweisen nun die Gleichung

$$A_f \quad = \quad \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Q}^+} \big(\Lambda^+(f, \alpha) \times [0, \alpha]\big)$$

Als Vereinigung abzählbar vieler Mengen aus $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_1$ ist dann auch A_f in $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_1$ enthalten. „$\subseteq$" Sei $(x, y) \in A_f$. Dann gilt $f(x) > y$. Es gibt also ein $\alpha \in \mathbb{Q}^+$ mit $y < \alpha < f(x)$, und wir erhalten $x \in \Lambda^+(f, \alpha)$ sowie $y \in [0, \alpha]$. „$\supseteq$" Sei $(x, y) \in \Lambda^+(f, \alpha) \times [0, \alpha]$ für ein $\alpha \in \mathbb{Q}^+$. Dann gilt $f(x) > \alpha$ und $0 \le y \le \alpha$. Insbesondere gilt $f(x) > y$ und somit $(x, y) \in A_f$.

Die im Satz angegebene Gleichung beweisen wir mit Hilfe von Satz 8.11. Es gilt

$$(\mu \otimes \mu^1)(A_f) \quad = \quad \int \mu^1(A_f)^1_x \, d\mu(x) \quad = \quad \int \mu^1([0, f(x)[) \, d\mu(x) \quad = \quad \int f(x) \, d\mu(x) \quad = \quad \int f \, d\mu. \qquad \square$$

Insbesondere ist eine Funktion $f : D \to \bar{\mathbb{R}}_+$ auf einem Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}^n$ also genau dann Lebesgue-messbar, wenn die Teilmenge $A_f \subseteq D \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ Lebesgue-messbar ist, und Lebesgue-integrierbar genau dann, wenn A_f darüber hinaus ein endliches Lebesgue-Maß besitzt.

Als ***Standardsimplex*** im $\mathbb{R}^3$ bezeichnet man die Menge

$$S \quad = \quad \{(x, y, z) \in [0, 1]^3 \mid x + y + z \le 1\}.$$

Definieren wir die Funktion $f : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y) \quad = \quad \begin{cases} 1 - x - y & \text{falls } x + y \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} ,$$

so kann man leicht überprüfen, dass $S = A_f$ erfüllt ist. Denn für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ gilt die Äquivalenz

$$(x, y, z) \in A_f \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) \in [0, 1]^2 \wedge 0 \le z \le f(x, y) \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) \in [0, 1]^2 \wedge 0 \le z \le 1 - x - y \quad \Leftrightarrow$$
$$(x, y) \in [0, 1]^2 \wedge 0 \le x + y + z \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad (x, y, z) \in [0, 1]^3 \wedge 0 \le x + y + z \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad (x, y, z) \in S.$$

Ist $x \in [0, 1]$ vorgegeben, dann gilt $f(x, y) = 1 - x - y$ für alle $y \in [0, 1]$ mit $x + y \le 1 \Leftrightarrow y \le 1 - x$, und $f(x, y) = 0$ für $1 - x \le y \le 1$. Durch Anwendung von Satz 8.17 erhalten wir

$$\mu_2(S) \quad = \quad \mu_2(A_f) \quad = \quad \int f \, d\mu_2 \quad = \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) \, dy \right) dx \quad = \quad \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1 - x - y) \, dy \right) dx \quad =$$
$$\int_0^1 \left[y - xy - \tfrac{1}{2} y^2 \right]_0^{1-x} dx \quad = \quad \int_0^1 \big((1-x) - x(1-x) - \tfrac{1}{2}(1-x)^2 \big) \, dx \quad =$$
$$\int_0^1 \big(1 - x - x + x^2 - \tfrac{1}{2} + x - \tfrac{1}{2} x^2 \big) \, dx \quad = \quad \int_0^1 \big(\tfrac{1}{2} x^2 - x + \tfrac{1}{2} \big) \, dx \quad =$$
$$\left[\tfrac{1}{6} x^3 - \tfrac{1}{2} x^2 + \tfrac{1}{2} x \right]_0^1 \quad = \quad \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \quad = \quad \tfrac{1}{6}.$$

Durch einen einfachen Induktionsbeweis in Verbindung mit dem Satz von Fubini kann man zeigen, dass das Volumen entsprechender Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ (gegeben durch die Ungleichung $x_1 + \ldots + x_n \le 1$) jeweils gleich $(n!)^{-1}$ ist.

§ 9. Bildmaße und die Transformationsformel

Zusammenfassung. In diesem Abschnitt untersuchen wir, wie sich das Lebesgue-Maß unter Transformationen verhält. Zunächst betrachten wir bijektive lineare Abbildungen. Hier bestätigen sich durch die Anschauung zu erwartende Eigenschaften, wie beispielsweise die Invarianz des Volumens unter Translationen, Drehungen und Spiegelungen, die Zunahme des Flächeninhalts um den Faktor c^2 und des Volumens um den Faktor c^3 bei Skalierung der Menge um einen positiven Faktor c usw.

Anschließend befassen wir uns mit dem Verhalten des Lebesgue-Maßes und des Lebesgue-Integrals unter Diffeomorphismen. Dieses wird durch den *Transformationssatz* beschrieben, das zentrale Ergebnis dieses Kapitels. In vielen Fällen, zum Beispiel in Anwendungen aus der Physik, kann mit diesem Satz die Berechnung der Integrale vereinfacht werden, beispielsweise in die Rotationssymmetrie von Funktionen und ihren Definitionsbereichen genutzt wird.

Wichtige Grundbegriffe

- Bildmaß
- translationsinvariantes Maß
- bewegungsinvariantes Maß

Zentrale Sätze

- Transformationsverhalten des Lebesgue-Maßes unter linearen Transformationen
- Transformationssatz für das Lebesgue-Integral

Definition 9.1 Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $(\Omega', \mathcal{A}')$ ein Messraum und $f : \Omega \to \Omega'$ eine $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$-messbare Abbildung. Dann nennt man die Abbildung $f(\mu) : \mathcal{A}' \to \bar{\mathbb{R}}_+$ gegeben durch

$$f(\mu)(A') = \mu(f^{-1}(A')) \qquad \text{für alle} \quad A' \in \mathcal{A}'$$

das ***Bildmaß*** von μ unter f.

Man überprüft unmittelbar, dass es sich bei $f(\mu)$ um ein Maß handelt: Zunächst gilt $f(\mu)(\varnothing) = \mu(f^{-1}(\varnothing)) = \mu(\varnothing) = 0$. Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen aus $\mathcal{A}'$, dann sind wegen $f^{-1}(A_m) \cap f^{-1}(A_n) = f^{-1}(A_m \cap A_n)$ für $A_m, A_n \in \mathcal{A}'$ auch die Urbildmengen $f^{-1}(A_n)$ paarweise disjunkt, und es folgt

$$f(\mu)\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(f^{-1}(A_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} f(\mu)(A_n).$$

Wir erinnern an die folgenden Begriffe aus der Linearen Algebra: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{R}^n$ ausgestattet mit dem euklidischen Standard-Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Eine *Translation* auf $\mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung der Form $\tau_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto v + x$, wobei v einen beliebigen Vektor aus $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Eine *orthogonale Abbildung* ist eine lineare Abbildung $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $\langle \psi(x), \psi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. Eine Abbildung der Form $\tau_v \circ \psi$ bestehend aus einer Translation τ_v und einer orthogonalen Abbildung ψ bezeichnen wir als *Bewegung*.

Eine Abbildung der Form $\tau_v \circ \psi$ mit einer beliebigen Abbildung $\psi \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ nennt man eine *Affinität*. Die Affinitäten umfassen die Bewegungen. Jede Affinität ist stetig. Daraus folgt, dass jede Affinität eine $\mathcal{B}_n$-$\mathcal{B}_n$-messbare Abbildung ist.

Definition 9.2 Ein Maß μ auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$ wird ***translationsinvariant*** genannt, wenn $\tau_v(\mu) = \mu$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$ erfüllt ist. Gilt sogar $\phi(\mu) = \mu$ für jede Bewegung ϕ, dann spricht man von einem ***bewegungsinvarianten Maß***.

Nach Definition ist ein Maß μ genau dann translations- bzw. bewegungsinvariant, wenn $\mu(\tau_v(A)) = \mu(A)$ bzw. $\mu(\phi(A)) = \mu(A)$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$ bzw. alle Bewegungen ϕ und alle $A \in \mathcal{B}_n$ erfüllt ist.

Proposition 9.3 Das Lebesgue-Borelsche Maß μ_n ist translationsinvariant.

Beweis: Die Borelsche σ-Algebra $\mathcal{B}_n$ wird von den Quadern der Form $Q = I_1 \times ... \times I_n$ erzeugt, wobei I_k jeweils ein endliches Intervall mit den Endpunkten $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $a_k \le b_k$ bezeichnet. Ist $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$ vorgegeben, dann gilt $\tau_v^{-1}(Q) = \tilde{I}_1 \times ... \times \tilde{I}_n$, wobei $\tilde{I}_k$ jeweils ein Intervall mit den Endpunkten $a_k - v_k$ und $b_k - v_k$ bezeichnet. Es folgt

$$\tau_v(\mu_n)(Q) \quad = \quad \mu_n(\tau_v^{-1}(Q)) \quad = \quad \prod_{k=1}^{n}((b_k - v_k) - (a_k - v_k)) \quad = \quad \prod_{k=1}^{n}(b_k - a_k) \quad = \quad \mu_n(Q).$$

Sowohl μ_n als auch $\tau_v(\mu_n)$ sind offenbar σ-endliche Maße. Wir können somit Proposition 4.4 anwenden und erhalten die Übereinstimmung von μ_n und $\tau_v(\mu_n)$ auf der gesamten σ-Algebra $\mathcal{B}_n$. □

Wir zeigen nun, dass das Lebesgue-Borelsche Maß im wesentlichen das einzige translationsinvariante Maß auf $\mathcal{B}_n$ ist.

Lemma 9.4 Sei $S \subseteq \mathbb{R}$ eine dichte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Dann wird die σ-Algebra $\mathcal{B}_n$ von den Quadern der Form $Q = [a_1, b_1[\times ... \times [a_n, b_n[$ mit $a_i, b_i \in S$ für $1 \le i \le n$ erzeugt.

Beweis: Zunächst einmal lassen sich die Mengen der Form $\{(x_1, ..., x_n) \mid x_i \ge a\}$ mit $i \in \{1, ..., n\}$ und $a \in S$ als abzählbare Vereinigung solcher Quader darstellen. Lassen wir eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in S streng monoton fallend gegen ein beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ laufen, dann erhalten wir $\{(x_1, ..., x_n) \mid x_i > \alpha\}$ als abzählbare Vereinigung der Mengen $\{(x_1, ..., x_n) \mid x_i \ge a_n\}$. Durch Komplementbildung erhalten wir alle Mengen der Form $\{(x_1, ..., x_n) \mid x_i \le \alpha\}$ mit $i \in \{1, ..., n\}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, und die Menge $\{(x_1, ..., x_n) \mid x_i < \alpha\}$ wiederum als abzählbare Vereinigung. Nun ist jeder Quader offenbar ein endlicher Durchschnitt von Mengen der bereits konstruierten Form, und die Quader bilden ein Erzeugendensystem der σ-Algebra $\mathcal{B}_n$. □

Satz 9.5 Sei μ ein translationsinvariantes Maß auf $\mathcal{B}_n$, und sei $\alpha = \mu([0,1[^n) \in \bar{\mathbb{R}}_+$. Dann gilt $\mu = \alpha\mu_n$. Das Lebesgue-Borelsche Maß μ_n ist das einzige translationsinvariante Maß μ auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$ mit $\mu([0,1[^n) = 1$.

Beweis: Sei $m \in \mathbb{N}$ eine beliebig vorgegebene natürliche Zahl. Definieren wir $A_m = \{0, 1, ..., m-1\}^n$ und $Q_k = [\frac{k_1}{m}, \frac{k_1+1}{m}[\times ... \times [\frac{k_n}{m}, \frac{k_n+1}{m}[$ für alle $k = (k_1, ..., k_n) \in A_m$, dann ist durch $[0,1[^n = \bigcup_{k \in A_m} Q_k$ offenbar eine disjunkte Zerlegung von $[0,1[^n$ definiert. Jeder Quader Q_k geht durch Translation in $[0, \frac{1}{m}[^n$ über, aus der Translationsinvarianz von μ folgt also $\mu(Q_k) = \mu([0, \frac{1}{m}[^n)$ für alle $k \in A_m$. Wir erhalten somit

$$\alpha \quad = \quad \mu([0,1[^n) \quad = \quad \sum_{k \in A_m} \mu(Q_k) \quad = \quad \sum_{k \in A_m} \mu([0, \tfrac{1}{m}[^n) \quad = \quad m^n \mu([0, \tfrac{1}{m}[^n) \quad ,$$

also $\mu([0, \frac{1}{m}[^n) = m^{-n}\alpha$. Nun zeigen wir: Sind $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in \mathbb{Q}$ mit $a_i < b_i$ für $1 \le i \le n$, und ist $Q = [a_1, b_1[\times ... \times [a_n, b_n[$, dann gilt $\mu(Q) = \alpha \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) = \alpha \mu_n(Q)$. Auf Grund der Translationsinvarianz können wir $a_1 = ... = a_n = 0$ voraussetzen. Sei nun m der größte gemeinsame Nenner der Zahlen $b_1, ..., b_n$ und $\tilde{b}_i = m b_i \in \mathbb{N}$ für $1 \le i \le n$. Sei $A = \{(k_1, ..., k_n) \mid 0 \le k_i < \tilde{b}_i\}$ und

$$\tilde{Q}_k \quad = \quad [\tfrac{k_1}{m}, \tfrac{k_1+1}{m}[\times ... \times [\tfrac{k_n}{m}, \tfrac{k_n+1}{m}[\qquad \text{für} \quad k = (k_1, ..., k_n) \in A.$$

Wiederum auf Grund der Translationsinvarianz gilt $\mu(\tilde{Q}_k) = \mu([0, \frac{1}{m}[^n) = \frac{\alpha}{m^n}$ für alle $k \in A$. Mit Hilfe der disjunkten Zerlegung $Q = \bigcup_{k \in A} \tilde{Q}_k$ erhalten wir

$$\mu(Q) \quad = \quad \frac{\alpha |A|}{m^n} \quad = \quad \frac{\alpha \prod_{i=1}^n \tilde{b}_i}{m^n} \quad = \quad \alpha \prod_{i=1}^n b_i \quad = \quad \alpha \mu_n(Q).$$

Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen liegt dicht in $\mathbb{R}$, nach Lemma 9.4 wird die σ-Algebra $\mathcal{B}_n$ also von den Mengen der Form Q erzeugt. Wir haben also gezeigt, dass die Maße μ und $\alpha\mu_n$ auf einem $\cap$-stabilen Erzeugendensystem von $\mathcal{B}_n$ übereinstimmen. Nach Proposition 4.4 sind sie damit auf ganz $\mathcal{B}_n$ gleich. □

Lemma 9.6 Ist $\mu : \mathcal{B}_n \to \bar{\mathbb{R}}_+$ ein translationsinvariantes Maß auf $\mathbb{R}^n$ und ist $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Affinität, dann ist auch $\phi(\mu)$ translationsinvariant.

Beweis: Nach Definition der Affinitäten gilt $\phi = \tau_v \circ \psi$ für ein $v \in \mathbb{R}^n$ und eine invertierbare lineare Abbildung ψ. Sei $w \in \mathbb{R}^n$. Zu zeigen ist $\tau_w(\phi(\mu)) = \phi(\mu)$. Nach Definition des Bildmaßes ist dies ist gleichbedeutend mit $\mu((\tau_w \circ \phi)^{-1}(A)) = \mu(\phi^{-1}(A))$ für alle $A \in \mathcal{B}_n$. Durch Einsetzen von ϕ führt dies auf die Gleichung

$$\mu((\tau_{v+w} \circ \psi)^{-1}(A)) \quad = \quad \mu((\tau_v \circ \psi)^{-1}(A)).$$

Wir man unmittelbar nachrechnet, gilt $\tau_{v+w} \circ \psi = \tau_v \circ \psi \circ \tau_{w'}$ für den Vektor $w' = \psi^{-1}(w)$. Tatsächlich gilt für jeden Vektor $u \in \mathbb{R}^n$ jeweils

$$(\tau_v \circ \psi \circ \tau_{w'})(u) \quad = \quad v + \psi(w' + u) \quad = \quad v + \psi(w') + \psi(u) \quad = \quad v + w + \psi(u) \quad = \quad (\tau_{v+w} \circ \psi)(u).$$

Zu zeigen bleibt also

$$\mu((\tau_v \circ \psi \circ \tau_{w'})^{-1}(A)) \quad = \quad \mu((\tau_v \circ \psi)^{-1}(A)).$$

Nach Definition des Bildmaßes ist dies äquivalent zu $\tau_{w'}(\mu)((\tau_v \circ \psi)^{-1}(A)) = \mu((\tau_v \circ \psi)^{-1}(A))$. Nun sieht man, dass die Gleichung direkt aus der Translationsinvarianz von μ folgt. □

Satz 9.7 Das Lebesgue-Borelsche Maß μ_n ist bewegungsinvariant.

Beweis: Weil μ_n invariant unter Translationen ist, genügt es, die Invarianz unter orthogonalen Abbildungen zu beweisen. Sei also $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine orthogonale Abbildung. Weil mit μ_n nach Lemma 9.6 auch $\phi(\mu_n)$ translationsinvariant ist, gibt es nach Satz 9.5 ein $\alpha \in \mathbb{R}_+$ mit $\phi(\mu_n) = \alpha\mu_n$. Sei $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \le 1\}$ die abgeschlossene Einheitskugel bezüglich der 2-Norm $\|\cdot\|_2$. Wegen $\langle\phi(x),\phi(x)\rangle = \langle x,x\rangle$ ist diese invariant unter ϕ, es gilt also $\phi^{-1}(B) = B$. Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty$. Aus $\|x\|_\infty \le \frac{1}{\sqrt{n}}$ folgt $\|x\|_2 \le 1$, also enthält B den n-dimensionalen Würfel mit Kantenlänge $\frac{2}{\sqrt{n}}$, dessen Zentrum mit dem Nullpunkt $0_{\mathbb{R}^n}$ zusammenfällt. Es folgt $\mu_n(B) \ge 2^n n^{-n/2} > 0$. Aus $\|x\|_2 \le 1$ folgt andererseits $\|x\|_\infty \le 1$, d.h. B ist im Würfel mit Kantenlänge 2 und demselben Mittelpunkt enthalten. Das liefert die Abschätzung $\mu_n(B) \le 2^n < +\infty$. Weil $\mu_n(B)$ endlich und positiv ist, folgt aus der Gleichung

$$\alpha\mu_n(B) \quad = \quad \phi(\mu_n)(B) \quad = \quad \mu_n(\phi^{-1}(B)) \quad = \quad \mu_n(B)$$

also $\alpha = 1$ und somit $\phi(\mu_n) = \mu_n$. □

Folgerung 9.8 Jede Hyperebene $H \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine Lebesguesche Nullmenge.

Beweis: Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass H durch eine Bewegung ϕ in die Koordinatenhyperebene $H_0 = \{(0,x_2,...,x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \text{ für } 2 \le i \le n\}$ überführt werden kann. Weil H_0 als abzählbare Vereinigung der Nullmengen $N_m = \{0\} \times [-m,m]^{n-1}$ dargestellt werden kann, ist auch $H_0 = \bigcup_{m=1}^\infty N_m$ eine Nullmenge. Aus $\phi(H) = H_0$ folgt $\mu_n(H) = \phi^{-1}(\mu_n)(H) = \mu_n(\phi(H)) = \mu_n(H_0) = 0$. □

Wir erinnern an die folgende Notation aus der Linearen Algebra: Ist $A \in \mathcal{M}(m \times n, \mathbb{R})$, dann bezeichnet $\phi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ die Abbildung $v \mapsto Av$ gegeben durch das Matrix-Vektor-Produkt.

Proposition 9.9 Ist $D \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ eine Diagonalmatrix mit positiven Einträgen auf der Hauptdiagonalen, dann gilt $\phi_D(\mu_n) = (\det D)^{-1}\mu_n$.

Beweis: Weil mit μ_n nach Lemma 9.6 auch $\phi_D(\mu_n)$ translationsinvariant ist, existiert nach Satz 9.5 ein $\alpha \in \bar{\mathbb{R}}_+$ mit $\phi_D(\mu_n) = \alpha\mu_n$. Zu zeigen ist, dass $\alpha = (\det D)^{-1}$ ist. Sind $d_1,...,d_n \in \mathbb{R}^+$ die Diagonaleinträge von D, dann gilt $\det D = \prod_{i=1}^n d_i$ und $\phi_D(x_1,...,x_n) = (d_1x_1,...,d_nx_n)$ für alle $x = (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$. Sei $Q = [0,1]^n$. Dann ist das Urbild von Q unter ϕ_D gegeben durch $\phi_D^{-1}(Q) = [0,d_1^{-1}] \times ... \times [0,d_n^{-1}]$, und wir erhalten

$$\alpha\mu_n(Q) \quad = \quad \phi_D(\mu_n)(Q) \quad = \quad \mu_n(\phi_D^{-1}(Q)) \quad = \quad \prod_{i=1}^n d_i^{-1} \quad = \quad (\det D)^{-1}.$$ □

Satz 9.10 *(Transformationsverhalten des Lebesgue-Maßes)*

Ist $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, dann gilt $\phi_A(\mu_n) = |\det A|^{-1}\mu_n$.

Beweis: Sei $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Die Matrix $B = {}^{\mathrm{t}}AA$ erfüllt die Gleichung ${}^{\mathrm{t}}B = {}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}AA) = {}^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}A) = {}^{\mathrm{t}}AA$ und ist somit symmetrisch. Außerdem ist sie positiv definit, denn für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ mit $v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ gilt $Av \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ (auf Grund der Invertierbarkeit von A) und somit ${}^{\mathrm{t}}vBv = {}^{\mathrm{t}}(Av)(Av) > 0$. Auf Grund des Satzes über die Hauptachsentransformation existiert eine ON-Basis $(v_1, ..., v_n)$ des $\mathbb{R}^n$ bestehend aus Eigenvektoren von B mit positiven Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Die Vektoren $u_j = \lambda_j^{-1/2} Av_j$ bilden ebenfalls eine ON-Basis des $\mathbb{R}^n$, denn für $1 \leq j < k \leq n$ gilt jeweils

$$\begin{aligned} \langle u_j, u_j \rangle &= \lambda_j^{-1} \langle Av_j, Av_j \rangle = \lambda_j^{-1} \langle {}^{\mathrm{t}}AAv_j, v_j \rangle = \lambda_j^{-1} \langle Bv_j, v_j \rangle \\ &= \lambda_j^{-1} \langle \lambda_j v_j, v_j \rangle = \lambda_j^{-1} \lambda_j \langle v_j, v_j \rangle = 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \langle u_j, u_k \rangle &= \lambda_j^{-1/2} \lambda_k^{-1/2} \langle Av_j, Av_k \rangle = \lambda_j^{-1/2} \lambda_k^{-1/2} \langle {}^{\mathrm{t}}AAv_j, v_k \rangle = \lambda_j^{-1/2} \lambda_k^{-1/2} \langle Bv_j, v_k \rangle \\ &= \lambda_j^{-1/2} \lambda_k^{-1/2} \langle \lambda_j v_j, v_k \rangle = \lambda_j^{1/2} \lambda_k^{-1/2} \langle v_j, v_k \rangle = \lambda_j^{1/2} \lambda_k^{-1/2} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Sei nun U die Matrix mit den Vektoren $u_1, ..., u_n$ als Zeilen, und V die Matrix mit $v_1, ..., v_n$ als Spalten. Dann gilt $UAV = D$ mit $D = \mathrm{diag}(\lambda_1^{1/2}, ..., \lambda_n^{1/2})$. Weil U und V orthogonale Matrizen sind, gilt $\det(U), \det(V) \in \{\pm 1\}$. Die Gleichung $A = U^{-1} D V^{-1}$ liefert somit $|\det(A)| = |\det(D)| = \det(D)$. Außerdem gilt $\phi_A = \phi_{U^{-1}} \circ \phi_D \circ \phi_{V^{-1}}$ mit den orthogonalen Abbildungen $\phi_{U^{-1}}$ und $\phi_{V^{-1}}$. Auf Grund der Bewegungsinvarianz von μ_n (und weil orthogonale Matrizen Bewegungen definieren), folgt mit Proposition 9.9 die Gleichung

$$\begin{aligned} \phi_A(\mu_n) &= (\phi_U^{-1} \circ \phi_D \circ \phi_V^{-1})(\mu_n) = \phi_U^{-1}(\phi_D(\phi_V^{-1}(\mu_n))) = \phi_U^{-1}(\phi_D(\mu_n)) = \\ & \phi_U^{-1}((\det D)^{-1} \mu_n) = (\det D)^{-1} \mu_n = |\det A|^{-1} \mu_n. \end{aligned}$$ □

Man kann das Ergebnis folgendermaßen umformulieren: Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Bewegung der Form $x \mapsto v + Ax$ mit $v \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Genau dann liegt $B \in \mathcal{B}_n$, wenn $\phi_A(B)$ in $\mathcal{B}_n$ enthalten ist, und in diesem Fall gilt

$$\mu_n(\phi_A(B)) = |\det(A)| \mu_n(B).$$

Es ist nicht schwer, dieses Ergebnis von der Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}_n$ auf die σ-Algebra $\mathcal{A}_n$ der Lebesgue-messbaren Mengen zu übertragen. Hier werden wir dieses Resultat etwas weiter unten in allgemeinerer Form beweisen.

Zur Erinnerung: Ein *$\mathscr{C}^1$-Diffeomorphismus* $\phi : U \to V$ zwischen zwei offenen Teilmengen $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine bijektive Abbildung mit der Eigenschaft, dass sowohl ϕ als auch die Umkehrabbildung ϕ^{-1} in jedem Punkt ihres Definitionsbereich stetig differenzierbar ist. Inbesondere sind ϕ und ϕ^{-1} dann beide stetig; das bedeutet, dass in U liegende Teilmengen aus $\mathcal{B}_n$ unter Anwendung von ϕ erhalten bleiben.

Lemma 9.11 Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Umgebungen von $0_{\mathbb{R}^n}$ und $\phi : U \to V$ ein $\mathscr{C}^1$-Diffeomorphismus mit $\phi(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^n}$ und $\phi'(0_{\mathbb{R}^n}) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$. Dann gibt es für jedes $\delta \in \mathbb{R}^+$ eine Umgebung U_δ von $0_{\mathbb{R}^n}$ mit der folgenden Eigenschaft: Ist $W \subseteq U_\delta$ ein abgeschlossener Würfel mit $0_{\mathbb{R}^n} \in W$, dann gilt

$$\mu_n(\phi(W)) \leq (1+\delta)\mu_n(W).$$

Beweis: Wegen $\phi'(0_{\mathbb{R}^n}) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ gibt eine Funktion $h : U \to \mathbb{R}^n$ mit $\phi(x) = \phi(0_{\mathbb{R}^n}) + \phi'(0_{\mathbb{R}^n})(x) + h(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}(x) + h(x) = x + h(x)$ und

$$\lim_{x \to 0} \|x\|_\infty^{-1} h(x) = 0.$$

Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ gibt es also ein $\alpha \in \mathbb{R}^+$, so dass $\|h(x)\| \le \varepsilon \|x\|_\infty$ für alle $x \in U$ mit $\|x\|_\infty < \alpha$ erfüllt ist. Sei nun $V_\alpha = \{x \in U \mid \|x\|_\infty < \alpha\}$ und $W \subseteq V_\alpha$ ein abgeschlossener Würfel mit Kantenlänge r und $0_{\mathbb{R}^n} \in W$. Ist $x \in W$ und $y = \phi(x)$, dann gilt $\|x\|_\infty \le r$ und

$$\|y - x\|_\infty \quad = \quad \|x + h(x) - x\|_\infty \quad = \quad \|h(x)\|_\infty \quad \le \quad \varepsilon \|x\|_\infty \quad \le \quad \varepsilon r.$$

Schreiben wir $x = (x_1, ..., x_n)$ und $y = (y_1, ..., y_n)$, dann gilt also $|y_i - x_i| \le \varepsilon r$ und somit $x_i - \varepsilon r \le y_i \le x_i + \varepsilon r$ für $1 \le i \le r$. Dies zeigt, dass $\phi(W)$ in einem Würfel der Kantenlänge $r(1+2\varepsilon)$ enthalten ist, und es folgt

$$\mu_n(\phi(W)) \quad \le \quad (1+2\varepsilon)^n \mu_n(W).$$

Sei nun $\delta \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben und $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ so klein gewählt, dass $(1+2\varepsilon)^n < 1+\delta$ ist. Sei $\alpha \in \mathbb{R}^+$ der zu ε gehörende Wert mit $\|h(x)\| \le \varepsilon \|x\|_\infty$ für alle $x \in V_\alpha$. Dann ist $U_\delta = V_\alpha$ eine Umgebung von $0_{\mathbb{R}^n}$ mit der gewünschten Eigenschaft: Ist $W \subseteq U_\delta$ ein Würfel mit Kantenlänge $r \in \mathbb{R}^+$ und $0_{\mathbb{R}^n} \in W$, dann ist $\mu_n(\phi(W)) \le (1+\delta)\mu_n(W)$ erfüllt. □

Lemma 9.12 Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Mengen, und sei $\phi : U \to V$ ein $\mathscr{C}^1$-Diffeomorphismus mit $|\det \phi'(x)| = 1$ für alle $x \in U$. Dann gilt $\mu_n(\phi(Q)) \le \mu_n(Q)$ für jeden Quader $Q \subseteq U$.

Beweis: Zunächst führen wir die Aussage von Quadern auf den Fall von Würfeln zurück. Angenommen, die Aussage ist für Würfel bereits bewiesen. Ist $Q \subseteq U$ ein Quader, dann gibt es eine Diagonalmatrix $D \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit positiven Diagonaleinträgen, so dass $W = \phi_D(Q)$ zu einem Würfel wird. Setzen wir $\tilde{U} = \phi_D(U)$, $\tilde{V} = \phi_D(V)$, und definieren wir die Abbildung $\tilde{\phi} : \tilde{U} \to \tilde{V}$ durch $\tilde{\phi} = \phi_D \circ \phi \circ \phi_D^{-1}$, dann gilt $\tilde{\phi}'(x) = \phi_D \circ \phi'(\phi_D^{-1}(x)) \circ \phi_D^{-1}$ und somit $|\det \tilde{\phi}'(x)| = |\det \phi'(\phi_D^{-1}(x))| = 1$ für alle $x \in \tilde{U}$. Auf Grund unserer Annahme folgt $\mu_n(\tilde{\phi}(W)) \le \mu_n(W)$, also

$$\mu_n(\tilde{\phi}(\phi_D(Q))) \le \mu_n(\phi_D(Q)) \quad \Rightarrow \quad \mu_n(\phi_D(\phi(Q))) \le \mu_n(\phi_D(Q)) \quad \Rightarrow$$

$$(\det D)\mu_n(\phi(Q)) \le (\det D)\mu_n(Q) \quad \Rightarrow \quad \mu_n(\phi(Q)) \le \mu_n(Q).$$

Es genügt also, die Abschätzung unter den gegebenen Voraussetzungen für einen Würfel $W \subseteq U$ zu beweisen. Nehmen wir nun an, die Abschätzung ist nicht erfüllt. Dann gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ mit $\mu_n(\phi(W)) > (1+\delta)\mu_n(W)$. Sei $W = \bigcup_{i=1}^{2^n} W_i$ eine disjunkte Zerlegung von W in 2^n Würfel der halben Kantenlänge. Wäre $\mu_n(\phi(W_i)) \le (1+\delta)\mu_n(W_i)$ für $1 \le i \le 2^n$ erfüllt, dann würde daraus

$$\mu_n(\phi(W)) \quad = \quad \sum_{i=1}^{2^n} \mu_n(\phi(W_i)) \quad \le \quad \sum_{i=1}^{2^n} (1+\delta)\mu_n(W_i) \quad = \quad (1+\delta)\mu_n(W)$$

folgen, im Widerspruch zur Annahme. Also muss es ein i mit $\mu_n(\phi(W_i)) > (1+\delta)\mu_n(W_i)$ geben. Indem wir nun dieselbe Argumentation auf $W^{(1)}$ anstelle von W anwenden, erhalten wir einen Würfel $W^{(2)}$ mit der halben Kantenlänge von $W^{(1)}$, der die Abschätzung $\mu_n(\phi(W^{(2)})) > (1+\delta)\mu_n(W^{(2)})$ erfüllt. Indem wir so fortfahren, erhalten wir in U eine Folge $W \supseteq W^{(1)} \supseteq W^{(2)} \supseteq ...$ von Würfeln mit

$$\mu_n(\phi(W^{(m)})) \quad > \quad (1+\delta)\mu_n(W^{(m)}) \qquad \text{für alle } m \in \mathbb{N} \quad ,$$

deren Kantenlänge gegen Null konvergiert. Bezeichnet $\overline{W}^{(m)}$ jeweils den topologischen Abschluss von $W^{(m)}$, dann ist wegen

$$\mu_n(\phi(\overline{W}^{(m)})) \quad \ge \quad \mu_n(\phi(W^{(m)})) \quad > \quad (1+\delta)\mu_n(W^{(m)}) \quad = \quad (1+\delta)\mu_n(\overline{W}^{(m)})$$

für die abgeschlossenen Würfel dieselbe Abschätzung erfüllt.

Weil die Kantenlänge der abgeschlossenen Würfel $\overline{W}^{(m)}$ gegen Null konvergiert, gibt es einen Punkt $v \in U$ mit $\bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{W}^{(m)} = \{v\}$. Setzen wir $w = \phi(v)$ und $\tilde{\phi} = \tau_{-w} \circ \phi \circ \tau_v$, dann gilt $\tilde{\phi}'(x) = \phi'(\tau_{-v}(x))$ für alle $x \in \tau_v(U)$. Wir können also ϕ durch $\tilde{\phi}$ ersetzen, ohne dass sich an der Voraussetzung bezüglich der Ableitung von ϕ etwas ändert. Ebensowenig ändern sich die Volumina der Bildmengen $\mu_n(\phi(\overline{W}^{(m)}))$. Wir dürfen also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $v = w = 0$ annehmen. Schließlich ersetzen wir noch ϕ durch $\tilde{\phi} = \phi'(0_{\mathbb{R}^n})^{-1} \circ \phi$ und können damit von der Ableitung $\phi'(0_{\mathbb{R}^n}) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ ausgehen. Die Zahlen $\mu_n(\phi(\overline{W}^{(m)}))$ bleiben wegen $|\det \phi'(0)| = 1$ und Satz 9.10 über das Transformationsverhalten des Lebesgue-Maßes hierdurch unverändert.

Auf diese Situation wird nun Lemma 9.11 angewendet. Demnach gibt es eine Umgebung U_δ von $0_{\mathbb{R}^n}$ mit der Eigenschaft, dass $\mu_n(\phi(W)) \le (1+\delta)\mu_n(W)$ für alle Würfel $W \subseteq U_\delta$ mit $0_{\mathbb{R}^n} \in W$ erfüllt ist. Wählen wir m aber hinreichend groß, dann ist $\overline{W}^{(m)}$ in U_δ enthalten, es gilt $0_{\mathbb{R}^n} \in \overline{W}^{(m)}$ und $\mu_n(\phi(W)) > (1+\delta)\mu_n(\overline{W}^{(m)})$, im Widerspruch zur Aussage des Lemmas. □

Weil jede Figur in $\mathbb{R}^n$ als disjunkte Vereinigung von Quadern darstellbar ist, gilt Lemma 9.12 an Stelle von Quadern offenbar auch für Figuren.

Lemma 9.13 Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Mengen, und sei $\phi : U \to V$ ein $\mathscr{C}^1$-Diffeomorphismus mit $|\det \phi'(x)| = 1$ für alle $x \in U$. Dann gilt

(i) $\mu_n^*(\phi(A)) \le \mu_n^*(A)$ für jede Teilmenge $A \subseteq U$, und darüber hinaus

(ii) $\mu_n(\phi(A)) = \mu_n(A)$ für jede Borel-messbare Teilmenge $A \subseteq U$.

Beweis: zu (i) Sei $A \subseteq U$ beliebig. Wir können $\mu_n^*(A) < +\infty$ voraussetzen, weil die Ungleichung ansonsten offensichtlich erfüllt ist. Nach Definition ist das äußere Lebesgue-Maß $\mu_n^*(A)$ von A das Infimum über alle Summen $\sum_{m=1}^{\infty} \mu_n(F_m)$, wobei $(F_m)_{m\in\mathbb{N}}$ alle Folgen von Figuren mit $\bigcup_{m=1}^{\infty} F_m \supseteq A$ durchläuft. Sei nun $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Dann gibt es also eine Folge $(F_m)_{m\in\mathbb{N}}$ von Figuren mit $\sum_{m=1}^{\infty} \mu_n^*(F_m) < \mu_n^*(A) + \varepsilon$ und $\bigcup_{m=1}^{\infty} F_m \supseteq A$. Es folgt

$$\mu_n^*(\phi(A)) \quad \le \quad \sum_{m=1}^{\infty} \mu_n^*(\phi(F_m)) \quad \le \quad \sum_{m=1}^{\infty} \mu_n^*(F_m) \quad \le \quad \mu_n^*(A) + \varepsilon.$$

Weil ε beliebig klein gewählt werden kann, erhalten wir $\mu_n^*(\phi(A)) \le \mu_n^*(A)$ wie gewünscht.

zu (ii) Sei nun $A \subseteq U$ Borel-messbar. In diesem Fall ist $\phi(A)$ eine Borel-messbare Teilmenge von V. Das äußere Maß stimmt dann jeweils mit dem Lebesgue-Maß überein, so dass wir $\mu_n(\phi(A)) \le \mu_n(A)$ erhalten. Da mit ϕ auch die Umkehrabbildung ϕ^{-1} ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus ist, und da auf Grund der Umkehrregel auch $\det |(\phi^{-1})'(x)| = 1$ für alle $x \in V$ gilt, erhalten wir ebenso $\mu_n(A) \le \mu_n(\phi^{-1}(\phi(A))) \le \mu_n(\phi(A))$. Insgesamt gilt also $\mu_n(A) = \mu_n(\phi(A))$. □

Satz 9.14 *(Transformationssatz)*

Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen, und sei $\phi : U \to V$ ein $\mathscr{C}^1$-Diffeomorphismus. Sei $A \subseteq U$ und $B = \phi(A)$. Sei außerdem $f : B \to \bar{\mathbb{R}}$ eine Funktion.

(i) Die Teilmenge A ist genau dann Lebesgue-messbar, wenn B Lebesgue-messbar ist, und in diesem Fall gilt
$$\mu_n(B) \quad = \quad \int_A |\det \phi'| \, d\mu_n(x).$$
Genau dann ist A eine (Lebesguesche) Nullmenge, wenn B eine Nullmenge ist.

(ii) Ist A Lebesgue-messbar, und ist $f \geq 0$ und Lebesgue-messbar, dann gilt
$$\int_B f \, d\mu_n \quad = \quad \int_A (f \circ \phi) |\det \phi'| \, d\mu_n. \qquad (*)$$

(iii) Sei A Lebesgue-messbar. Unter dieser Voraussetzung ist die Funktion f auf B genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn die Funktion $(f \circ \phi)|\det \phi'|$ auf A Lebesgue-integrierbar ist, und es gilt dann ebenfalls die Gleichung (*).

Beweis: Wir beweisen die Gleichung (*) zunächst unter der stärkeren Voraussetzung, dass A eine Borel-messbare Teilmenge von U ist. In diesem Fall ist B als Urbild von A unter der stetigen Abbildung $\phi^{-1} : V \to U$ ebenfalls Borel-messbar. Zur Abkürzung setzen wir $\gamma(x) = |\det \phi'(x)|$ für alle $x \in U$. Zu zeigen ist die Gleichung $\int_B f \, d\mu_n = \int_A (f \circ \phi)\gamma \, d\mu_n$. Sei $\tilde{A} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ gegeben durch
$$\tilde{A} \quad = \quad \{(x,u) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in A \, , \; 0 \leq u < f(\phi(x))\gamma(x)\}$$
Offenbar gilt $\tilde{A} = A_{(f\circ\phi)\gamma}$, d.h. $\tilde{A}$ ist die Teilmenge unter dem Funktionsgraphen der auf A definierten Funktion $(f \circ \phi)\gamma$. Nach Satz 8.17 folgt aus der Borel-Messbarkeit von f die Borel-Messbarkeit von $\tilde{A}$, und es gilt $\mu_n(\tilde{A}) = \int (f \circ \phi)\gamma \, d\mu_n$. Wir betrachten nun die Funktion $\tilde{\phi} : U \times \mathbb{R}_+ \to V \times \mathbb{R}_+$, $(x,u) \mapsto (\phi(x), u\gamma(x)^{-1})$. Die Jacobi-Matrix von $\tilde{\phi}$ an der Stelle (x,u) hat die Form
$$\tilde{\phi}'(x,u) \quad = \quad \begin{pmatrix} \phi'(x) & 0 \\ * & \gamma(x)^{-1} \end{pmatrix} \quad ,$$
es ist also $\det \tilde{\phi}'(x,u) = (\det \phi'(x))\gamma(x)^{-1} = (\det \phi'(x))|\det \phi'(x)|^{-1}$ überall vom Betrag 1. Wir können somit Lemma 9.13 anwenden und erhalten $\mu_n(\tilde{A}) = \mu_n(\tilde{\phi}(\tilde{A}))$. Wie wir weiter unten gleich zeigen werden, gilt $\tilde{\phi}(\tilde{A}) = A_f$. Eine nochmalige Anwendung von Satz 8.17 liefert dann $\mu_n(\tilde{\phi}(\tilde{A})) = \mu_n(\Gamma_f) = \int_B f \, d\mu_n$, wodurch die Gleichung (*) insgesamt bewiesen ist.

Sei $(y,z) \in B \times \mathbb{R}_+$ vorgegeben, $x \in A$ mit $\phi(x) = y$ und $u \in \mathbb{R}_+$ so gewählt, dass $u\gamma(x)^{-1} = z$ erfüllt ist (wobei $\gamma(x)^{-1} > 0$ zu beachten ist). Dann gilt $\tilde{\phi}(x,u) = (y,z)$, und wir erhalten die Äquivalenz
$$\begin{gathered} (y,z) \in A_f \quad \Leftrightarrow \quad (\phi(x), u\gamma(x)^{-1}) \in A_f \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq u\gamma(x)^{-1} < f(\phi(x)) \quad \Leftrightarrow \\ 0 \leq u < (f \circ \phi)(x)\gamma(x) \quad \Leftrightarrow \quad (x,u) \in \tilde{A} \quad \Leftrightarrow \quad (y,z) \in \phi(\tilde{A}). \end{gathered}$$
Damit ist der Beweis der Mengengleichung $\tilde{\phi}(\tilde{A}) = A_f$ abgeschlossen. Wendet man die soeben bewiesene Aussage auf die Funktion $f : V \to \mathbb{R}_+$ gegeben durch $1_B = 1_{\phi(A)}$ an, für Borel-messbares $A \subseteq U$, so erhält man die Gleichung

unter (i). In Verbindung mit Folgerung 6.24 ergibt sich daraus, dass das Bild einer Borelschen Nullmenge $N \subseteq U$ eine Borelsche Nullmenge unter ϕ eine Borelsche Nullmenge ist.

Für den uneingeschränkten Beweis von (i) sei nun $A \subseteq U$ Lebesgue-messbar. Wie wir in § 4 gezeigt haben, existiert dann eine Borel-messbare Teilmenge $\tilde{A} \subseteq A$ und eine Borelsche Nullmenge $\tilde{N} \subseteq U$, die $N = \tilde{A} \setminus A$ enthält. Aus $A = \tilde{A} \cup N$ folgt dann $\phi(A) = \phi(\tilde{A}) \cup \phi(N)$. Mit $\tilde{N}$ auch $\phi(\tilde{N})$ eine Borelsche Nullmenge, und mit $\tilde{A}$ ist auch $\phi(\tilde{A})$ Borel-messbar. Wegen $\phi(N) \subseteq \phi(\tilde{N})$ folgt aus der Gleichung $\phi(A) = \phi(\tilde{A}) \cup \phi(N)$, dass $\phi(A)$ Lebesgue-messbar ist. Das Bild einer Lebesgue-messbaren Teilmenge von U unter ϕ ist also eine Lebesgue-messbare Teilmenge von V. Da wir diese Feststellung statt auf ϕ auch auf ϕ^{-1} anwenden können, ist die „genau dann"-Aussage in Teil (i) bewiesen. Da sich Lebesguesche Nullmengen nach Satz 6.25 nicht auf den Wert der Integrale auswirken, ist die Gleichung unter (i) auch für Lebesgue-messbare Teilmengen gültig, und nicht nur für Borel-messbare. Aus demselben Grund ist auch (ii) ohne weitere Einschränkungen gültig.

Kommen wir nun zum Beweis der Aussage (iii). Die Lebesgue-Integrierbarkeit von f auf B ist nach Satz 6.14 äquivalent zu $\int_B |f| \, d\mu_n < +\infty$, und die Lebesgue-Integrierbarkeit von $|(f \circ \phi)||\det \phi'|$ auf A ist äquivalent zu $\int_A |(f \circ \phi)||\det \phi'| \, d\mu_n < +\infty$. Die „genau dann"-Aussage zur Integrierbarkeit folgt also aus der Gleichung (*) unter (ii), angewendet auf $|f|$. Die Gleichung (*) unter (iii) ergibt sich nun unmittelbar dadurch, dass man (ii) auf die nicht-negativen Funktionen f^+ und f^- anwendet: Es gilt

$$\begin{aligned}\int_A (f \circ \phi)|\det \phi'| \, d\mu_n &= \int_A (f^+ \circ \phi)|\det \phi'| \, d\mu_n - \int_A (f^- \circ \phi)|\det \phi'| \, d\mu_n \\ &= \int_B f^+ \, d\mu_n - \int_B f^- \, d\mu_n = \int_B f \, d\mu_n.\end{aligned}$$ □

Besonders häufig, zum Beispiel bei Anwendungen in der Physik, wird die Transformationsformel im Zusammenhang mit Polar-, Zylinder- oder Kugelkoordinaten genutzt.

Folgerung 9.15

(i) Sei $\rho : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $(r, \varphi) \mapsto (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$ die Polarkoordinaten-Abbildung. Ist $A \subseteq \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi]$ eine Lebesgue-messbare Teilmenge und $f : \rho(A) \to \bar{\mathbb{R}}$ eine Lebesgue-integrierbare Funktion, dann gilt

$$\int_{\rho(A)} f \, d\mu_2 = \int_A (f \circ \rho)(r, \varphi) \cdot r \, d\mu_2(r, \varphi).$$

(ii) Sei $\rho : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $(r, \varphi, h) \mapsto (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), h)$ die Zylinderkoordinaten-Abbildung. Ist $A \subseteq \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$ eine Lebesgue-messbare Teilmenge und $f : \rho(A) \to \bar{\mathbb{R}}$ eine Lebesgue-integrierbare Funktion, dann gilt

$$\int_{\rho(A)} f \, d\mu_3 = \int_A (f \circ \rho)(r, \varphi, h) \cdot r \, d\mu_3(r, \varphi, h).$$

(iii) Sei $\rho : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $(r, \vartheta, \varphi) \mapsto (r\sin(\vartheta)\cos(\varphi), r\sin(\vartheta)\sin(\varphi), r\cos(\vartheta))$ die Kugelkoordinaten-Abbildung. Ist $A \subseteq \mathbb{R}_+ \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ eine Lebesgue-messbare Teilmenge und $f : \rho(A) \to \bar{\mathbb{R}}$ eine Lebesgue-integrierbare Funktion, dann gilt

$$\int_{\rho(A)} f \, d\mu_3 = \int_A (f \circ \rho)(r, \vartheta, \varphi) \cdot r^2 \sin(\vartheta) \, d\mu_3(r, \vartheta, \varphi).$$

Der Faktor unter dem Integralzeichen ist jeweils der Betrag der Determinante der Jacobi-Matrix von ρ an der Stelle (r,φ) bzw. (r,φ,h) bzw. (r,ϑ,φ). Man beachte, dass die Polarkoordinaten-Abbildung nicht auf ihrem gesamten Definitionsbereich $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ ein $\mathscr{C}^1$-Diffeomorphismus auf ihre Bildmenge ist, sondern nur nach Einschränkung auf die Teilmenge $\mathbb{R}^+ \times]0,2\pi[$. Das Komplement von $\mathbb{R}^+ \times]0,2\pi[$ in $\mathbb{R}_+ \times [0,2\pi]$, die Menge $\{0\} \times [0,2\pi] \cup \mathbb{R}^+ \times \{2\pi\}$, und dasselbe gilt für die Bildmenge des Komplements unter dieser Abbildung. Die Integrale in der Gleichung unter (i) bleiben durch Hinzu- oder Wegnahme dieser Menge unverändert. Entsprechend muss man die Zylinderkoordinaten-Abbildung unter (ii) auf $\mathbb{R}^+ \times]0,2\pi[\times \mathbb{R}$ einschränken, um einen $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus auf die Bildmenge zu erhalten, und die Kugelkoordinaten-Abbildung entsprechend auf die Teilmenge $\mathbb{R}^+ \times]0,\pi[\times]0,2\pi[$.

Als Anwendung der Transformationsformel mit Polarkoordinaten berechnen wir das Volumen eines Kegels K der Höhe $h \in \mathbb{R}^+$ mit Grundflächenradius $r \in \mathbb{R}^+$, also das Volumen der Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\begin{aligned} K \quad &= \quad \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z \in [0,h]\,,\ x^2+y^2 < r^2\left(1-\frac{z}{h}\right)^2 \right\} \\ &= \quad \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in [0,h]\,,\ (hx)^2+(hy)^2 < r^2(h-z)^2\}. \end{aligned}$$

Für alle $(x,y,z) \in K$ gilt insbesondere $x^2+y^2 < r^2$. Setzen wir $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < r^2\}$, dann gilt für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ mit $(x,y) \in B$ die Äquivalenz

$$(x,y,z) \in K \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2 < r^2\left(1-\frac{z}{h}\right)^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x^2+y^2} < r\left(1-\frac{z}{h}\right) \quad \Leftrightarrow \quad h\sqrt{x^2+y^2} < r\,(h-z) \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{h}{r}\sqrt{x^2+y^2} < h-z \quad \Leftrightarrow \quad z < h-\frac{h}{r}\sqrt{x^2+y^2} \quad \Leftrightarrow \quad z < h\left(1-\frac{1}{r}\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

Es gilt also $K = A_f$ für die Funktion $f : B \to \mathbb{R}_+, (x,y) \mapsto h(1-\frac{1}{r}\sqrt{x^2+y^2})$, und aus Satz 8.17 folgt $\mu_3(K) = \int_B f\,d\mu_2$. Wir berechnen dieses Integral durch Verwendung der Polarkoordinaten-Abbildung, die wir mit ρ bezeichnen. Da es sich bei B um die offene Kreisscheibe vom Radius r handelt, erfüllt $A = [0,r[\times [0,2\pi]$ die Gleichung $\rho(A) = B$. Für alle $(s,\varphi) \in A$ gilt

$$(f\circ\rho)(s,\varphi) \quad = \quad f(s\cos(\varphi), s\sin(\varphi)) \quad = \quad h(1-\tfrac{1}{r}\sqrt{s^2\cos(\varphi)^2+s^2\sin(\varphi)^2}) \quad = \quad h(1-\tfrac{s}{r}) \quad ,$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} \mu_3(K) \quad &= \quad \int_B f\,d\mu_2 \quad = \quad \int_A (f\circ\rho)(s,\varphi)\cdot s\,d\mu_2(s,\varphi) \quad = \quad \int_A hs(1-\tfrac{s}{r})\,d\mu_2(s,\varphi) \\ &= \quad \frac{h}{r}\int_A s(r-s)\,d\mu_2(s,\varphi) \quad = \quad \frac{h}{r}\int_0^r \left(\int_0^{2\pi} s(r-s)\,d\varphi\right) ds \quad = \quad \frac{2\pi h}{r}\int_0^r s(r-s)\,ds \\ &= \quad \frac{2\pi h}{r}\cdot\left[\tfrac{1}{2}rs^2-\tfrac{1}{3}s^3\right]_0^r \quad = \quad \frac{2\pi h}{r}\cdot\tfrac{1}{6}r^3 \quad = \quad \tfrac{1}{3}\cdot(\pi r^2)\cdot h. \end{aligned}$$

Damit ist die aus der Schulmathematik bekannte Formel „Kegelvolumen $= \frac{1}{3}$ × Grundfläche × Höhe“ bestätigt.

Als weiteres Anwendungsbeispiel betrachten wir eine wichtige Funktion aus der Stochastik.

Definition 9.16 Seien $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \mathbb{R}^+$. Die ***Dichtefunktion der Normalverteilung*** zum Mittelwert μ und der Standardabweichung σ ist die Funktion $f_{\mu,\sigma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_{\mu,\sigma}(x) \quad = \quad \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-\mu}{\sigma})^2}.$$

Ist $\mu = 0$ und $\sigma = 1$, dann spricht man von der ***Standard-Normalverteilung***.

Wir erinnern kurz an die Bedeutung der Normalverteilung. Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$ gibt das Integral $\int_\alpha^\beta f_{\mu,\sigma}(x)\,dx$ die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass in einer Menge mit einem mit den Parametern μ und σ normalverteilten numerischen Merkmal (zum Beispiel Körpergröße oder Intelligenzquotient) ein zufällig gewähltes Element seinen Wert im Intervall $[\alpha, \beta]$ hat. Für $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ beträgt diese Wahrscheinlichkeit beispielsweise $\approx 68{,}3\%$, für das größere Intervall $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ bereits ungefähr 95 %.

Man erhält eine solche Normalverteilung unter anderem dadurch, dass man ein diskretes Zufallsexperiment X sehr oft wiederholt. Betrachtet man für großes $N \in \mathbb{N}$ beispielsweise das Zufallsexperiment „N-faches Würfeln" mit dem Merkmal „durchschnittlich gewürfelte Augenzahl", nähert sich die Verteilung für $N \to \infty$ einer Normalverteilung mit dem Mittelwert $\mu = 3{,}5$ und der Standardabweichung $\sigma \approx 1{,}71$ an. Hierbei ist der Mittelwert wenig überraschend, denn $E(X) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{7}{2}$ ist das durchschnittliche Ergebnis beim Würfeln. Die Standardabweichung σ ergibt sich als Quadratwurzel aus der Varianz, die man wiederum durch die Formel

$$\mathrm{Var}(X) \quad = \quad E((X-\mu))^2 \quad = \quad \tfrac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}(k-\tfrac{7}{2})^2 \quad = \quad \tfrac{35}{12}$$

berechnen kann. Das Verhalten, dass sich eine Zufallsverteilung einer Normalverteilung annähert, ist in der Stochastik als „Gesetz der großen Zahlen" bekannt. Offenbar kann durch $f_{\mu,\sigma}$ nur dann eine Zufallsverteilung gegeben sein, wenn die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis zwischen $-\infty$ und $+\infty$ gleich 1 ist.

Satz 9.17 *(Gauß'sches Fehlerintegral)*

Für alle $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \mathbb{R}^+$ gilt $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu,\sigma}(x)\,dx \quad = \quad 1.$

Dabei steht $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu,\sigma}(x)\,dx$ für den Grenzwert von $\int_{-r}^{r} f_{\mu,\sigma}(x)\,dx$ für $r \to +\infty$. Offenbar genügt es, die Gleichung $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ zu beweisen, denn dann folgt das Ergebnis leicht aus der eindimensionalen Substitutionsregel: Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$ erhalten wir mit der Substitutionsfunktion $\varphi(t) = \frac{t-\mu}{\sqrt{2}\sigma}$ und deren Ableitung $\varphi'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}$ das Ergebnis

$$\int_\alpha^\beta f_{\mu,\sigma}(x)\,dx \quad = \quad \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_\alpha^\beta e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-\mu}{\sigma})^2}\,dx \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_\alpha^\beta \varphi'(t)e^{-\varphi(t)^2}\,dt \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} e^{-x^2}\,dx \quad ,$$

und wegen $\lim_{\alpha\to-\infty}\varphi(\alpha)=-\infty$ und $\lim_{\beta\to+\infty}\varphi(\beta)=+\infty$ folgt daraus

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu,\sigma}(x)\,dx \quad=\quad \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} f_{\mu,\sigma}(x)\,dx \quad=\quad \lim_{r\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\varphi(-r)}^{\varphi(r)} e^{-x^2}\,dx \quad=\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{\pi} \quad=\quad 1.$$

Kommen wir nun zum Beweis der Gleichung $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$. Definieren wir für jedes $r\in\mathbb{R}^+$ das Quadrat $Q_r=[-r,r]^2$, dann gilt jeweils

$$\left(\int_{-r}^{r} f(x)\,dx\right)^2 \quad=\quad \left(\int_{-r}^{r} f(x)\,dx\right)\left(\int_{-r}^{r} f(y)\,dy\right) \quad=\quad \int_{-r}^{r}\left(\int_{-r}^{r} f(x)\,dx\right) f(y)\,dy \quad=$$
$$\int_{-r}^{r}\left(\int_{-r}^{r} f(x)f(y)\,dx\right)dy \quad=\quad \int_{Q_r} f(x)f(y)\,d(x,y) \quad=\quad \int_{Q_r} e^{-x^2-y^2}\,d(x,y).$$

Es gilt also

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx\right)^2 \quad=\quad \lim_{r\to+\infty}\int_{Q_r} e^{-x^2-y^2}\,d(x,y).$$

Nun betrachten wir für jedes $r\in\mathbb{R}^+$ auch die abgeschlossene Kreisscheibe $\bar{B}_r\subseteq\mathbb{R}^2$ vom Radius r um den Ursprung. Aus den Inklusionen $Q_{r/\sqrt{2}}\subseteq\bar{B}_r\subseteq Q_r$ und der Tatsache, dass die Funktion $(x,y)\mapsto e^{-x^2-y^2}$ nur positive Werte annimmt, folgt die Abschätzung

$$\int_{Q_{r/\sqrt{2}}} e^{-x^2-y^2}\,d(x,y) \quad\le\quad \int_{\bar{B}_r} e^{-x^2-y^2}\,d(x,y) \quad\le\quad \int_{Q_r} e^{-x^2-y^2}\,d(x,y)$$

und daraus wiederum die Übereinstimmung $\lim_{r\to+\infty}\int_{\bar{B}_r} e^{-x^2-y^2}\,d(x,y)=\lim_{r\to+\infty}\int_{Q_r} e^{-x^2-y^2}\,d(x,y)$.
Mit Hilfe des Transformationssatzes, angewendet auf Polarkoordinaten, erhalten wir nun weiter

$$\int_{\bar{B}_r} e^{-x^2-y^2}\,d(x,y) \quad=\quad \int_{\rho([0,r]\times[0,2\pi])} e^{-x^2-y^2}\,d(x,y) \quad=\quad \int_{\rho([0,r]\times[0,2\pi])} e^{-r^2\cos(\varphi)^2-r^2\sin(\varphi)^2}\,r\,d(r,\varphi) \quad=$$
$$\int_{\rho([0,r]\times[0,2\pi])} e^{-r^2}\,r\,d(r,\varphi) \quad=\quad 2\pi\int_0^r re^{-r^2}\,dr \quad=\quad \pi\int_0^r (2r)e^{-r^2}\,dr$$
$$=\quad -\pi\int_0^{r^2} e^{-t}\,dt \quad=\quad -\pi\left[e^{-t}\right]_0^{r^2} \quad=\quad \pi(1-e^{-r^2}) \quad ,$$

also

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx\right)^2 \quad=\quad \lim_{r\to+\infty}\int_{Q_r} e^{-x^2-y^2}\,d(x,y) \quad=\quad \lim_{r\to+\infty}\int_{\bar{B}_r} e^{-x^2-y^2}\,d(x,y) \quad=\quad \lim_{r\to+\infty}\pi(1-e^{-r^2}) \quad=\quad \pi$$

und damit $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\sqrt{\pi}$ wie behauptet.

Literaturverzeichnis

[1] H. Bauer. *Maß- und Integrationstheorie*. 2. Auflage. Gruyter, 1992.

[2] Elstrodt. *Maß- und Integrationstheorie*. 4. Auflage. Springer, 2005.

[3] H. Heuser. *Lehrbuch der Analysis. Teil 2*. 8. Auflage. Springer, 1993.

[4] K. Königsberger. *Analysis 2*. 3. Auflage. Springer, 2000.

[5] N. Kusolitsch. *Maß- und Integrationstheorie. Eine Einführung*. Springer, 2011.

[6] G. Kersting M. Brokate. *Maß und Integral*. Birkhäuser, 2011.

[7] K. Stromberg. “The Banach-Tarski Paradoxon”. In: *American Mathematical Monthly* 86.3 (1979), S. 151–161.

[8] S. Wagon. *The Banach-Tarski Paradoxon*. Encyclopedia of Mathematics and its Application. Cambridge University Press, 1993.