

Moodle-Einschreibeschlüssel

hfk 8628 NWL

Aufgabe 1

Betrachte auf dem $\mathbb{R}$ -Vektorraum $\mathbb{C}^2$ den Endomorphismus $\phi: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (1+i)z \\ (1-i)w \end{pmatrix}$

(a) Sei B die geordnete Basis von $\mathbb{C}^2$ geg. durch $B = (e_1, ie_1, e_2, ie_2)$. Bestimmen

Sie die Darstellungsmatrix $A = M_B(\phi)$.

(b) Berechnen Sie das charakteristische Polynom

χ_ϕ und das Minimalpolynom μ_ϕ (wobei $\chi_\phi, \mu_\phi \in \mathbb{R}[x]$)

zu (a) Berechne die Bilder der Basiselemente, stelle diese als Linearkombinationen von $\mathcal{B}$ dar

$$\phi(e_1) = \phi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} = \underline{1} \cdot e_1 + \underline{1} \cdot (ie_1) + \underline{0} \cdot e_2 + \underline{0} \cdot (ie_2)$$

$$\phi(ie_1) = \phi\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+i)i \\ (1-i)0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+i \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{(-1)} \cdot e_1 + \underline{1} \cdot (ie_1) + \underline{0} \cdot e_2 + \underline{0} \cdot (ie_2)$$

$$\Rightarrow M_B(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\phi(e_2) = \phi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-i \end{pmatrix} = \underline{0} \cdot e_1 + \underline{0} \cdot (ie_1) + \underline{1} \cdot e_2 + \underline{(-1)} \cdot (ie_2)$$

$$\phi(ie_2) = \phi\begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (1-i)i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+i \end{pmatrix} = \underline{0} \cdot e_1 + \underline{0} \cdot (ie_1) + \underline{1} \cdot e_2 + \underline{1} \cdot (ie_2)$$

$$\chi_\phi = \chi_A = \det(x \cdot E_4 - A) = \det \begin{pmatrix} x-1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & x-1 \end{pmatrix} =$$

$$\det \begin{pmatrix} x-1 & 1 \\ -1 & x-1 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} x-1 & -1 \\ 1 & x-1 \end{pmatrix} =$$

bei $((x-1)^2+1) \cdot ((x-1)^2+1) = (x^2-2x+2)^2$

Bestimmung des Minimalpolynoms μ_ϕ (= eindeutig
bestimmtes normiertes Polynom minimalen Grades
mit $\mu_\phi(\phi) = 0_{\text{End}_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2}$ (gleichbedeutend: $\mu_A(A) = 0_{M_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})}$)
bekannt aus der Vorlesung:

- $\text{grad } \mu_\phi \geq 1$
- $\mu_\phi \mid \chi_\phi$

Ansatz: Bestimme die Teiler von μ_ϕ in $\mathbb{R}[x]$
von Grad ≥ 1

Berechne die Diskriminante von x^2-2x+2 :

$$\phi(e_2) = \phi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{0} e_1 + \underline{0} (ie_1) + \underline{1} e_2 + \underline{(-1)} (ie_2)$$

$$p = -2, q = 2 \Rightarrow \Delta(f) = p^2 - 4q$$

$$= 4 - 4 \cdot 2 = -4 < 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 2$$

hat keine Nullstelle in $\mathbb{R}$, sondern ein Paar komplex-konjugierter Nullstellen in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

$\rightarrow M_\Phi$ kann kein Teiler vom Grad 1 oder 3 von χ_Φ sein, denn sonst hätte $M_\Phi \in \mathbb{R}[x]$ eine Nullstelle in $\mathbb{R}$, und somit auch χ_Φ . Da $x^2 - 2x + 2$ keine reelle Nullst. hat, gilt dasselbe für $\chi_\Phi = (x^2 - 2x + 2)^2$.

$$A^2 =$$

$$A^2 - 2A + 2$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ergebn

$$\Rightarrow \text{grad}(\mu_\phi) = 2 \text{ oder } \text{grad}(\mu_\phi) = 4$$

Im zweiten Fall gilt $\mu_\phi = \chi_\phi$

Ist $\text{grad}(\mu_\phi) = 2$, dann müssen die Nullstellen von μ_ϕ in $\mathbb{C}$ entweder beide reell oder konjugiert-komplex sein. $\rightarrow$ nur $\mu_\phi = x^2 - 2x + 2$ möglich

$$\rightarrow 2 \text{ Möglichkeiten: } \mu_\phi = x^2 - 2x + 2$$
$$\text{oder } \mu_\phi = \chi_\phi = (x^2 - 2x + 2)^2$$

Die erste Möglichkeit trifft genau dann zu, wenn ϕ (gleichbed. A) eine Nullstelle von $f = x^2 - 2x + 2$ ist.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 2A + 2E = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{M_4, \mathbb{R}}$$

Ergebnis: $\mu_\phi = x^2 - 2x + 2$

4

Aufgabe 2

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$$

$$\chi_A = (x-2)^2(x-3)^2$$

(a) Bestimmen Sie μ_A .(b) Bestimmen Sie eine zu A ähnliche Matrix in Jordanscher Normalform J .(c) Bestimmen Sie eine Matrix $T \in GL_4(\mathbb{R})$ mit $T^{-1}AT = J$.zu (a) $\mu_A | \chi_A \Rightarrow \mu_A$ hat die Form

$$(x-2)^i (x-3)^j \text{ mit } i, j \in \{0, 1, 2\}$$

2, 3 Nullstellen von $\chi_A \Rightarrow$ 2, 3 sindEigenwerte von $A \Rightarrow$ 2, 3 sind Nullstellen von μ_A

$\rightarrow i, j \in \{1, 2\} \Rightarrow$ vier Möglichkeiten
für M_A , nämlich $(x-2)(x-3)$, $(x-2)^2(x-3)$,
 $(x-2)(x-3)^2$, $(x-2)^2(x-3)^2 = \chi_A$

Rechnung ergibt: $(A-2E_4) \cdot (A-3E_4) = 0$,
 $(A-2E_4)^2(A-3E_4) = 0$

Ergebnis: $M_A = (x-2)^2(x-3)$

zu (b) An der Vielfachheit der Nullstellen
von M_A erkennt man durch Verwendung

zu (a)
Basis
Die

von Satz 15.13

- Es gibt jeweils mindestens einen Jordanblock zum Eigenwert 2 und mindestens einen Jordanblock zum Eigenwert 3.
- Die Jordanblöcke zum Eigenwert 3 haben alle Größe 1 (da 3 einfache Nullstelle von M_A).
- Es gibt mindestens einen Jordanblock zum Eigenwert 2 der Größe 2.

- An χ_A kann außerdem abgelesen werden, dass die Jordanblöcke zum Eigenwert 2 insgesamt Größe 2 haben, ebenso die Jordanblöcke zum Eigenwert 3.

Eine Jordansche Normalform von A ist somit geg.

$$\text{durch } J = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right).$$

zu (c) Vorgehensweise: Bestimme eine geordnete Basis $B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ von $\mathbb{R}^4$ mit $M_B(\phi_A) = J$.

Die Elemente von B sind dann die Spalten von der

gesuchten Matrix T .

An der dritten und vierten Spalte von J kann abgelesen werden, dass $\phi_A(v_3) = 3v_3$, $\phi_A(v_4) = 3v_4$ gelten muss, d.h. $\{v_3, v_4\}$ muss eine Basis von $\text{Eig}(A, 3)$ sein. Die Berechnung von $\text{Eig}(A, 3) = \ker(A - 3E_4)$

liefert die Basisvektoren $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Betrachte $N = A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

An der ersten und zweiten Spalte kann abgelesen werden, dass $Nv_1 = 0$, $Nv_2 = v_1$ gelten muss.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

berechnete

Ansatz: Berechne mit dem Gaußverfahren $\ker(N)$ und $\ker(N^2)$.

Wähle $v_2 \in \ker(N^2) \setminus \ker(N)$ beliebig und setze $v_1 = Nv_2$. (Es gilt dann

$$Nv_1 = N(Nv_2) = N^2v_2 = 0.)$$

Die Rechnung ergibt

$$\ker(N^2) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \text{ wähle}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow v_1 = Nv_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

ver:-

insgesamt:

$$T = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

beliebig

dann

Überprüfung: $T^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 4 & -4 & 8 & -8 \\ 8 & -12 & 16 & -16 \end{pmatrix}$

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

wähle

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$