

Explizite Form des Matrixexponentials

Es bezeichne $F \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ die Matrix mit Einsen auf der
1. Nebendiagonalen, also die Matrix gegeben durch $f_{ij} = \delta_{i+1,j}$.

Lemma (5.17)

Sei $t \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ und $J = \lambda E + F \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$. Dann gilt

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{1}{2!}t^2e^{\lambda t} & \dots & \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \dots & \frac{1}{(n-2)!}t^{n-2}e^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & \dots & \frac{1}{(n-3)!}t^{n-3}e^{\lambda t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

Folgerung (5.18)

Sei $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$. Dann ist $\Phi(t) = e^{tA}$ ein **Fundamentalsystem von Lösungen** für das System $y' = Ay$.

Satz (5.19)

Sei $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ eine Matrix, $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A und $r \in \mathbb{N}$ dessen algebraische Vielfachheit. Dann gibt es für das System $y' = Ay$ ein linear unabhängiges Tupel

$$(\varphi_0, \dots, \varphi_{r-1})$$

von Lösungen der Form $\varphi_k(t) = e^{\lambda t} p_k(t)$, wobei die Funktion $p_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ in jeder Komponente ein **Polynom vom Grad kleiner als k** ist.

Beweis von Satz 5.19:

- Ist A eine Jordanmatrix, dann ist $\Phi(t) = e^{At}$ ein Fundamentalsystem von Lsg., und die Spalten von $\Phi(t)$ erfüllen die im Satz angeg. Bed.
- Sei nun A eine Matrix in JNF. Auch hier ist $\Phi(t) = e^{tA}$ ein Fund.-system. Dabei enthält $\Phi(t)$ genau r Spalten mit dem Vorfaktor $e^{\lambda t}$, und diese Spalten erfüllen wiederum die Bed. des Satzes.
- Sei nun $A \in M_{n, \mathbb{K}}$ beliebig. $\Rightarrow \exists J \in M_{n, \mathbb{K}}$

in JNF und $T \in GL_n(\mathbb{C})$ mit $A = T J T^{-1}$

So. \rightarrow J System von r Lösungen $(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ von $y' = Jy$
mit der im Satz angegeg. Form (5.12) $\rightarrow (T\varphi_1, \dots,$

$T\varphi_r)$ ist System von Lsg. von $y' = Ay$, das linear
unabh. ist, wenn dies auf $(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ zutrifft

$T\varphi_j$ erfüllt wiederum die Bed., da jeder Eintrag
von $T\varphi_j$ Linearkomb. der Einträge von φ_j ist ($1 \leq j \leq r$)

□

Definition (5.20)

Seien $n, k \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{K}^{nk}$ eine beliebige Teilmenge und $f : U \rightarrow \mathbb{K}^n$ eine Funktion. Dann bezeichnen wir eine Gleichung der Form

$$y^{(k)} = f(y, y', \dots, y^{(k-1)})$$

als **autonomes** \mathbb{K} -wertiges System von n Differentialgleichungen der Ordnung k . Als **Lösung** eines solchen Systems bezeichnen wir eine mindestens k -mal differenzierbare Funktion $\varphi : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass

$$(\varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(k-1)}(t)) \in U$$

und

$$\varphi_j^{(k)}(t) = f_j(\varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(k-1)}(t))$$

für $1 \leq j \leq n$ und alle $t \in I$ erfüllt ist.

Definition (5.21)

Seien $y' = f(y)$ und $y' = g(y)$ zwei autonome Systeme erster Ordnung, gegeben durch stetige Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{K}^n$, $g : V \rightarrow \mathbb{K}^n$, definiert auf offenen Teilmengen $U, V \subseteq \mathbb{K}^n$. Wir bezeichnen diese Systeme als **linear äquivalent**, wenn eine **bijektive lineare Abbildung** $\phi : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ mit $\phi(U) = V$ und $g = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$ existiert.

Ist $\varphi : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ eine Lösung von $y' = f(y)$ und definieren wir $\psi(t) = (\phi \circ \varphi)(t)$, dann ist ψ eine Lösung von $y' = g(y)$.

geg. autonome System 1. Ordnung

$$y' = f(y), \quad y' = g(y), \quad \text{mit}$$

stetigen Fkt. $f: U \rightarrow \mathbb{K}^n$, $g: V \rightarrow \mathbb{K}^n$,
 $U, V \subseteq \mathbb{K}^n$ offen

Ann. Die Systeme sind linear äquivalent,
d.h. es gibt eine lin. Abb. $\phi: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$
mit $g = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$

Sei $\varphi: I \rightarrow \mathbb{K}^n$ eine Lsg. von $y' = f(y)$.

Beh. $\psi = \phi \circ \varphi$ ist eine Lsg. von $y' = g(y)$

$$\text{Sei } t \in I \quad \psi'(t) = (\phi \circ \varphi)'(t) = \phi'(\varphi(t)) (\varphi'(t)) \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{Ketten-} \\ \text{regel} \end{array}$$

$$\phi(\varphi'(t)) = (\phi \circ f \circ \varphi)(t) \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \phi'(p) = \phi \quad \forall p \in \mathbb{K}^n \end{array} \quad (2)$$

$$(\phi \circ \phi^{-1} \circ g \circ \phi \circ \varphi)(t) = \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ p = \phi^{-1} \circ g \circ \phi \end{array} \quad (3)$$

$$g((\phi \circ \varphi)(t)) = g(\psi(t))$$

Fra

Anwendung: Klassifikation der autonomen
Systeme 1. Ordnung der Größe 2 bis auf
lineare Äquivalenz

(Dies sind System der Form $y' = Ay$ mit
einer Matrix $A \in M_{2, \mathbb{R}}$.)

Wir beschränken uns auf den Fall $A \in GL_2(\mathbb{R})$

Dann ist A ähnlich zu einer reellen Matrix
der folgenden Form

- (1) A hat zwei verschiedene reelle Eigenwerte oder
einen reellen Eigenwert α mit $m_{\mathbb{R}}(A, \lambda) = 2$

Dann ist A ähnlich zu einer Matrix der Form $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{R}^*$ und $a \leq b$

(2) A hat einen reellen Eigenwert a mit $\text{mg}(A, \lambda) = 1$

Dann ist A ähnlich zu $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ reelle

(3) A hat zwei komplex konjugierte Eigenwerte

Dann ist A ähnlich zu einer Matrix der Form

$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.

Frage: Wie sehen die Bildmengen der Lösungen aus, wenn A eine der Formen (1), (2) oder (3) besitzt?

zu (1) $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a \leq b$

Jede Lösung hat die Form $\varphi_{c,d}(t) = (c e^{at}, d e^{bt})$ mit
 $c, d \in \mathbb{R}$ $c = 0 \Rightarrow$ Lsg. verläuft entlang der y-Achse
 $d = 0 \Rightarrow$ Lsg. verläuft entlang der x-Achse

Betrachte nun den Fall $c, d > 0$

Setze $r = \frac{b}{a}$. 1. Fall: $r > 0$

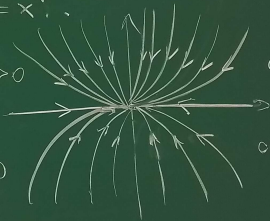
Dann haben die Bildungen $\varphi_{c,d}$ für $c, d > 0$ die Form
von Potenzfkt. (dann: Sei $t \in \mathbb{R}$, setze $x = c e^{at}$,
 $y = d e^{bt} \Rightarrow \frac{y}{x} = e^{at} \Rightarrow \ln\left(\frac{y}{x}\right) = at \Rightarrow a^{-1} \ln\left(\frac{y}{x}\right) = t$

einsetzen $\rightarrow y = d e^{(a^{-1} \ln(\frac{x}{c}))} = d (\frac{x}{c})^{(\frac{1}{a})} = d (\frac{x}{c})^r$

\rightarrow Die Bildmenge hat bis auf Skalierungen die Form des Funktionsgraphen $y = x^r$.

Phasenportrait: $c < 0, d > 0$

$c, d < 0$



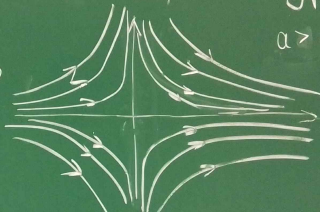
$a < 0$

$c, d > 0$

$c > 0, d < 0$

2 Fall: $\nu < 0$ In diesem Fall haben die
Kurven $\varphi_{c,d}(\mathbb{R})$ die Formen von Hyperbeln.

Phasenportrait:
 $c < 0, d > 0$ $a > 0, b < 0$
 $c, d > 0$



zu (2) $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}^*$

Dann haben die Lsg die Form

$$\varphi_{c,d}(t) = (c e^{at} + dt e^{at}, d e^{at})$$

Betrachte nun den Fall $c, d > 0, a > 0$.

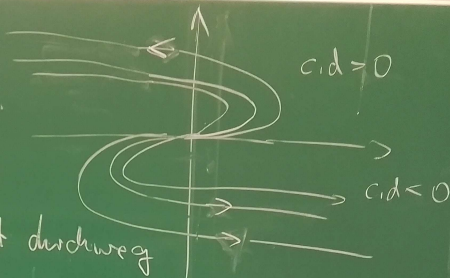
Phasenportrad

Grund für die Form:

Die Ableitung von

$y_{c,d}(t) = d e^{at}$ ist durchweg

positiv. Die Ableitung von $x_{c,d}(t) = c e^{at} + d t e^{at}$ hat eine Nullstelle, an der das Vorzeichen von positiv auf negativ wechselt \Rightarrow Kurve dreht sich "nach links".



zu (3) $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$

Hier haben die Lösungen die Form

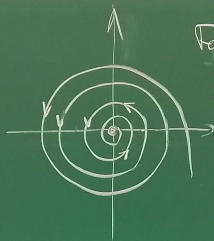
$$\varphi_{c,d}(t) = c \varphi(t) + d \psi(t) \text{ mit}$$

$$\varphi(t) = e^{at} \begin{pmatrix} \cos(bt) \\ \sin(bt) \end{pmatrix}, \quad \psi(t) = e^{at} \begin{pmatrix} -\sin(bt) \\ \cos(bt) \end{pmatrix}$$

1. Fall: $a=0$ Das Phasenportrait besteht aus Kreislinien.



2. Fall: $a \neq 0$ Hier besteht das Phasenportrait aus Spiralen (einlaufend in den Nullpunkt falls $a < 0$, sonst auslaufend).



Fall $a < 0$

$b > 0$ (Laufrichtung
gegen den Uhrzeigersinn)

zu

Dar

f

Bed

Das char. Polynom einer linearen DGL k -ter Ordnung

Eine lineare DGL k -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten hat die Form

$$y^{(k)} + a_{k-1}y^{(k-1)} + \dots + a_1y' + a_0 = 0$$

mit $a_0, a_1, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{K}$. Man bezeichnet das Polynom

$$\chi = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \dots + a_1x + a_0$$

als das **charakteristische Polynom** der DGL.

Differentialoperatoren gegeben durch Polynome

Ist $p \in \mathbb{K}[x]$ ein Polynom vom Grad $k \in \mathbb{N}_0$,
 $p = a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0$, dann bezeichnen wir mit $p\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ den
Differentialoperator auf dem Raum $C^k(I)$ der k -mal stetig
differenzierbaren Funktionen gegeben durch

$$p\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(f)(t) = a_k f^{(k)}(t) + \dots + a_1 f'(t) + a_0.$$

Zwei Hilfsaussagen

Lemma (5.22)

Sei $\lambda \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Dann gilt für jede Funktion $f \in \mathcal{C}^k(I)$ die Gleichung

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda\right)^k (f(t)e^{\lambda t}) = f^{(k)}(t)e^{\lambda t}.$$

Lemma (5.23)

Sei $p \in \mathbb{C}[t]$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $p(\lambda) \neq 0$. Ist $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Polynomfunktion vom Grad k , dann gibt es eine weitere Polynomfunktion $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ vom selben Grad mit

$$p\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) (g(t)e^{\lambda t}) = h(t)e^{\lambda t}.$$

Beweis von Lemma 5.22:

Beh. $(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda)^k (f(t) e^{\lambda t}) = f^{(k)}(t) e^{\lambda t}$
für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $f \in \mathcal{C}^k(I)$

Bew. durch vollständige Induktion über k .

$k=0$ nichts zu zeigen

Ind. schritt $k \rightarrow k+1$: leicht zu überprüfen. Sind

$$p, q \in \mathbb{C}[t], \text{ dann gilt jeweils } (pq) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) (f) \\ = \left(p \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \circ q \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right) (f)$$

$$= \left(p \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \circ q \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right) (f)$$

Damit erhält man $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda \right)^{k+1} (f(t) e^{\lambda t}) =$
 $\left(\left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda \right) \circ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda \right)^k \right) (f(t) e^{\lambda t}) \stackrel{\text{Ind.-V.}}{=} \dots$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda \right) (f^{(k)}(t) e^{\lambda t}) = f^{(k+1)}(t) \cdot e^{\lambda t} + f^{(k)}(t) \lambda e^{\lambda t}$$

$$- \lambda f^{(k)}(t) e^{\lambda t} = f^{(k+1)}(t) e^{\lambda t}$$

□