Lineare Systeme von DGLs

Definition (5.1)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $A : I \to \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}$ eine stetige Abbildung von I in den Raum der $\mathbb{K}$-wertigen $n \times n$-Matrizen. Sei $b : I \to \mathbb{K}^n$ eine weitere stetige Funktion. Dann nennt man

$$y' = A(x)y + b(x)$$

ein lineares System von Differenzialgleichungen erster Ordnung. Ist die Funktion b konstant Null, dann spricht man von einem homogenen, sonst von einem inhomogenen System.

Existenz- und Eindeutigkeitssatz für lineare Systeme

Satz (5.2)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $a \in I$ und $c \in \mathbb{K}^n$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Lösung $\varphi : I \to \mathbb{K}^n$ des Systems $y' = A(x)y + b(x)$ mit $\varphi(a) = c$.

Lineare Unabhängigkeit von Lösungen

Satz (5.3)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nichtleeres offenes Intervall, $A : I \to \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}$ eine stetige Abbildung und $\mathcal{L}^{\mathrm{hom}}$ die Menge aller Lösungen von $y' = A(x)y$ auf dem Intervall I. Dann ist $\mathcal{L}^{\mathrm{hom}}$ ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Ist $m \in \mathbb{N}$, dann sind für ein m-Tupel $(\varphi_1, ..., \varphi_m)$ von Lösungen die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) Die Funktionen $\varphi_1, ..., \varphi_m$ sind linear unabhängig.

(ii) Es gibt ein $a \in I$, so dass $\varphi_1(a), ..., \varphi_m(a)$ in $\mathbb{K}^n$ linear unabhängig sind.

(iii) Für alle $a \in I$ sind die Vektoren $\varphi_1(a), ..., \varphi_m(a)$ in $\mathbb{K}^n$ linear unabhängig.

Eine Basis des $\mathbb{K}$-Vektorraums $\mathcal{L}^{\mathrm{hom}}$ bezeichnet man als Fundamentalsystem für $y' = A(x)y$.

Fundamentalsysteme in Matrixschreibweise

Trägt man die Elemente eines Tupels von Lösungen als Spalten in eine Matrix ein, so erhält man eine Funktion $\Phi : I \to \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}$. Durch Vergleich der einzelnen Spalten sieht man, dass

$$\Phi'(t) \quad = \quad A(t)\Phi(t) \qquad \text{für alle} \quad t \in I$$

gilt. Sind die Spalten von $\Phi(t)$ für ein (und somit für alle) $t \in I$ linear unabhängig, so ist auch für die matrixwertige Funktion Φ die Bezeichung „Fundamentalsystem" üblich.

Definition der Wronski-Determinante

Definition (5.4)

Sei $y' = A(x)y$ ein n-dimensionales lineares System von Differenzialgleichungen, definiert auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, und $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ ein Tupel von Lösungen. Sei $\Phi : I \to \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}$ die zugehörige matrixwertige Funktion. Dann wird $w : I \to \mathbb{K}$, $t \mapsto \det \Phi(t)$ die Wronski-Determinante des Tupels genannt.

Kennzeichnung von Fundamentalsystemen durch die Wronski-Determinante

Folgerung

Sei $y' = A(x)y$ ein n-dimensionales lineares System von Differenzialgleichungen, definiert auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ ein Tupel von Lösungen und w die zugehörige Wronski-Determinante. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) Das Tupel ist ein Fundamentalsystem von Lösungen.

(ii) Es gilt $w(t) \neq 0$ für alle $t \in I$.

(iii) Es gibt ein $a \in I$ mit $w(a) \neq 0$.

Die Wronski-Determinante als Lösung eines AWP

Proposition (5.6)

Sei $y' = A(x)y$ ein n-dimensionales lineares System von Differenzialgleichungen, definiert auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, Φ ein Fundamentalsystem von Lösungen und w die zugehörige Wronski-Determinante. Für jedes $a \in I$ ist w die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch $y' = \mathrm{Tr}(A(x))y$ und $(a, w(a))$, und somit

$$w(t) \quad = \quad w(a) \exp\left(\int_a^t \mathrm{Tr}(A(s))\,ds\right) \qquad \text{für alle } t \in I.$$

Beweis von Prop 5.6

geg: $y' = A(x)\, y$ mit $A : I \to M_{n,\mathbb{K}}$

$\Phi : I \to M_{n,\mathbb{K}}$ Fundamentalsystem, $w = \det \Phi$ zugehörige Wronski-Determinante. z.zg: $w'(t) = \mathrm{Tr}(A(t))\, w(t)$ für alle $t \in I$.

Seien $v_1(t), \dots, v_n(t)$ für die Zeilen von $\Phi(t)$.

Betrachte $\Phi'(t) = A(t)\,\Phi(t)$ für jedes $t \in I$ zeilenweise

$$\Rightarrow v_i'(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, v_j(t) \text{ für } 1 \leq j \leq n \quad (*)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\det \Phi(t)\right) \overset{\text{Leibnizformel}}{=} \frac{d}{dt}\left(\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^{n} v_{k,\sigma(k)}(t)\right) \overset{\text{Produkt-regel}}{=}$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{k=1}^{n} v'_{k,\sigma(k)}(t) \prod_{l \neq k} v_{l,\sigma(l)}(t) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, v'_{k,\sigma(k)}(t) \prod_{l \neq k} v_{l,\sigma(l)}(t) = \det\begin{pmatrix} v_1'(t) \\ v_2(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2'(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{pmatrix}$$

$$+ \dots + \det\begin{pmatrix} v_1(t) \\ \vdots \\ v_{n-1}(t) \\ v_n'(t) \end{pmatrix} \overset{\text{(*) und Eigenschaften „multilinear" und „alternierend" der Determinantenfkt.}}{=}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kk}(t) \det\begin{pmatrix} v_1(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{pmatrix} = \operatorname{Tr}(A(t)) \cdot w(t)$$

Die eindeutig bestimmte Lösung der lin. DGL $y' = \operatorname{Tr}(A(x))\, y$ durch $(a, w(a))$ ist nach Kap. 1 geg. durch $w(t) = w(a) \exp\left(\int_a^t \operatorname{Tr}(A(s))\, ds\right)$ $\square$

<u>Anwendungsbeispiel</u> Betrachte $y' = A(x)\, y$ mit $A(x) = \begin{pmatrix} x^2 & -x^2 \\ -x^2 & x^2 \end{pmatrix}$. Offenbar ist $\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Lösung. Eine zweite (davon linear unabh.) kann mit Hilfe der Wronski-Determinante w des Systems bestimmt werden. Es gilt $\mathrm{Tr}(A(t)) = 2t^2$ für alle $t \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow$ w ist Lösung von $y' = 2x^2 y$, also $w(t) = w(0)\, e^{\int_0^t 2s^2 ds} = w(0)\, e^{2/3\, t^3}$. Betrachte nun den Ansatz $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_{12}(t) \\ 1 & \varphi_{22}(t) \end{pmatrix}$ für ein

Fundamentalsystem.

$$\varphi_{22}(t) - \varphi_{12}(t) = \det \Phi(t) = w(t) = w(0)\, e^{2/3\, t^3}$$
$$= \varphi_{22}(0)\, e^{2/3\, t^3} - \varphi_{12}(0) \cdot e^{2/3\, t^3}$$

Nach Folgerung 5.5 ist Φ genau dann ein Fundamentalsystem, wenn $w(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & \varphi_{12}(0) \\ 1 & \varphi_{22}(0) \end{pmatrix}$ ungleich null ist. Dies ist z.B. der Fall für $\varphi_{12}(0) = -1$, $\varphi_{22}(0) = 1$. überprüfe:

Tatsächlich ist $\varphi_2(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{12}(t) \\ \varphi_{22}(t) \end{pmatrix}$ mit

$\varphi_{12}(t) = -e^{2/3\, t^3}$, $\varphi_{22}(t) = e^{2/3\, t^3}$ eine weitere Lsg.,

und $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) \\ \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t) \end{pmatrix}$ ein Fundamentalsystem. $\square$

Lösungsmenge einer inhomogenen DGL als affiner Raum

Satz (5.7)

Sei $y' = A(x)y + b(x)$ eine inhomogene lineare DGL, $\mathcal{L}$ die Menge ihrer Lösungen und $\mathcal{L}^{\mathrm{hom}}$ der $\mathbb{K}$-Vektorraum der Lösungen von $y' = A(x)y$. Ist $\psi_0 : I \to \mathbb{K}^n$ eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems, dann gilt $\mathcal{L} = \psi_0 + \mathcal{L}^{\mathrm{hom}}$.

Variation der Konstanten im Mehrdimensionalen

Satz (5.8)

Sei $y' = A(x)y + b(x)$ ein inhomogenes lineares System von Differenzialgleichungen und Φ ein Fundamentalsystem von Lösungen des zugehörigen homogenen Systems. Dann erhält man eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems durch

$$\psi(t) \quad = \quad \Phi(t)u(t) \quad \text{mit} \quad u(t) = \int_a^t \Phi(s)^{-1} b(s)\, ds.$$

)
eiar
minante
Ct
w ist
=
hte
fuis ein

Beweis von Satz 5.8:

z.zg. $\Psi(t) = \Phi(t)\, u(t)$ mit

$$u(t) = \int_a^t \Phi(t)^{-1}\, b(t)\, dt$$ ist eine Lösung

des inhomogen linearen Systems $y' = A(x)y + b$

$$\text{HDI} \Rightarrow u'(t) = \Phi(t)^{-1} b(t) \quad \forall t \in I$$

$$\Psi'(t) = \frac{d}{dt}\left(\Phi(t) u(t)\right) = \Phi'(t) u(t) + \Phi(t) u'(t)$$

$$= A(t)\Phi(t) u(t) + \Phi(t)\Phi(t)^{-1} b(t) =$$

$$A(t)\Psi(t) + b(t)$$ $\square$

Anwendungbeispiel zu Satz 5.8

$y_1' = -y_2$, $y_2' = y_1 + x$ in Vektorschreibweise:

$$y' = A(x)\,y + b(x) \quad \text{mit} \quad A(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

letzte Stunde (Bsp mit $\omega = 1$) $\Rightarrow$ $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$

ist Fundamentalsystem für $y' = A(x)\,y$

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \right] \Rightarrow \Phi(t)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

Variation der Konstanten $\Rightarrow$

$$u(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(s) & \sin(s) \\ -\sin(s) & \cos(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} ds = \int_0^t \begin{pmatrix} s\sin(s) \\ s\cos(s) \end{pmatrix} ds$$

letzte Stunde (Bsp mit $\omega = 1$) $\Rightarrow \Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$

ist Fundamentalsystem für $y' = A(x)\, y$

partielle Integration $\Rightarrow \int_0^t s \cdot \sin(s)\, ds = \sin(t) - t\cos(t)$

$\int_0^t s \cdot \cos(s)\, ds = t \cdot \sin(t) + \cos(t) - 1 \Rightarrow u(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) - t \cdot \cos(t) \\ t \cdot \sin(t) + \cos(t) - 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ erhalte spezielle Lsg. durch $\psi(t) = \Phi(t)\, u(t) =$

$$\begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(t) - t\cos(t) \\ t \cdot \sin(t) + \cos(t) - 1 \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} -t + \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$$

$\psi_1'(t) = -1 + \cos(t) = -\psi_2(t)$ ($\checkmark$)

$\psi_2'(t) = \sin(t) = \psi_1(t) + t$ ($\checkmark$)

Lineare DGLs höherer Ordnung

Definition (5.9)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, und seien $a_k : I \to \mathbb{K}$ für $0 \leq k < n$ und $b : I \to \mathbb{K}$ stetige Funktionen. Dann ist

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y \quad = \quad b(x) \qquad (1)$$

eine lineare Differenzialgleichung n-ter Ordnung. Diese wird als homogen bezeichnet, wenn $b = 0$ ist, ansonsten als inhomogen.

Fundamentalsystem einer DGL höherer Ordnung

Satz (5.10)

Gegeben sei eine lineare DGL n-ter Ordnung der Form (1). Dann ist die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ der homogenen linearen DGL ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Ein System $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ von Lösungen der homogenen DGL ist genau dann linear unabhängig, wenn für ein (und damit für alle) $t \in I$ die Wronski-Determinante

$$w(t) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \dots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \quad \text{ungleich Null ist.}$$

Man nennt $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ in diesem Fall ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen linearen DGL.

Wiederholung Lineare Algebra

Sei $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}$ eine $n \times n$-Matrix über dem Körper $\mathbb{K}$.

- Ein Vektor $v \in \mathbb{K}^n$ heißt Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$, wenn $v \neq 0_{\mathbb{K}^n}$ und $Av = \lambda v$ gilt.
- Die Eigenvektoren bilden zusammen mit dem Nullvektor den Eigenraum $\mathrm{Eig}(A, \lambda) = \ker(A - \lambda E)$.
- Das charakteristische Polynom der Matrix A ist definiert durch $\chi_A = \det(xE - A) \in \mathbb{K}[x]$.
- Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen von χ_A in $\mathbb{K}$.

Wiederholung Lineare Algebra (Forts.)

- Die Matrix A wird als diagonalisierbar bezeichnet, wenn eine Diagonalmatrix $D \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}$ und eine invertierbare Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ mit $D = TAT^{-1}$ existieren.
- Eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn das Polynom χ_A in $\mathbb{K}[x]$ in Linearfaktoren zerfällt und für jeden Eigenwert die algebraische Vielfachheit mit der geometrischen Vielfachheit übereinstimmt.

Die Lösungsmenge im diagonalisierbaren Fall

Satz (5.11)

Sei $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$, eine $\mathbb{C}$-wertige $n \times n$-Matrix.

(i) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $v \in \mathbb{C}^n$. Die Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$, $t \mapsto e^{\lambda t} v$ ist genau dann eine Lösung des Systems $y' = Ay$ ungleich null, wenn v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist.

(ii) Ist $(\lambda_1, ..., \lambda_r)$ ein Tupel komplexer Zahlen und $(v_1, ..., v_r)$ ein Tupel von Vektoren, wobei v_j jeweils ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_j bezeichnet, so ist das Tupel $(\varphi_1, ..., \varphi_r)$ von Funktionen $\varphi_j(t) = e^{\lambda_j t} v_j$ genau dann linear unabhängig, wenn das Tupel $(v_1, ..., v_r)$ linear unabhängig ist.

(iii) Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn die komplexen Zahlen λ_j alle verschieden sind.

Beweis von Satz 5.11

geg: System $y' \overset{(*)}{=} A y$ mit konstanter Matrix

$A \in \mathcal{M}_{n\times n,\mathbb{C}}$

zu (i) geg $\lambda \in \mathbb{C}$, $v \in \mathbb{C}^n$. $\varphi(t) = e^{\lambda t} v$

Beh: φ ist Lsg von $(*)$ ungleich null $\Longleftrightarrow$ $Av = \lambda v$ und $v \neq 0_{\mathbb{C}^n}$

„$\Leftarrow$" $\varphi'(t) = \lambda e^{\lambda t} v = e^{\lambda t}(\lambda v) =$

$e^{\lambda t} A v = A(e^{\lambda t} v) = A\varphi(t)$

Aus $v \neq 0_{\mathbb{C}^n}$ folgt, dass φ ungleich null ist.

„$\Rightarrow$" $\varphi'(t) = A\varphi(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$

$$\lambda e^{\lambda t} v = A e^{\lambda t} v \quad \forall t \in \mathbb{R} \overset{t=0}{\Longrightarrow}$$

$\lambda v = A v$ Wäre v gleich $0_{\mathbb{C}^n}$, dann wäre auch φ gleich Null.

zu (ii) $(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ linear unabh. $\overset{\text{Satz 5.3}}{\Longleftrightarrow}$

$(\varphi_1(0), \dots, \varphi_r(0))$ linear unabh. in $\mathbb{C}^n$

$\Longleftrightarrow$ $(v_1, \dots, v_n)$ linear unabh.

zu (iii) folgt aus der Theorie der Eigenwerte aus der Linearen Alg. $\square$

Übergang zwischen Lösungsmengen durch Basiswechsel

Proposition (5.12)

Sei $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$, $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ und $B = TAT^{-1}$. Genau dann ist $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ eine Lösung des Systems $y' = Ay$, wenn $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ gegeben durch $\psi(t) = T\varphi(t)$ eine Lösung von $z' = Bz$ ist.

Umrechnung in reellwertige Lösungen

Proposition (5.13)

Sei $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$, eine $\mathbb{R}$-wertige $n \times n$-Matrix.

(i) Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A, $\lambda = \nu + i\omega$ mit $\nu, \omega \in \mathbb{R}$, und ist $v \in \mathbb{C}^n$ ein zugehöriger Eigenvektor, $v = u + iw$ mit $u, w \in \mathbb{R}^n$, dann ist auch $\bar{\lambda} = \nu - i\omega$ ein Eigenwert von A, und $\bar{v} = u - iw$ ist ein zugehöriger Eigenvektor.

(ii) In diesem Fall sind $\psi, \xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\psi(t) = e^{\nu t}(\cos(\omega t)u - \sin(\omega t)w)$$

und

$$\xi(t) = e^{\nu t}(\sin(\omega t)u + \cos(\omega t)w)$$

zwei linear unabhängige Lösungen der DGL.

Beweis von Prop. 5.13 (ii)

geg. $y' = Ay$ mit $A \in M_{n \times n, \mathbb{R}}$

$\lambda = \nu + i\omega$ Eigenwert von A, $v = u + iw$ zugeh. Eigenvektor

Satz 5.11 $\Rightarrow$ $\varphi(t) = e^{\lambda t} v$, $\bar{\varphi}(t) = e^{\bar{\lambda} t} \bar{v}$

sind Lösungen des Systems, somit auch

$\psi(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2}\bar{\varphi}(t)$ und

$\xi(t) = \frac{1}{2i}\varphi(t) - \frac{1}{2i}\bar{\varphi}(t)$

Es gilt $\psi(t) = \frac{1}{2} e^{(\nu + i\omega)t}(u + iw)$

$+ \frac{1}{2} e^{(\nu - i\omega)t}(u - iw) \underset{\uparrow}{=}$ $e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$

$$\frac{1}{2} e^{\nu t}\big(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)\big)\cdot (u + i w)$$

$$+ \frac{1}{2} e^{\nu t}\big(\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)\big)\cdot (u - i w)$$

$$= \ldots = e^{\nu t}\big(\cos(\omega t)\, u - \sin(\omega t)\, w\big)$$

Genauso erhält man $\xi(t) = e^{\nu t}\big(\sin(\omega t)\, u + \cos(\omega t)\, w\big)$

Aus der linearen Unabh. von $(\varphi, \bar{\varphi})$ folgt auch die lin. Unabh. von ψ und ξ wegen

$$\begin{pmatrix}\psi\\ \xi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2i} & -\frac{1}{2i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\ \bar{\varphi}\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \det\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2i} & -\frac{1}{2i}\end{pmatrix} \neq 0.$$

$\square$