Satz (4.1)

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ eine offene Teilmenge, $(a, b) \in D$ und $f : D \to \mathbb{K}^n$ eine stetige Funktion. Dann existiert für das durch $y' = f(x, y)$ und (a, b) definierte Anfangswertproblem mindestens eine Lösung, die jedes Kompaktum in beide Richtungen verlässt.

Der Fixpunktsatz von Schauder

Satz (4.14)

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum und $A \subseteq V$ eine nichtleere konvexe abgeschlossene Teilmenge. Sei $\phi : A \to A$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, dass $\phi(A)$ relativ kompakt ist. Dann besitzt ϕ einen Fixpunkt.

Definition der gleichgradigen Stetigkeit

Definition (4.16)

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $M \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$. Man bezeichnet M als gleichgradig stetig, wenn für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ jeweils ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass für alle $x, x' \in X$ und alle $f \in M$ aus $d_X(x, x') < \delta$ jeweils $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$ folgt.

Satz (4.20)

Es sei (X, d_X) ein kompakter und (Y, d_Y) ein vollständiger metrischer Raum. Eine Teilmenge $M \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$ ist genau dann kompakt bezüglich der Supremumsmetrik d_∞, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind.

(i) Für alle $x \in X$ ist $M(x) = \{f(x) \mid f \in M\} \subseteq Y$ relativ kompakt.

(ii) Die Menge M ist gleichgradig stetig.

(iii) Die Menge M ist abgeschlossen.

Existenzsatz von Peano, lokale Version

Satz (4.21)

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ eine offene Teilmenge, $(a, b) \in D$ und $f : D \to \mathbb{K}^n$ eine stetige Funktion. Dann existiert für das durch $y' = f(x, y)$ und (a, b) definierte Anfangswertproblem ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ und eine Lösung $\varphi :]a - \delta, a + \delta[\to \mathbb{K}^n$.

Beweis von Satz 4.21 (lokaler Existenzsatz)

o.B.d.A. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $(a,b) \in D$

$f : D \to \mathbb{K}^n$ Betrachte das AWP geg durch

$y' = f(x,y)$ und $(a,b) \in D$.

D offen $\Rightarrow \exists\, \rho, \delta \in \mathbb{R}^+$, so dass $\bar{C} = [a-\rho, a+\rho] \times \bar{B}_\delta(b)$

in D enthalten ist

setze voraus: f ist auf $\bar{C}$ nicht konstant null

(sonst wäre $\varphi(t) = b$ eine Lösung)

$\Rightarrow$ erhalte $K = \sup\{ \|f(x,y)\|_\infty \mid (x,y) \in \bar{C} \} \in \mathbb{R}^+$

Definiere $\delta = \min\{\rho, \frac{\sigma}{K}\}$, $\bar{I} = [a-\delta, a+\delta]$

Sei $A = \{\varphi \in \mathcal{C}(\bar{I}, \mathbb{R}^n) \mid \|\varphi - b\|_\infty \leq \sigma\}$

(ist nichtleer, abgeschlossen, konvex als abg. Ball)

Definiere $G : A \to \mathcal{C}(\bar{I}, \mathbb{R}^n)$ durch

$$G(\varphi)(t) = b + \int_a^t f(s, \varphi(s))\, ds.$$

Überprüfe: (1) $G(\varphi)$ ist für jedes $\varphi \in A$ stetig, sogar stetig diff'bar (Grund: Hauptს. d. Diff. und Int.-rechn.)

(2) $G(A) \subseteq A$ (3) Die Abb. G ist stetig.

(4) Die Menge $M = \overline{G(A)} \subseteq \mathcal{C}(\bar{I}, \mathbb{R}^n)$ erfüllt die Voraussetzungen des Satzes von Arzela-Ascoli.

zu (2) Sei $\varphi \in A$. Dann gilt

$$\|G(\varphi) - b\|_\infty \leq \sup\left\{ \int_a^t \| f(s, \varphi(s))\|_\infty \, ds \;\middle|\; t \in \bar{I} \right\}$$

$$\leq \sup\left\{ \int_a^t \kappa \, ds \;\middle|\; t \in \bar{I} \right\} \leq \kappa \delta \leq \sigma$$

$\Rightarrow G(\varphi) \in A$

zu (3) Sei $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in A, die gegen ein $\varphi \in A$ konvergiert. z.zg: $\lim_{n \to \infty} G(\varphi_n) = G(\varphi)$

Für alle $t \in \bar{I}$ gilt $\|G(\varphi_n)(t) - G(\varphi)(t)\|_\infty$

$$\leq \int_a^t \| f(s, \varphi_n(s)) - f(s, \varphi(s)) \|_\infty \, ds$$

$$\leq \int_a^t 2\kappa \, ds \leq 2\sigma \quad (*)$$

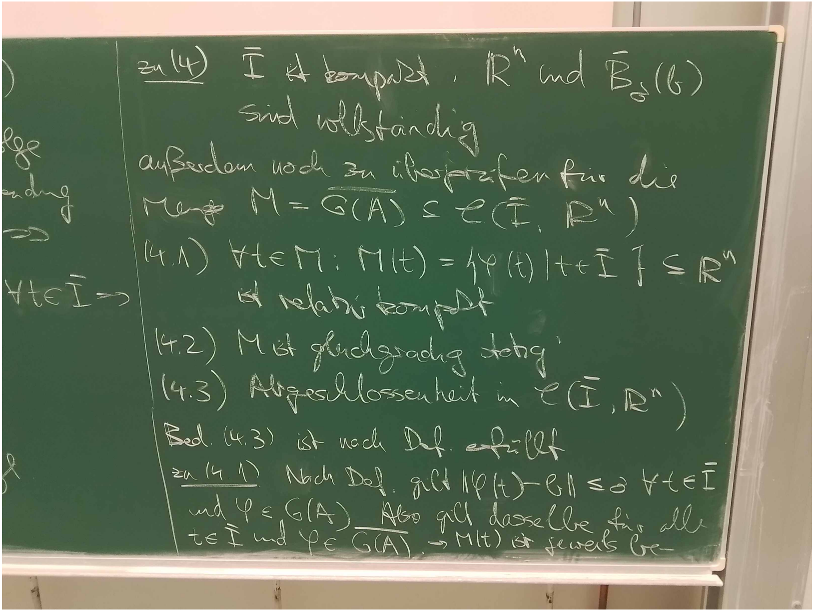
Vor. $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi\|_\infty = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$

für alle $t \in \bar{I}$. Die punktweise Konvergenz der Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zusammen mit $(*)$ ermöglicht die Anwendung des Satzes von Lebesgue über maj. Konv. $\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^t f(s, \varphi_n(s))\,ds = \int_a^t f(s, \varphi(s))\,ds \quad \forall t \in \bar{I} \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} G(\varphi_n)(t) = G(\varphi)(t) \quad \forall t \in \bar{I}$$

Da das Intervall $\bar{I}$ kompakt ist, folgt daraus die Gleichung $\lim_{n\to\infty} G(\varphi_n) = \varphi$ bzgl. der d_∞-Metrik.



(Korrekturanmerkung auf der nächsten Seite)

Hinweis / Klarstellung zu (4.1)

Dass $\|\varphi(t) - b\| \leq \sigma$ für alle $t \in \bar{I}$ und $\varphi \in G(A)$ gilt, liegt genau genommen nicht an der Definition von $G(A)$, sondern an der bereits nachgewiesenen Inklusion $G(A) \subseteq A$ und der Definition von A. Weil A als abgeschlossener Ball bezüglich der d_∞-Metrik in $\mathcal{C}(\bar{I}, \mathbb{R}^n)$ abgeschlossen ist, folgt aus $G(A) \subseteq A$ unmittelbar die Inklusion $\overline{G(A)} \subseteq A$.

$ds \mid t \in \bar{I}\}$

σ

ie gegen

$G(\varphi_n) = G(\varphi)$

$G(\varphi)(t)\|_\infty$

ds

schränkt, und damit relativ kompakt

zu (4.2) Seien $t, t' \in \bar{I}$ mit $t < t'$.

$$\|G(\varphi)(t) - G(\varphi)(t')\|_\infty = \left\| \int_t^{t'} f(s, \varphi(s))\, ds \right\|$$

$$\le \int_t^{t'} K\, ds \le K(t' - t) \quad \text{für alle } \varphi \in A.$$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgeg. Setze $\delta_1 = \frac{\varepsilon}{2K}$. $\Rightarrow$

$\|G(\varphi)(t) - G(\varphi)(t')\|_\infty \le \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$ für alle $t, t' \in I$ mit $|t' - t| < \delta_1$ und alle $\varphi \in A$

Arzela-Ascoli $\Rightarrow$ $\overline{G(A)} = M$ ist kompakt

Schauderscher Fixpunktsatz $\Rightarrow$ $\exists\, \varphi \in A$ mit $G(\varphi) = \varphi$. $\varphi|_{]a-\delta, a+\delta[}$ ist dann die ges. Lösung. $\square$

Das Zornsche Lemma

Satz (4.22)

Sei $(X, \preceq)$ eine nichtleere halbgeordnete Menge mit der Eigenschaft, dass jede totalgeordnete Teilmenge von X eine obere Schranke in X besitzt. Dann existiert in X ein maximales Element.

Existenzsatz von Peano, globale Fassung

Satz (4.23)

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ eine offene Teilmenge, $(a, b) \in D$ und $f : D \to \mathbb{K}^n$ eine stetige Funktion. Dann existiert für das durch $y' = f(x, y)$ und (a, b) definierte Anfangswertproblem eine maximale Lösung.

- Nach Satz 3.14 ist die Maximalität einer Lösung gleichbedeutend damit, dass die Lösungskurve nach links und rechts jedes Kompaktum verlässt unter der Voraussetzung, dass die definierende Funktion f einer lokalen Lipschitz-Bedingung genügt.
- Am Beweis von Lemma von 3.13 lässt aber erkennen, dass für die Gültigkeit der Äquivalenz eigentlich nur die lokale Existenz von Lösungen (Satz 3.9) ausschlaggebend ist.
- In der vorliegenden Situation kann Satz 4.21 an Stelle von Satz 3.9 verwendet werden. Daraus folgt die Gültigkeit des Satzes von Peano in der Fassung von Satz 4.1.

Beweis von Satz 4.23:

Sei $\mathcal{L}$ die Menge aller Lösungen des AWP.

Definiere auf $\mathcal{L}$ eine Halbordnung $\leq$ durch die Festlegung für bel. $\varphi: I \to \mathbb{K}^n$, $\psi: J \to \mathbb{K}^n$ in $\mathcal{L}$

$$\varphi \leq \psi \Leftrightarrow I \subseteq J \text{ und } \psi|_J = \varphi$$

Überprüfe unmittelbar, dass dies eine Halbordn. auf M ist.

Es ist $\mathcal{L} \neq \emptyset$ wegen Satz 4.21. Sei $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{L}$ eine total-geordnete Teilmenge von $\mathcal{L}$. z.zg. $\mathcal{T}$ hat eine obere Schranke in $\mathcal{L}$. Definiere $I_0 = \bigcup \{ I \subseteq \mathbb{R} \mid \varphi: I \to \mathbb{K}^n \in \mathcal{T} \}$

Definiere dann $\varphi_0 : I_0 \to \mathbb{K}^n$ für alle $t \in I_0$ durch
$\varphi_0(t) = \varphi(t)$, wobei $\varphi : I \to \mathbb{K}^n$ mit $t \in I$ bel. gewählt.
Der Wert $\varphi_0(t)$ ist unabh. von der Wahl von φ, denn: Ang.
$\psi : I' \to \mathbb{K}^n$ ist weiteres Element mit $t \in I'$.
$\mathcal{T}$ totalgeordnet $\Rightarrow$ o.B.d.A. $\varphi \leq \psi \Rightarrow \psi|_I = \varphi$
$\overset{t \in I}{\Rightarrow} \psi(t) = \varphi(t)$. __Beh.__ φ_0 ist Lsg. des AWP

Sei $t \in I_0 \Rightarrow \exists\, \varphi : I \to \mathbb{K}^n$ mit $t \in I$. Da φ eine Lsg
des AWP ist, und weil φ_0 und φ in einer Umg von t (genauer: auf ganz I) übereinstimmen,
gilt $\varphi_0'(t) = \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) = f(t, \varphi_0(t))$, und ebenso
$\varphi_0(a) \underset{a \in I}{=} \varphi(a) = b$ Lemma von Zorn anwendbar $\Rightarrow$
Es gibt in $\mathcal{L}$ ein max. Element, also eine maximale Lösung. $\square$

Definition (5.1)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $A : I \to \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}$ eine stetige Abbildung von I in den Raum der $\mathbb{K}$-wertigen $n \times n$-Matrizen. Sei $b : I \to \mathbb{K}^n$ eine weitere stetige Funktion. Dann nennt man

$$y' = A(x)y + b(x)$$

ein lineares System von Differenzialgleichungen erster Ordnung. Ist die Funktion b konstant Null, dann spricht man von einem homogenen, sonst von einem inhomogenen System.

Existenz- und Eindeutigkeitssatz für lineare Systeme

Satz (5.2)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $a \in I$ und $c \in \mathbb{K}^n$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Lösung $\varphi : I \to \mathbb{K}^n$ des Systems $y' = A(x)y + b(x)$ mit $\varphi(a) = c$.

Lineare Unabhängigkeit von Lösungen

Satz (5.3)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nichtleeres offenes Intervall, $A : I \to \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}$ eine stetige Abbildung und $\mathcal{L}^{\mathrm{hom}}$ die Menge aller Lösungen von $y' = A(x)y$ auf dem Intervall I. Dann ist $\mathcal{L}^{\mathrm{hom}}$ ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Ist $m \in \mathbb{N}$, dann sind für ein m-Tupel $(\varphi_1, ..., \varphi_m)$ von Lösungen die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) Die Funktionen $\varphi_1, ..., \varphi_m$ sind linear unabhängig.

(ii) Es gibt ein $a \in I$, so dass $\varphi_1(a), ..., \varphi_m(a)$ in $\mathbb{K}^n$ linear unabhängig sind.

(iii) Für alle $a \in I$ sind die Vektoren $\varphi_1(a), ..., \varphi_m(a)$ in $\mathbb{K}^n$ linear unabhängig.

Eine Basis des $\mathbb{K}$-Vektorraums $\mathcal{L}^{\mathrm{hom}}$ bezeichnet man als Fundamentalsystem für $y' = A(x)y$.

Beweis von Satz 5.3

geg. $A : I \to M_{n,K}$, hom. lin. System $y' = A(x)\, y$

$\mathcal{L}^{hom}$ Menge der Lösungen. Überprüfe zunächst, dass $\mathcal{L}^{hom}$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, genauer gesagt ein Untervektorraum von $Abb(I, \mathbb{K}^n)$ ist. Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{L}^{hom}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. z.zg. $\varphi + \psi \in \mathcal{L}^{hom}$, $\lambda \varphi \in \mathcal{L}^{hom}$.

$\varphi, \psi \in \mathcal{L}^{hom} \Rightarrow \forall t \in I : \varphi'(t) = A(t)\, \varphi(t)$ und $\psi'(t) = A(t)\psi(t) \Rightarrow \forall t \in I : (\varphi + \psi)'(t) =$

$\varphi'(t) + \psi'(t) = A(t)\varphi(t) + A(t)\psi(t) =$

$A(t)(\varphi+\psi)(t)$, $(\lambda\varphi)'(t) = \lambda\varphi'(t) = \lambda\cdot(A(t)\varphi(t))$

$= A(t)(\lambda\varphi)(t) \Rightarrow \varphi+\psi, \lambda\varphi \in \mathcal{L}^{hom}$

Zeige nun die Äquivalenz von (i) $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in \mathcal{L}^{hom}$ lin. unabh.

(ii) $\exists a \in I: \varphi_1(a), \dots, \varphi_m(a) \in \mathbb{K}^n$ lin. unabh. $(*)$

(iii) $\forall a \in I: \varphi_1(a), \dots, \varphi_m(a) \in \mathbb{K}^n$ lin. unabh.

für ein bel. $m \in \mathbb{N}$ und ein bel. Tupel $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ in $\mathcal{L}^{hom}$

„(iii) $\Rightarrow$ (ii)" ist offensichtlich. „(ii) $\Rightarrow$ (i)" Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ mit

$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k = 0$. Sei $a \in I$ mit der Eig. $(*)$. einsetzen $\Rightarrow$

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k(a) = 0_{\mathbb{K}^n} \overset{(ii)}{\Rightarrow} \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$$

„(ii) $\Rightarrow$ (iii)" Ang. $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ sind lin. unabh., aber es gibt ein $a \in I$, so dass $\varphi_1(a), \dots, \varphi_m(a)$ linear abh. $\Rightarrow \exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$, nicht alle null, mit

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k(a) = 0_{\mathbb{K}^n} \qquad \text{Sei } \psi = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k$$

VR-Eigenschaft $\Rightarrow \psi \in \mathcal{L}^{hom}$, außerdem $\psi(a) = 0_{\mathbb{K}^n}$. Auf Grund des Existenz- und Eindeutigkeitssatz ist die eind. best. Lsg. von $y' = A(x)\,y$ mit Wert $0_{\mathbb{K}^n}$ im Punkt a die Nullfunktion.

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k = \psi = 0 \quad \lightning \text{ zur linearen Unabhän-}$$

gigkeit von $\varphi_1, \dots, \varphi_m$.

Noch z. zg.: $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{L}^{hom} = n$

Existenz- und Eindeutigkeitssatz $\Rightarrow$ Für $1 \le k \le n$ gibt es für vorgeg. $a \in I$ eine eind. best. Lsg. $\psi_k : I \to \mathbb{K}^n$ mit $\psi_k(a) = e_k$ (= k-ter Einheitsv.)

$\psi_1(a), \dots, \psi_n(a)$ sind linear unabh. $\xRightarrow[\text{s.o.}]{\text{Äquivalenz}}$ $\psi_1, \dots, \psi_n$ sind linear unabh. in $\mathcal{L}^{hom}$ $\Rightarrow \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{L}^{hom} \ge n$.

Ang. $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{L}^{hom} > n$ $\Rightarrow$ Es gibt in $\mathcal{L}^{hom}$ ein linear unabh. System $\tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_{n+1}$ bestehend aus $n+1$ verschiedenen Elementen. Sei $a \in I$. Äquiv. $\rightarrow$

$\leq k \leq n$

g.

heitsv.)

$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{L}^{hom} \geq n$.

on ein

d aus $n+1$

Äquiv. $\Rightarrow$

$\tilde{\varphi}_1(a), \dots, \tilde{\varphi}_{n+1}(a)$ sind linear anabh. in $\mathbb{K}^n$

Dies ist wg. $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$ unmöglich. $\lightning$

also: $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{L}^{hom} = n$. $\square$

Fundamentalsysteme in Matrixschreibweise

Trägt man die Elemente eines Tupels von Lösungen als Spalten in eine Matrix ein, so erhält man eine Funktion $\Phi : I \to \mathcal{M}_{n,\mathbb{K}}$. Durch Vergleich der einzelnen Spalten sieht man, dass

$$\Phi'(t) \quad = \quad A(t)\Phi(t) \qquad \text{für alle} \quad t \in I$$

gilt. Sind die Spalten von $\Phi(t)$ für ein (und somit für alle) $t \in I$ linear unabhängig, so ist auch für die matrixwertige Funktion Φ die Bezeichung „Fundamentalsystem“ üblich.

aber
linear
, mit
k
dem $\Psi(a)$
Einden-
on $y' =$
ullfunktion.
aren Unabhän-

<u>Beispiel</u>: geg. $\omega \in \mathbb{R}^+$, betrachte das System $y_1' = -\omega y_2$, $y_2' = \omega y_1$.

in Matrixschreibweise: $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

bzw. $y' \overset{(*)}{=} Ay$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$

überprüfe: $\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}$, $\varphi_2(t) = \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix}$

sind Lösungen des Systems

$\varphi_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varphi_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind linear unabh. $\Rightarrow$ (φ_1, φ_2) ist Fundamentalsystem für (*).

ebenso die matrixw. Fkt. $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}$