Der Existenzsatz von Peano

Satz (4.1)

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ eine offene Teilmenge, $(a, b) \in D$ und $f : D \to \mathbb{K}^n$ eine stetige Funktion. Dann existiert für das durch $y' = f(x, y)$ und (a, b) definierte Anfangswertproblem mindestens eine Lösung, die jedes Kompaktum in beide Richtungen verlässt.

Existenzsatz von Peano

(Gesamtüberblick zum Beweis)

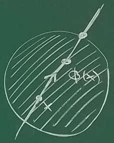
Satz v. Stone-Weierstrass

Approximation stetiger Funktionen

$\downarrow$

Brouwerscher Fixpunkt-satz: Jede stetige Abbildung $\varphi: \bar{B}^n \to \bar{B}^n$ hat einen Fixpunkt

$\downarrow$



$$g_x = \overline{x\phi(x)} = \{x + \lambda(\phi(x) - x) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Brouwerscher FPS für kompakte konvexe Mengen

Schauderscher FPS:
$(V, \| \, \|)$ normierter $\mathbb{R}$-VR
$A \subseteq V$ abgeschl. kompakt
$\Phi : A \to A$ stetig mit
$\Phi(A)$ <u>relativ kompakt</u>
$\Rightarrow$ Φ hat Fixpunkt

Satz von Arzelà-Ascoli: Kriterium für relative Kompaktheit in Funktionenräumen

lokaler Existenzsatz

Zornsches Lemma

(globaler) Existenzsatz von Peano

Satz (4.3)

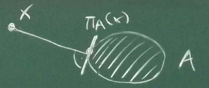
Die Einheitskugel $\bar{B}^n$ besitzt die Fixpunkteigenschaft.

Approximation durch abgeschlossene Teilmengen

Satz (4.9)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, abgeschlossene konvexe Teilmenge. Dann wird für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ das Minimum der Funktion $A \to \mathbb{R}_+$, $a \mapsto \|x - a\|$, in einem eindeutig bestimmten Punkt von A angenommen. Bezeichnen wir diesen jeweils mit $\pi_A(x)$, dann ist $\pi_A : \mathbb{R}^n \to A$ eine stetige Funktion.

Beweis von Satz 4.9



geg. $\emptyset \subsetneq A \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschl. konvex

z.zg. Es gibt eine eindeutig bestimmte Abb. $\pi_A : \mathbb{R}^n \to A$ so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $a \in A$ gilt:

$$\pi_A(x) = a \iff \forall b \in A : \|x - b\| \geq \|x - a\|$$

Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ setze $\gamma_x = \inf \{ \|x - a\| \mid a \in A \}$.

$(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ ist Minimalfolge für $x \iff \lim_{m \to \infty} \|x - a_m\| = \gamma_x$

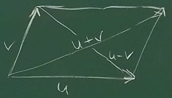
$a \in A$ Bestapproximation von $x \iff \|x - a\| = \gamma_x$

zeige: (1) Jede Minimalfolge für ein $x \in \mathbb{R}^n$ ist eine Cauchyfolge.

(2) Jede Min.-folge für ein $x \in \mathbb{R}^n$ ist konvergent,
und x besitzt eine Bestapprox.

(3) Die Bestapp. ist jeweils eindeutig

(4) Die Abb. $\pi_A : \mathbb{R}^n \to A$ ist stetig.



zu (1) Erinnerung Parallelogrammgl. $\|u-v\|^2 + \|u+v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Minimalfolge für x.

Für bel. $m, k \in \mathbb{N}$ wende die Parallelogrammgl. auf $u = x - a_m$ und $v = x - a_k$ ($\Rightarrow u - v = a_k - a_m$, $u + v = 2\left(x - \frac{1}{2}(a_m + a_k)\right)$)

$\Rightarrow$ erhalte $\|a_k - a_m\|^2 = 2\|x - a_m\|^2 + 2\|x - a_k\|^2 - 4\|x - \frac{1}{2}(a_m + a_k)\|^2$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ Minimalfolge $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall m \geq N :$

$\|x - a_m\|^2 - \gamma_x^2 < \frac{1}{4}\varepsilon$ A konvex $\Rightarrow \forall m, k \in \mathbb{N} : \frac{1}{2}(a_m + a_k) \in A$

$\Rightarrow \forall m, k \in \mathbb{N} : \|x - \frac{1}{2}(a_m + a_k)\|^2 \geq \gamma_x^2$

$$\forall m,k \geq N: \; 0 \leq \|a_m - a_k\|^2 = 2\|x - a_m\|^2 + 2\|x - a_k\|^2 - 4\|x - \tfrac{1}{2}(a_m + a_k)\|^2 < \tfrac{1}{2}\varepsilon + 2\gamma_x^2 + \tfrac{1}{2}\varepsilon + 2\gamma_x^2 - 4\gamma_x^2 = \varepsilon$$

<u>zu (2)</u> $\mathbb{R}^n$ vollständig $\Rightarrow$ Jede Cauchyfolge in $\mathbb{R}^n$ ist konvergent, also insb. jede Minimalfolge. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Minimalfolge. s.o. $\Rightarrow a = \lim\limits_{m \to \infty} a_m$ existiert. Stetigkeit der Norm $\Rightarrow$

$$\|a - x\| = \lim_{m \to \infty} \|a_m - x\| = \gamma_x \Rightarrow$$

a ist Bestapprox. von x (*)

Da

$= \|$

$\overset{s.o.}{\Rightarrow}$

Minimalfolge Sei $x \in \mathbb{R}$ und $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$

zu (3) Ang. $a, a' \in A$ sind beides Best-app. von $x \in \mathbb{R}^n$. Betrachte $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ geg. durch $a_m = \begin{cases} a & \text{falls } m \text{ ungerade} \\ a' & \text{falls } m \text{ gerade} \end{cases}$. klar: $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ ist Minimalfolge für x $\overset{s.o.}{\Longrightarrow}$ $(a_m)_m$ konvergiert gegen ein $c \in \mathbb{R}^n$. $\Rightarrow a = a'$

(*) Nachtrag: Da A abg. ist, liegt der Grenzwert jeder Minimalfolge in A.

zu (4) geg. Folge $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ im $\mathbb{R}^n$ mit Grenzwert $x \in \mathbb{R}^n$. z. zg.: $\lim\limits_{m \to \infty} \pi_A(x_m) = \pi_A(x)$, wobei $\pi_A(x')$ für jedes $x' \in \mathbb{R}^n$ jeweils die eind. bestimmte Bestapprox. von x' bezeichnet.

Notation: $\gamma_m = \gamma_{x_m} \quad \forall m \in \mathbb{N}$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall m \geq N : \|x_m - x\| < \varepsilon$

$\|x_m - a\| \leq \|x_m - x\| + \|x - a\|$

$\forall m \geq N : \gamma_m = \inf\{\|x_m - a\| \mid a \in A\} \overset{(**)}{\leq}$

$\inf\{\|x - a\| \mid a \in A\} + \|x_m - x\| < \varepsilon + \gamma_x$ und

$\gamma_x \leq \|x - \underbrace{\Pi_A(x_m)}_{\in A}\| \leq \|x - x_m\| + \|x_m - \Pi_A(x_m)\|$

$< \|x_m - \Pi_A(x_m)\| + \varepsilon \Rightarrow \gamma_x \leq \|x - \Pi_A(x_m)\| < \gamma_x + 2\varepsilon$

Da $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ bel. vorgeg. war, folgt $\lim\limits_{m \to \infty} \|x - \Pi_A(x_m)\| = \gamma_x$

$= \|x - \Pi_A(x)\| \Rightarrow (\Pi_A(x_m))_{m \in \mathbb{N}}$ ist Minimalfolge für x

$\overset{S.0}{\Longrightarrow} \lim\limits_{m \to \infty} \Pi_A(x_m) = \Pi_A(x)$. $\square$

$$< \|x_m - \pi_A(\underbrace{x_m}_{\in A})\| + \varepsilon \implies \gamma_x \le \|x - \pi_A(x_m)\| < \gamma_x + 2\varepsilon$$

(**) Sei $a_0 \in A$. $\inf\{\|x_m - a\| \mid a \in A\} \le \|x_m - a_0\| \le \|x_m - x\| + \|x - a_0\|$. $\to \inf\{\|x_m - a\| \mid a \in A\}$ ist untere Schranke für $\{\|x_m - x\| + \|x - a_0\| \mid a_0 \in A\}$ und das Infimum dieser Menge ist die größte untere Schr.

$$\implies \inf\{\|x_m - x\| + |x - a_0| \mid a_0 \in A\} \ge \inf\{\|x_m - a\| \mid a \in A\}.$$

Der Brouwersche Fixpunktsatz für konvexe Mengen

Lemma (4.10)

Seien X und Y homöomorphe topologische Räume. Besitzt X die Fixpunkteigenschaft, dann gilt dasselbe für Y.

Folgerung (4.11)

Jede nichtleere kompakte konvexe Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ besitzt die Fixpunkteigenschaft.

Beweis von Folgerung 4.11

geg. $\emptyset \subsetneq A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt konvex

A beschränkt $\Rightarrow \exists$ abgeschlossene Kugel $\overline{B} \supseteq A$

$\overline{B}^n$ (Einheitskugel) homöomorph zu $\overline{B}$ $\xRightarrow{\text{Lemma 4.10}}$

Brouwerscher FPS

$\overline{B}$ hat die Fixpunkteigenschaft

Sei $\phi : A \to A$. z.zg.: ϕ hat einen Fixpunkt

Betrachte die Abb. $(\phi \circ \pi_A)|_{\overline{B}} : \overline{B} \to A \subseteq \overline{B}$

Da diese Abb. stetig ist und $\overline{B}$ die Fixpunkteig. hat,

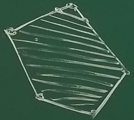
existiert ein $b \in B$ mit $(\phi \circ \pi_A)(b) = b$ $\quad (\phi \circ \pi_A)(\overline{B})$

$\subseteq A$, $b = (\phi \circ \pi_A)(b) \Rightarrow b \in A$

$(\phi \circ \pi_A)(b) = b$ und $\pi_A(b) = b$ (wegen $b \in A$)

$\Longrightarrow \phi(b) = b$, d.h. b ist Fixpunkt von ϕ. $\square$

Beispiel für eine konvexe Hülle:



Definition der konvexen Hülle

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum.
Ist $F = \{p_1, ..., p_n\} \subseteq V$ eine beliebige endliche Teilmenge,
dann bezeichnet man

$$\mathrm{conv}(F) \quad = \quad \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i p_i \;\middle|\; t_i \geq 0 \text{ für } 1 \leq i \leq n \;,\; \sum_{i=1}^{n} t_i = 1 \right\}$$

als konvexe Hülle der Menge F.

Die Schauder-Projektion

Proposition (4.12)

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum und $K \subseteq V$ eine nichtleere, kompakte Teilmenge. Dann gibt es für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ eine endliche Teilmenge $F \subseteq K$ und eine stetige Abbildung $\pi : K \to \mathrm{conv}(F)$ mit $\|\pi(x) - x\| < \varepsilon$ für alle $x \in K$.

Beweis von Prop. 4.12:

$(V, \|\cdot\|)$ normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum

$\emptyset \subsetneq K \subseteq V$ kompakt, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$

z.zg.: Es gibt eine endl. Teilmenge $F \subseteq K$ und eine stetige Abb. $\pi : K \to \operatorname{conv}(F)$, so dass $\|\pi(x) - x\| < \varepsilon \ \forall x \in K$

K kompakt, $(B_\varepsilon(x))_{x \in K}$ offene Überdeckung von $K \to \exists m \in \mathbb{N}, p_1, \ldots, p_m \in K$ mit $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B_\varepsilon(p_j)$. Für $1 \leq j \leq m$ setze

$\phi_j : K \to [0, \varepsilon]$, $x \mapsto \begin{cases} \varepsilon - \|x - p_j\| & \text{falls } x \in B_\varepsilon(p_j) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

und $\phi = \sum_{j=1}^{m} \phi_j$. Für jede $x \in K$ gibt es ein $j \in \{1, \dots, m\}$ mit $x \in B_\varepsilon(p_j)$. Daraus folgt $\phi_j(x) > 0$ und $\phi(x) > 0$. Definiere $\pi(x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\phi_j(x)}{\phi(x)} p_j$ für jedes $x \in K$. Wegen $\frac{\phi_j(x)}{\phi(x)} \geq 0$ und $\sum_{j=1}^{m} \frac{\phi_j(x)}{\phi(x)} = 1$ gilt jeweils $\pi(x) \in \operatorname{conv}(F)$, wobei $F = \{p_1, \dots, p_m\}$.

Nachrechnen ergibt außerdem $\|\pi(x) - x\| < \varepsilon \ \forall x \in K$

$\square$

Lemma (4.13)

Sei V ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum und $A \subseteq V$ eine nichtleere abgeschlossene Teilmenge. Sei $\phi \in \mathcal{C}(A, A)$ mit der Eigenschaft, dass $\overline{\phi(A)}$ kompakt ist. Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existiere ein $a \in A$ mit $\|\phi(a) - a\| < \varepsilon$. Dann besitzt ϕ einen Fixpunkt.

$\leq K$

$F)$,

deckung

mit

setze

Beweis von Lemma 4.13

$(V, \|\cdot\|)$ normierte $\mathbb{R}$-VR, $\emptyset \subsetneq A \subseteq V$ abg

$\phi : A \to A$ stetig, $\overline{\phi(A)} \subseteq V$ kompakt

Voraussetzung: $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \; \exists a \in A : \|\phi(a) - a\| < \varepsilon$

zzg: ϕ hat einen Fixpunkt

Vor $\Rightarrow \exists$ Folge $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in A mit

$\lim_{m \to \infty} \|\phi(a_m) - a_m\| = 0$ $\overline{\phi(A)}$ ist kompakt.

$(\phi(a_m))_{m \in \mathbb{N}}$ ist Folge in $\overline{\phi(A)}$ $\Rightarrow \exists$ Teilfolge

$(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ und einen Grenzwert a von $(\phi(a_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$

$\Rightarrow \lim_{k \to \infty} \|\phi(a_{n_k}) - a_{n_k}\| \overset{(*)}{=} 0 \Rightarrow \lim_{k \to \infty} a_{n_k} = a$

> 0

δ

$\frac{\ldots(x)}{\ldots(x)} = 1$

$\ldots, p_m\}.$

$x \in K$

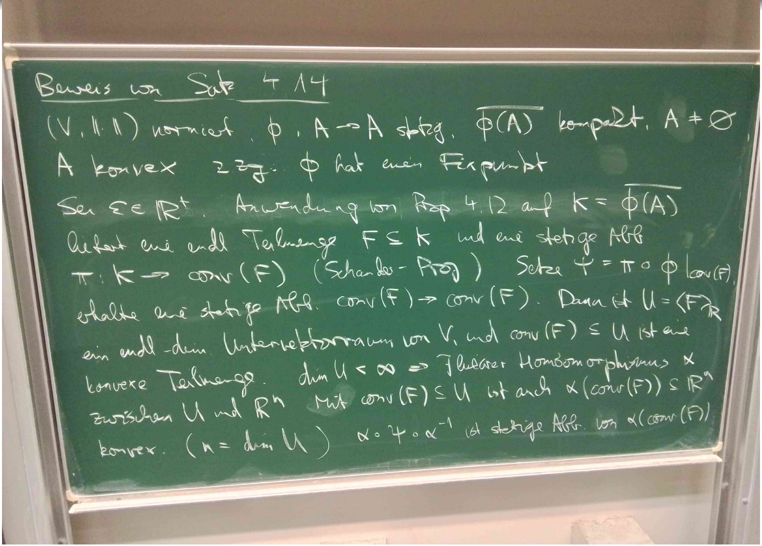
$\square$

Stetigkeit von $\Phi \Rightarrow \Phi(a) = \lim\limits_{k\to\infty} \Phi(a_{n_k}) \overset{(*)}{=}$
$\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a \Rightarrow a$ ist Fixpunkt von Φ. $\square$

Der Fixpunktsatz von Schauder

Satz (4.14)

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum und $A \subseteq V$ eine nichtleere konvexe abgeschlossene Teilmenge. Sei $\phi : A \to A$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, dass $\phi(A)$ relativ kompakt ist. Dann besitzt ϕ einen Fixpunkt.



Ergänzungen: Die Menge A ist konvex und abgeschlossen. Die Schauder-Projektion hat die Eigenschaft $\|\pi(x) - x\| < \varepsilon$ für alle $x \in K$, und auf Grund der Konvexität von A gilt die Inklusion $\mathrm{conv}(F) \subseteq A$.

konvex. ($n = \dim U$) $\alpha \circ \varphi \circ \alpha$ ist stetige Abb. …

auf sich selbst Satz 4.9 $\Rightarrow$ $\alpha \circ \Psi \circ \alpha^{-1}$ hat einen Fixpunkt x $\Rightarrow$ $y = \alpha^{-1}(x)$ ist Fixpunkt von Ψ

Aus $\Psi(y) = y$ und $\|\pi(y) - y\| < \varepsilon$ folgt $\|\phi(y) - y\| < \varepsilon$

Lemma 4.13 $\rightarrow$ ϕ hat einen Fixpunkt $\square$