

Satz (3.14)

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{K}^n$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt, und $(a, b) \in D$. Sei $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow \mathbb{K}^n$ eine Lösung des durch $y' = f(x, y)$ und (a, b) definierten Anfangswertproblems. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent.

- (i) Die Lösung φ ist maximal.
- (ii) Die Lösung φ verlässt in beide Richtungen jedes Kompaktum.

Satz (3.15)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $a \in I$, $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}_+$ beliebige Konstanten und $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft

$$\varphi(t) \leq \alpha + \gamma \int_a^t \varphi(s) ds \quad \text{für alle } t \in I.$$

Dann gilt $\varphi(t) \leq \alpha \exp(\gamma|t - a|)$ für alle $t \in I$.

Beweis von Satz 3.15

Sei $x_1 \in \mathbb{R}_+$ mit $x_1 > \alpha$ und $\varphi(t) = x_1 e^{\gamma(t-\alpha)}$

$\Rightarrow \varphi$ ist Lsg von $y' = \gamma y$ durch (α, x_1)

Ang. $\exists t_1 \in \mathbb{R}, t_1 \geq \alpha$ mit $\varphi(t_1) \geq \varphi(t_1)$.

$\varphi(\alpha) = \alpha < x_1 = \varphi(\alpha)$. Betrachte $t_2 = \min \{t \in [\alpha, t_1] \mid$

$\varphi(t) \geq \varphi(t)\}$ $\Rightarrow t_2 \in]\alpha, t_1]$ (auf Grund der Vor.)

andererseits: $\varphi(t_2) \leq \alpha + \gamma \int_{\alpha}^{t_2} \varphi(s) ds \leq$

$$x_1 + \gamma \int_{\alpha}^{t_2} \varphi(s) ds = \varphi(t_2) \quad \downarrow$$

$\Rightarrow \varphi(t) < \varphi(t) = x_1 e^{\gamma(t-\alpha)} \quad \forall t \in \mathbb{I} \cap]\alpha, +\infty[$

$x_1 > x$ w. bel. gew. $\rightarrow p(t) \leq x \cdot e^{\gamma(t-a)} \quad \forall t \in I$ mit $t \geq a$

Beweis für $t \leq a$ analog

□

Satz (3.16)

Es sei $I =]\alpha, \beta[$ ein offenes Intervall, $D = I \times \mathbb{K}^n$ und $f : D \rightarrow \mathbb{K}^n$ eine stetige Funktion, die einer lokalen Lipschitz-Bedingung genügt und **linear beschränkt** ist, was bedeuten soll, dass stetige Funktionen $\rho, \sigma : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit

$$\|f(x, y)\|_\infty \leq \rho(x)\|y\|_\infty + \sigma(x)$$

für alle $(x, y) \in D$ existieren. Dann existiert für jeden Punkt (a, b) die Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(x, y)$ **auf dem gesamten Intervall I** .

Beweis von Satz 3.16: $I =]\alpha, \beta[$

$D = I \times K^n$, $f: D \rightarrow K^n$ stetig,

$\rho, \sigma: I \rightarrow \mathbb{R}_+$ stetige Fkt., so dass

$$\|f(x, y)\|_\infty \leq \rho(x) \|y\|_\infty + \sigma(x)$$

geg: $J =]\alpha, \beta_1[\subseteq I$, $\varphi: J \rightarrow K^n$

maximale Lösung Ang. $J \neq I$

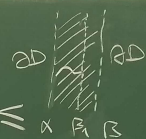
O.B.d.A. $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta_1 < \beta$

Sei $t \in]\alpha, \beta_1[\Rightarrow$

$$\|\varphi(t)\|_\infty = \|\varphi(\alpha) + \int_\alpha^t f(s, \varphi(s)) ds\|_\infty \leq$$

(2)

$$\|b\|_\infty + \int_a^t \|f(s, \varphi(s))\|_\infty ds \leq \text{AD}$$

$$\|b\|_\infty + \int_a^t (\sigma(s) + \rho(s) \|\varphi(s)\|_\infty) ds \leq \text{AD}$$


$$\left(\|b\|_\infty + \int_a^t \sigma(s) ds \right) + m \int_a^t \|\varphi(s)\|_\infty ds \text{ wobei}$$

$m = \max \{ \rho(s) \mid s \in [\alpha, \beta_1] \}$ Gronwall-Lemma

$$\Rightarrow \|\varphi(t)\|_\infty \leq \left(\|b\|_\infty + \int_a^{\beta_1} \sigma(s) ds \right) e^{m|t-a|}$$

$\Rightarrow \limsup_{t \rightarrow \beta_1} \|\varphi(t)\|_\infty$ ist nicht unendlich

Im Fall $\beta < +\infty$ ist der Abstand zwischen $(t, \varphi(t))$ und AD für $t \rightarrow \beta_1$ durch $\beta - \beta_1$ nach unten beschränkt. Im Fall $\beta = +\infty$ ist

$\lim_{t \rightarrow \beta_1} d((t, \varphi(t)), \text{AD}) = 0$ erst recht nicht erfüllt

also: Der rechte Teil der Lösungskurve

$\Gamma(\varphi)$ ist also relativ kompakt in D .

Prop. 3.12 $\rightarrow \varphi$ ist nicht maximal $\Downarrow \square$

Beispiele für maximale Lösungen

(1) $D = \mathbb{R}^2$, $y' = x y^2$, $(0, 2) \in D$

Betrachte die Lsg $\varphi:]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{2}{1-t^2}$

$$\lim_{t \rightarrow -1} |\varphi(t)| = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow 1} |\varphi(t)| = +\infty \rightarrow$$

Lösung ist maximal

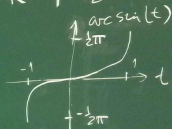
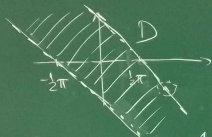
(2) Betrachte dieselbe DGL, aber mit dem Startpunkt $(-2, -\frac{2}{3}) \rightarrow$ erhalte die Lösung

$$\varphi:]-\infty, -1[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{2}{1-t^2}$$

Nach rechts ist das Verhalten wie bei (1). Nach links verlässt die Lsg. jedes Kompaktum, weil die linke Grenze unendlich ist

≤

(3) Betrachte die DGL $y' = \frac{1}{\cos(x+y)} - 1$ auf dem dem Definitionsbereich $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{1}{2}\pi < x+y < \frac{1}{2}\pi\}$



$$\partial D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y = -\frac{1}{2}\pi\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y = \frac{1}{2}\pi\}$$

Betrachte die Log $\varphi:]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \arcsin(t) - t$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow -1} (t + \varphi(t)) = \lim_{t \rightarrow -1} \arcsin(t) = -\frac{1}{2}\pi$$

$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow -1} d((t, \varphi(t))) = 0$, da sich die Lösungskurve dem linken Rand annähert

Entsprechendes gilt für den rechten Rand, wegen

$$\lim_{t \rightarrow 1} (t + \varphi(t)) = \lim_{t \rightarrow 1} \arcsin(t) = \frac{1}{2} \pi$$

Also ist die Lösung auch hier maximal.

Anwendung von Satz 3.16:

Betrachte die DGL $y' = \frac{x^3 y^3}{1 + y^2} \sin(xy^2) + e^x \cos(x^2 y)$

auf $D = \mathbb{R}^2$. Sei $(a, b) \in D$ beliebig.

$$\left| \frac{y^3}{1 + y^2} \right| \leq 1, |\sin(xy^2)| \leq 1, |\cos(x^2 y)| \leq 1 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

→ Der Ausdruck der rechten Seite der DGL ist linear beschränkt durch $A(x) = |x|^3$ und $\sigma(x) = e^x$ → Jede Lösung der DGL ist auf ganz \mathbb{R} definiert.

Satz (4.1)

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ eine offene Teilmenge, $(a, b) \in D$ und $f : D \rightarrow \mathbb{K}^n$ eine **stetige** Funktion. Dann existiert für das durch $y' = f(x, y)$ und (a, b) definierte Anfangswertproblem **mindestens eine Lösung**, die jedes Kompaktum in beide Richtungen verlässt.

Existenzsatz von Peano

(Gesamtüberblick zum Beweis)

Satz v.
Stone-Weierstrass

Approximation stetiger
Funktionen

Brouwerscher Fixpunkt-
satz: Jede stetige
Abbildung $\varphi: \overline{B}^n \rightarrow \overline{B}^n$
hat einen Fixpunkt



$$\mathcal{J}_x = \overline{x\varphi(x)} = \{x + \lambda(\varphi(x) - x) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Brouwerscher FPS
für kompakte kon-
vexe Mengen



Schauderscher FPS:
(V, ||) normierter \mathbb{R} -VR
 $A \subseteq V$ abgeschlossen kompakt
 $\phi: A \rightarrow A$ stetig mit
 $\phi(A)$ relativ kompakt
 $\Rightarrow \phi$ hat Fixpunkt

Satz von Ascoli-
Arzeli: \mathbb{R} -Vektorraum
für relative Kom-
paktigkeit in Funktionen-
räumen



lokaler Existenz-
satz



(globaler) Existenzsatz
von Peano

Zornsches
Lemma



Notation:

- $\|\cdot\|$ euklidische Norm (2-Norm) auf dem \mathbb{R}^n
- \bar{B}^n abgeschlossene Einheitskugel $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$
- B^n offene Einheitskugel $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$
- S^{n-1} Einheitskugel $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$

Definition (4.2)

Man sagt, ein topologischer Raum X besitzt die **Fixpunkteigenschaft**, wenn jede stetige Abbildung $\phi : X \rightarrow X$ mindestens einen **Fixpunkt** hat, also $\phi(x) = x$ für mindestens ein $x \in X$ erfüllt ist.

Satz (4.3)

Die Einheitskugel \bar{B}^n besitzt die Fixpunkteigenschaft.

Der Satz kann unmittelbar zurückgeführt werden auf die Aussage

Proposition (4.4)

Es gibt keine stetige Abbildung $\psi : \bar{B}^n \rightarrow S^{n-1}$ mit $\psi|_{S^{n-1}} = \text{id}_{S^{n-1}}$.

Satz (4.5)

Sei X ein kompakter Hausdorff-Raum und A eine Unteralgebra von $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, die die konstanten Funktionen auf X als Untervektorraum enthält. Außerdem setzen wir voraus:

- Die \mathbb{R} -Algebra A **trennt Punkte**, d.h. für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ gibt es ein $f \in A$ mit $f(x) \neq f(y)$.

Dann ist A in $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ eine **dichte** Teilmenge. Dies bedeutet: Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und $g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ gibt es ein $f \in A$ mit der Eigenschaft, dass $|g(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in X$ erfüllt ist.

Folgerung (4.6)

Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein endliches abgeschlossenes Intervall und $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein Polynom $p \in \mathbb{R}[x]$, so dass $|g(x) - p(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in [a, b]$ erfüllt ist.

Zwei Einzelschritte zum Brouwerschen Fixpunktsatz

Lemma (4.7)

Wenn eine **stetige** Abbildung $\psi : \bar{B}^n \rightarrow S^{n-1}$ mit $\psi|_{S^{n-1}} = \text{id}_{S^{n-1}}$ existiert, dann gibt es auch eine **stetig differenzierbare** Abbildung mit dieser Eigenschaft.

Lemma (4.8)

Es gibt **keine** stetig differenzierbare Abbildung $\psi : \bar{B}^n \rightarrow S^{n-1}$ mit $\psi|_{S^{n-1}} = \text{id}_{S^{n-1}}$.

Beweis von Lemma 4.8 :

Angenommen $\psi: \bar{B}^n \rightarrow S^{n-1}$ mit
der Eigenschaft $\psi|_{S^{n-1}} = \text{id}_{S^{n-1}}$.

Definiere $\phi(x) = \psi(x) - x$ und für jedes
 $t \in [0, 1]$ jeweils $\psi_t(x) = x + t\phi(x) =$
 $(1-t)x + t\psi(x) \rightarrow \psi_0 = \text{id}_{\bar{B}^n}$ und

$\psi_1 = \psi$. Überprüfe: Es gibt ein $\gamma \in$

\mathbb{R}^+ , so dass für alle $t \in [0, \gamma^{-1}]$
jeweils ψ_t injektiv ist und $\psi_t'(x) =$
 $-\text{id}_{\mathbb{R}^n} + t\phi'(x)$ invertierbar ist.

Wähle $t_0 \in]0, \delta^{-1}[$ so, dass

$\varphi'(t)$ invertierbar $\forall t \in]0, t_0]$

Satz über die lokale Umkehrbarkeit

$\Rightarrow \varphi_t$ bildet B_n bijektiv auf eine
offene Teilmenge $G_t \subseteq B^n$ ab

Man kann zeigen: Für jedes t gilt jeweils

$G_t = B^n$, d.h. φ_t ist Bij. $\bar{B}_n \rightarrow \bar{B}_n$

Für alle $t \in]0, 1]$ betrachte nun das

$$\text{Integral } I(t) = \int_{B^n} \det \varphi_t'(x) dx$$

(„Volumen“ der Bildmenge G_t)

Für alle $t \in [0, 1]$ gilt jeweils

$$I(t) = \int_{\mathbb{B}^n} \det \Psi_t'(x) dx = \int_{\Psi_t(\mathbb{B}^n)} 1 dx =$$

$$\text{vol}(\Psi_t(\mathbb{B}^n)) = \text{vol}(\mathbb{B}^n) = \pi^{n/2} / \Gamma(\frac{n}{2} + 1)$$

↑ Transformationsformel

Da die Funktion $I(t)$ eine Polynomfunktion in t ist (!), die auf einem positiven Teilintervall konstant ist, muss sie auf ganz $[0, 1]$ konstant sein. andererseits: $I(1) = \text{vol}(\Psi_1(\mathbb{B}^n)) = \text{vol}(\Psi(\mathbb{B}^n)) = \text{vol}(S^{n-1}) = 0 \quad \Downarrow \quad \square$

(Bitte beachten Sie die [Hinweise](#) auf der nächsten Seite.)

- Dass das n -dimensionale Volumen $I(1) = \text{vol}(S^{n-1})$ gleich null ist, wird im Skript genauer ausgeführt, indem dort gezeigt wird, dass die Funktionaldeterminante $\det \psi'(x)$ auf B^n konstant null ist. Es ist darauf zurückzuführen, dass die Spaltenvektoren $\partial\psi/\partial x_j(x)$ von $\psi'(x)$ alle in der **Tangentialebene** an die Einheitssphäre S^{n-1} im Punkt $\psi(x) \in S^{n-1}$ enthalten und somit linear abhängig sind.
- Leider konnte ich aus Zeitgründen einen Punkt im Beweis („Man kann zeigen...“) nicht ausführen, der auf den ersten Blick nicht besonders plausibel erscheint: die Gleichung $G_t = B^n$ für alle $t \in [0, t_0]$. Diese kommt folgendermaßen zu Stande. Es genügt zu zeigen, dass jeder Punkt $q \in \bar{B}^n \setminus G_t$ in S^{n-1} enthalten ist. Denn einerseits muss $G_t \subseteq B^n$ wegen $\psi_t|_{S^{n-1}} = \text{id}_{S^{n-1}}$ gelten. Wäre andererseits $q \in B^n$, aber nicht in G_t enthalten, dann würde aus der Annahme $q \in S^{n-1}$ folgen, was aber wegen $q \in G_t = \psi_t(B^n)$ und $\psi_t(q) = q$ erneut der Injektivität von ψ_t widersprechen würde.

- Sei als $q \in \bar{B}^n \setminus G_t$, und zeigen wir $q \in S^{n-1}$. Sei $p \in G_t$ beliebig gewählt. Dann schneidet der Rand ∂G_t die Verbindungsstrecke $[p, q]$ in einem Punkt p' . Die Bildmenge $\psi_t(\bar{B}^n)$ ist kompakt, also abgeschlossen, enthält somit ∂G_t . Es gibt also ein $x \in \bar{B}^n$ mit $\psi_t(x) = p'$.
- Andererseits enthält G_t als offene Menge den Randpunkt p' nicht. Daraus folgt $x \notin B^n$ und $x \in S^{n-1}$. Auf Grund der Gleichung $\psi_t|_{S^{n-1}} = \text{id}_{S^{n-1}}$ folgt daraus wiederum $p' \in S^{n-1}$. Nun ist B^n aber konvex, und aus $p, q \in B^n$ würde auch $p' \in B^n$ folgen. So aber muss q in S^{n-1} liegen.