Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf

Satz (3.10)

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{K}^n$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt, und $(a, b) \in D$. Dann besitzt das durch $y' = f(x, y)$ und (a, b) definierte Anfangswertproblem eine eindeutige maximale Lösung.

Wiederholung: Grundlagen Topologie

(1) Satz von Heine-Borel:
Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist. (Dasselbe gilt für Teilmenge von $\mathbb{C}^n$ oder von $\mathbb{R}^m \times \mathbb{C}^n$.)

(2) Ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, dann bezeichnet man eine Teilmenge $A \subseteq X$ als relativ kompakt, wenn ihr Abschluss $\bar{A}$ in $(X, \mathcal{T})$ kompakt ist.

(3) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$, aufgefasst als topologischer Raum mit der von $\mathbb{R}^n$ induzierten Topologie. Eine Teilmenge $A \subseteq D$ ist genau dann relativ kompakt in D, wenn sie beschränkt ist und der Abschluss $\bar{A}$ von A in $\mathbb{R}^n$ (!) in D enthalten ist.

Relative Kompaktheit von Lösungskurven

Definition (3.11)

Sei $y = f(x, y)$ ein System von n DGLs erster Ordnung mit einem Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$, sei $(a, b) \in D$, und sei $\varphi : I \to \mathbb{K}^n$ eine Lösung des entsprechenden Anfangswertproblems. Wir sagen, die Lösung φ verlässt nach rechts jedes Kompaktum, wenn der rechts von a liegende Graph

$$\Gamma_+(\varphi) \quad = \quad \{(t, \varphi(t)) \in D | t \geq a\}$$

in D nicht relativ kompakt ist. Entsprechend sagen wir, φ verlässt nach links jedes Kompaktum, wenn

$$\Gamma_-(\varphi) \quad = \quad \{(t, \varphi(t)) \in D \mid t \leq a\}$$

in D nicht relativ kompakt ist. Man sagt, jedes Kompaktum wird in beiden Richtungen verlassen, wenn die Mengen $\Gamma_\pm(\varphi)$ beide in D nicht relativ kompakt sind.

geg.: $D \subseteq \mathbb{K}^n$, $\mathcal{J}$ von $\mathbb{K}^n$ auf D induzierte Topologie
$A \subseteq D$ Teilmenge

Beh.: A relativ kompakt in $(D, \mathcal{J})$ $\Longleftrightarrow$ $\bar{A} \subseteq D$ und A beschränkt, wobei $\bar{A}$ = Abschluss von A im $\mathbb{K}^n$

„$\Leftarrow$" A beschränkt $\Rightarrow$ $\bar{A}$ beschränkt (denn: $A \subseteq \bar{B}_r(0_{\mathbb{K}^n})$
$\Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}_r(0_{\mathbb{K}^n})$), außerdem abgeschlossen in $\mathbb{K}^n$
Heine-Borel $\Rightarrow$ $\bar{A}$ kompakt in $\mathbb{K}^n$ letzte Stunde
$\overset{\bar{A} \subseteq D}{\Longrightarrow}$ $\bar{A}$ kompakt in D. $\bar{A}$ ist auch der Abschluss von A in $(D, \mathcal{J})$. insgesamt: A relativ kompakt in $(D, \mathcal{J})$

$\Rightarrow$ A kompakt in D. A ist auch der Abschluss von A in (D, J) insgesamt: A relativ kompakt in (D, J)

„$\Rightarrow$" Vor. A relativ kompakt in (D, J) $\Rightarrow$ $\bar{A}^{(D)}$ ist kompakt in (D, J), wobei $\bar{A}^{(D)}$ = Abschluss von A in (D, J)

Ang. $\bar{A} \not\subseteq D \Rightarrow \bar{A}^{(D)} \subsetneq \bar{A} \Rightarrow \bar{A}^{(D)}$ ist nicht abgeschlossen in $\mathbb{K}^n$ Heine-Borel $\Rightarrow \bar{A}^{(D)}$ nicht kompakt in $\mathbb{K}^n$ $\overset{\text{letzte Stunde}}{\Longrightarrow}$ $\bar{A}^{(D)}$ nicht kompakt in (D, J) ↯

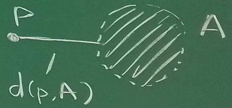
also: $\bar{A}^{(D)} = \bar{A} \Rightarrow \bar{A}$ kompakt $\Rightarrow \bar{A}$ beschränkt

$\Rightarrow$ A beschränkt

Def: Abstand eines Punktes $p \in \mathbb{K}^n$ von einer Teilmenge $A \subseteq \mathbb{K}^n$

$$d(p,A) = \inf\{\|a-p\|_\infty \mid a \in A\}$$

Man kann zeigen, dass im Fall $A \neq \emptyset$ die Funktion $\mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$, $p \mapsto d(p,A)$ stetig ist.



Kriterium für die relative Kompaktheit

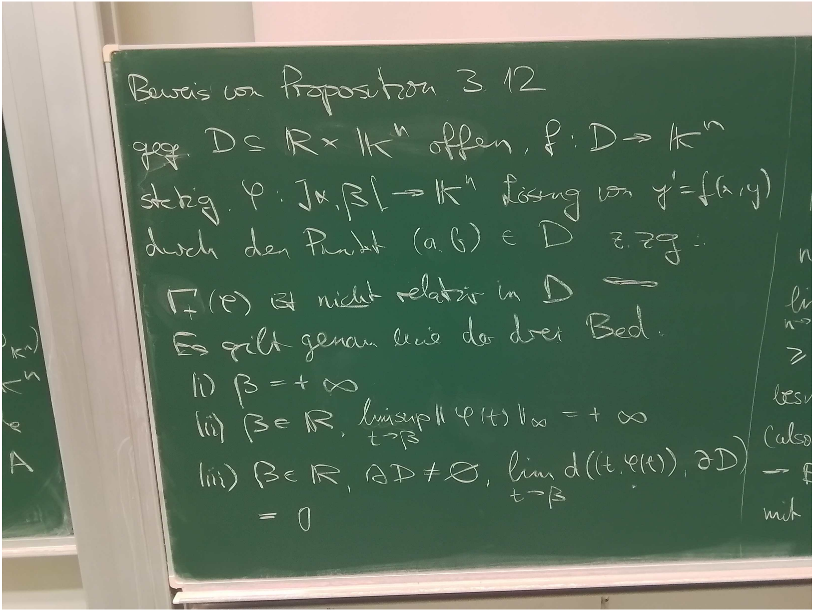
Proposition (3.12)

Seien die Bezeichnungen wie in der vorherigen Definition gewählt, wobei wir aber voraussetzen, dass die Teilmenge D offen in $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ ist. Sei $I =]\alpha, \beta[$ das Definitionsintervall von φ, mit $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $\beta = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ und $\alpha < \beta$. Genau dann verlässt φ nach rechts jedes Kompaktum, wenn mindestens eine der folgenden drei Bedingungen erfüllt ist.

(i) $\beta = +\infty$

(ii) $\beta \in \mathbb{R}$ und $\limsup_{t \to \beta} \|\varphi(t)\|_\infty = +\infty$

(iii) $\beta \in \mathbb{R}$, $\partial D \neq \varnothing$ und $\lim_{t \to \beta} d((t, \varphi(t)), \partial D) = 0$



Korrektur 5. Zeile: „... ist nicht relativ kompakt...“

„$\Rightarrow$" Ann.: $\Gamma_+(\varphi)$ ist nicht relativ kompakt

$\beta \in \mathbb{R}$ und $\limsup\limits_{t\to\beta} \|\varphi(t)\|_\infty < +\infty$. (*)

Nehme an, dass $\lim\limits_{t\to\beta} d((t,\varphi(t)),\partial D) = 0$ ebenfalls
nicht erfüllt ist $\Rightarrow$ $\exists$ Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \beta$ und ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} d((t_n,\varphi(t_n)),\partial D)$
$\geq \varepsilon \ \forall n \in \mathbb{N}$ $\{\|\varphi(t_n)\|_\infty \mid n\in\mathbb{N}\}$ ist wegen (*)
beschränkt $\Rightarrow$ $(t_n,\varphi(t_n))$ liegt in einer beschränkten
(also auch in einer kompakten) Teilmenge von $\mathbb{R}\times\mathbb{K}^n$
$\to$ Es gibt eine konvergente Teilfolge $((t_{n_k},\varphi(t_{n_k})))_{k\in\mathbb{N}}$
mit Grenzwert (β, y_β) für ein $y_\beta \in \mathbb{K}^n$.

die

stetig

Aus $d\big((t_{n_k}, \varphi(t_{n_k})), \partial D\big) \geq \varepsilon \ \forall k \in \mathbb{N}$
folgt $d\big((\beta, y_\beta), \partial D\big) \geq \varepsilon$ andererseits:
$(\beta, y_\beta) \in \partial \underline{D}$ weil $(t_{n_k}, \varphi(t_{n_k})) \in D \ \forall k \in \mathbb{N}$
gilt und (β, y_β) der Grenzwert ist $\Longrightarrow$
$d\big((\beta, y_\beta), \partial D\big) = 0$ ↯

„$\Longleftarrow$" durch Kontraposition. Ann: $\Gamma_+(\varphi)$ ist relativ kompakt in $D \Rightarrow \overline{\Gamma}_+(\varphi)$ ist kompakt und $\overline{\Gamma}_+(\varphi) \subseteq D$.
Da $\overline{\Gamma}_+(\varphi)$ als kompakte Menge beschränkt ist, können (i) und (ii) nicht zutreffen. Angenommen: (iii) ist erfüllt. Wähle eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $]\alpha, \beta[$

mit $\lim_{n\to\infty} t_n = \beta$. Wegen (iii) gilt dann $\lim_{n\to\infty} d((t_n,\varphi(t_n)),\partial D)$
$= 0$. Da $\{(t_n,\varphi(t_n)) \mid n\in\mathbb{N}\}$ in der kompakten Menge $\overline{\Gamma_+}(\varphi)$
enthalten ist, existiert wiederum eine konvergente Teilfolge
$(t_{n_k},\varphi(t_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert (β, y_β), $y_\beta \in \mathbb{K}^n$.

$\Rightarrow d((\beta,y_\beta),\partial D) = 0 \Rightarrow (\beta,y_\beta)\in\partial D$, da ∂D abg. in $\mathbb{R}\times\mathbb{K}^n$

andererseits: $(\beta,y_\beta)\in\overline{\Gamma_+}(\varphi)$, da die Teilfolge in $\Gamma_+(\varphi)$ verläuft $\overset{\overline{\Gamma_+}(\varphi)\subseteq D}{\Longrightarrow} (\beta,y_\beta)\in D \overset{D \text{ offen}}{\Longrightarrow} (\beta,y_\beta)$ liegt im Inneren von D ↯ zu $(\beta,y_\beta)\in\partial D$

□

Relative Kompaktheit $\Rightarrow$ Fortsetzbarkeit

Lemma (3.13)

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{K}^n$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt, und $(a, b) \in D$. Sei $\varphi :]\alpha, \beta[\to \mathbb{K}^n$ eine Lösung des durch $y' = f(x, y)$ und (a, b) definierten Anfangswertproblems. Ist $\Gamma_+(\varphi)$ in D relativ kompakt, dann ist φ nach rechts fortsetzbar, d.h. es gibt ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und eine Fortsetzung $\hat{\varphi} :]\alpha, \beta + \varepsilon[\to \mathbb{K}^n$ von φ.

Beweis von Lemma 3.13

geg.: $y' = f(x,y)$, f genügt lokaler Lipschitz-Bed.
$(a,b) \in D$, wobei D Def. ber. von f
$\varphi :]\alpha, \beta[\to \mathbb{K}^n$ Lsg. der DGL mit $\varphi(a) = b$
Vor.: $\Gamma_+(\varphi) = \{(t, \varphi(t)) \mid t \geq a\}$ in D relativ kompakt
z.zg.: φ ist nach rechts fortsetzbar

Aus der Vor. folgt $\beta \in \mathbb{R}$, und dass $\overline{\Gamma_+}(\varphi)$ kompakte
Teilmenge von $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ ist, sowie $\overline{\Gamma_+}(\varphi) \subseteq D$
Maximumsprinzip $\Rightarrow$ f ist auf $\overline{\Gamma_+}(\varphi)$ durch eine

konstante $K \in \mathbb{R}^+$ beschränkt

$\forall t \in]\alpha, \beta[: \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \Rightarrow \forall t \in]\alpha, \beta[$

$\varphi(t) \overset{(**)}{=} b + \int_a^t f(s, \varphi(s))\, ds \Rightarrow \| \varphi(s) - \varphi(t) \|_\infty =$

$\| \int_s^t f(u, \varphi(u))\, du \|_\infty \underset{(*)}{\leq} \int_s^t K\, du = K(t-s)$ für alle

$s, t \in]\alpha, \beta[$ mit $s \leq t$

<u>Beh</u>: Der Grenzwert $\lim\limits_{t \to \beta} \varphi(t)$ existiert im $\mathbb{K}^n$.

Sei $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $[a, \beta[$. $\{(t_n, \varphi(t_n)) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist enthalten im kompakten $\overline{\Gamma_+}(\varphi) \Rightarrow \exists$ konvergente Teilfolge $((t_{n_k}), \varphi(t_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$. Außerdem ist $(t_n, \varphi(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-folge, denn: Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert $\Rightarrow (t_n)_{n \in \mathbb{N}}$

ist Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq N :$

$|t_n - t_m| < \frac{\varepsilon}{K}$ s.o. $\Rightarrow \| \varphi(t_n) - \varphi(t_m) \|_\infty$

$\leq K \cdot |t_n - t_m| < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon \quad \forall m, n \geq N$

$\Rightarrow \| (t_n, \varphi(t_n)) - (t_m, \varphi(t_m)) \|_\infty < \varepsilon \quad \forall m, n \geq N$

Jede Cauchyfolge mit einer konvergenten Teilfolge konvergiert $\Rightarrow (t_n, \varphi(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen einen Grenzwert (β, y_β) mit $y_\beta \in \mathbb{K}^n$. Aufgrund der Eigenschaft $(*)$ ist der Grenzwert y_β für jede Folge $(t_n')_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \to \infty} t_n' = \beta$ derselbe.

lokaler Existenzsatz 3.9 $\Rightarrow \exists$ ein Lsg

$\psi :]\beta-\varepsilon, \beta+\varepsilon[\to \mathbb{K}^n$ der DGL mit $\psi(\beta) = y_\beta$

wobei o.B.d.A. $\beta - \varepsilon \geq \alpha$

Definiere nun $\tilde{\varphi} :]\alpha, \beta+\varepsilon[\to \mathbb{K}^n$ durch

$$\tilde{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{für } t < \beta \\ y_\beta & \text{für } t = \beta \\ \psi(t) & \text{für } t > \beta \end{cases}$$

Stetigkeit $\Rightarrow \tilde{\varphi}$ erfüllt die Gleichung (**) nicht nur auf $]\alpha, \beta[$, sondern auch im Punkt β $\Rightarrow$ linksseitige Ableitung von $\tilde{\varphi}(t)$ $= f(\beta, y_\beta)$, rechtsseitige Abl. von $\tilde{\varphi}(t)$ ebenfalls $= f(\beta, y_\beta)$, da ψ Lsg. auf $]\beta-\varepsilon, \beta+\varepsilon[$

f

$) = y_\beta$

h

lung

und im

$n\ \tilde\varphi(t)$

$\tilde\varphi(t)$ eben-

$\beta+\varepsilon[$

$\Rightarrow$ $\tilde\varphi$ ist im Punkt β diff'bar und $\tilde\varphi'(\beta) = f(\beta, y_\beta)$

Da φ und ψ Lsg. der DGL sind, ist $\tilde\varphi$ insgesamt eine Lsg. der DGL auf ganz $]\alpha, \beta+\varepsilon[$, und eine Fortsetzung von φ. $\square$

Satz über das Randverhalten von Lösungen

Satz (3.14)

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{K}^n$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt, und $(a, b) \in D$. Sei $\varphi :]\alpha, \beta[\to \mathbb{K}^n$ eine Lösung des durch $y' = f(x, y)$ und (a, b) definierten Anfangswertproblems. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent.

(i) Die Lösung φ ist maximal.

(ii) Die Lösung φ verlässt in beide Richtungen jedes Kompaktum.

N:

N

$n \geq N$

Teil-

kon-

β) mit

(*)

$(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Beweis von Satz 3.14

z.zg.: Äquivalenz der Aussagen

(i) Lösung φ maximal

(ii) φ verlässt in beide Richtungen jedes Kompaktum

„(i) $\Rightarrow$ (ii)" folgt direkt aus Lemma 3.13

„(ii) $\Rightarrow$ (i)" Annahme: $\varphi :]\alpha, \beta[\to \mathbb{K}^n$ nach rechts fortsetzbar. Sei $\tilde{\varphi}$ eine maximale Lsg. definiert auf $]\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}[$. Eindeutigkeit $\Rightarrow$ $\tilde{\varphi}|_{]\alpha,\beta[} = \varphi$ und $\beta < \tilde{\beta}$

$\Gamma_+(\varphi) \subseteq \{(t, \tilde{\varphi}(t)) \mid a \leq t \leq \beta\}$ Da $\tilde{\varphi}$ stetig ist und $[\alpha, \beta]$ ein kompaktes Intervall, ist die Menge rechts kompakt $\Rightarrow$ $\overline{\Gamma}_+(\varphi)$ ist kompakt $\Rightarrow$ $\Gamma_+(\varphi)$ ist relativ kompakt $\Rightarrow$ (ii) nicht erfüllt $\square$