Der Eindeutigkeitssatz

Satz (3.6)

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$, $(a, b) \in D$, und sei $f : D \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt.

- Sind $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}^n$ beides Lösungen des durch $y' = f(x, y)$ und (a, b) definierten Anfangswertproblems auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, dann stimmen sie auf ganz I überein.
- Desweiteren besitzt das Anfangswertproblem höchstens eine maximale Lösung.

Banachräume bestehend aus Funktionen

Lemma (3.7)

Sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein endliches, abgeschlossenes Intervall, und sei V ein Banachraum. Sei außerdem $n \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{C}(I, V)$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der stetigen Funktionen $f : I \to V$. Dann ist $\mathcal{C}(I, V)$ mit der Norm $\|f\|_\infty = \sup\{\, \|f(x)\| \mid x \in I\}$ ein Banachraum.

Beweis von Lemma 3.7 (Forts.) (Vollständigkeit)

geg. eine Cauchyfolge $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{C}(I, V)$

zzg. Die Folge besitzt einen Grenzwert $f \in \mathcal{C}(I, V)$.

Sei $x \in I$. Dann ist $(f_m(x))_{m \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in V, denn:

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Vor. $\Rightarrow \exists K \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq N : \|f_m - f_n\|_\infty < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall m, n \geq N : \|f_m(x) - f_n(x)\| = \|(f_m - f_n)(x)\| \leq \|f_m - f_n\|_\infty < \varepsilon$

V ist Banachraum $\Rightarrow (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ hat in V einen Grenzwert, bezeichne diesen mit $f(x)$. Wir erhalten eine Fkt. $f : I \to V$ mit der Eigenschaft $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ in V, für jedes $x \in I$.

noch zzg: $f \in \mathcal{C}(I, V)$, d.h. f ist stetig.

Sei $x_0 \in I$. Zeige die Stetigkeit von f durch das $\varepsilon - \delta -$

Konstruktion. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ z.zg.: $\exists\, \delta \in \mathbb{R}^+$, so dass

$\forall x \in I : |x - x_0| < \delta \Rightarrow \| f(x) - f(x_0) \| < \varepsilon$

$(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ CF $\Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq k : \| f_m - f_n \| < \frac{1}{3}\varepsilon$

f_k stetig $\Rightarrow \exists\, \delta \in \mathbb{R}^+ : \forall x \in I : \| f_k(x) - f_k(x_0) \| < \frac{1}{3}\varepsilon$

Sei nun $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$. $\Rightarrow \| f(x) - f(x_0) \| \leq$

$\| f(x) - f_k(x) \| + \| f_k(x) - f_k(x_0) \| + \| f_k(x_0) - f(x_0) \| \leq$

$\| f - f_k \|_\infty + \frac{1}{3}\varepsilon + \| f_k - f \|_\infty < \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon$.

$\square$

Funktionen mit Werten in einer abg. Teilmenge

Lemma (3.8)

Sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein endliches, abgeschlossenes Intervall, V ein Banachraum und $\bar{B} \subseteq V$ eine abgeschlossene Teilmenge. Dann ist die Menge der Funktionen $\mathcal{C}(I, \bar{B})$ abgeschlossen im Banachraum $\mathcal{C}(I, V)$. Also ist $\mathcal{C}(I, \bar{B})$ bezüglich der Metrik $d(f, g) = \|f - g\|_\infty$ ein vollständiger metrischer Raum.

Beweis von Lemma 3.8.

geg: abg. Teilmenge $\bar{B} \subseteq V$

z.zg.: $\mathcal{C}(I,\bar{B})$ ist abg. Teilmenge v. $\mathcal{C}(I,V)$

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{C}(I,\bar{B})$, die in $\mathcal{C}(I,V)$ einen Grenzwert f besitzt. z.zg.: f ist in $\mathcal{C}(I,\bar{B})$ enthalten

Sei $x\in I$, zu zeigen: $f(x)\in\bar{B}$

$f_n \in \mathcal{C}(I,\bar{B})\ \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow f_n(x)\in\bar{B}$ für alle $n\in\mathbb{N}$

<u>Beh.</u>: $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ in V

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall m \geq N$:

$\| f_m - f \|_\infty < \varepsilon \Rightarrow \forall m \geq N$:

$\| f_m(x) - f(x) \| = \| (f_m - f)(x) \| \leq \| f_m - f \|_\infty$

$< \varepsilon$ ($\Rightarrow$ Beh.)

also: $(f_m(x))_{m \in \mathbb{N}}$ ist Folge in $\bar{B}$, hat in V

einen Grenzwert $f(x)$. $\bar{B}$ ist abgeschl. in V

$\Rightarrow f(x) \in \bar{B}$. $\square$

Der lokale Existenzsatz

Satz (3.9)

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ offen, $(a, b) \in D$ und $f : D \to \mathbb{K}^n$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Dann gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ und eine Lösung $\varphi :]a - \delta, a + \delta[\to \mathbb{K}^n$ des durch $y' = f(x, y)$ und (a, b) definierten Anfangswertproblems.

Beweis von Satz 3.9

Sei I ein kompaktes Intervall mit a im Inneren
von I und $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Dann ist $I \times \overline{B}_\varepsilon(b)$ eine
kompakte Teilmenge von $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$; o.B.d.A. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
(Dabei ist $\overline{B}_\varepsilon(b) = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid \|v - b\| < \varepsilon \}$).
$D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow I \times \overline{B}_\varepsilon(b) \subseteq D$ sofern I und
ε hinreichend klein gewählt werden.
Betrachte die Abb. $\Phi : \mathcal{C}(I, \overline{B}_\varepsilon(b)) \to \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$,
$\varphi \mapsto b + \int_a^x f(t, \varphi(t))\, dt$. Idee:
Gilt $\Phi(\varphi) = \varphi$, dann ist φ eine Lösung des

Anfangswertproblems, denn:

$$\varphi(x) = b + \int_a^x f(t, \varphi(t))\,dt \quad \forall x \in I^\circ$$

$$\overset{HDI}{\Longrightarrow} \quad \varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad \forall x \in I^\circ$$

und außerdem $\varphi(a) = \Phi(\varphi)(a) = b + \int_a^a f(t, \varphi(t))\,dt$
$= b + 0 = b$

Auf Grund der lokalen Lipschitz-Stetigkeit können wir durch Verkleinerung von I und ε erreichen, dass
$\|f(x,y) - f(x,y')\|_\infty \leq L \|y - y'\|_\infty \quad \forall x \in I,\ y, y' \in \overline{B}_\varepsilon(b)$
mit einer Konstanten L erfüllt ist. Wähle außerdem ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ mit $L\delta < 1$ und $m\delta \leq \varepsilon$, wobei
$m = \max \{ \|f(x,y)\|_\infty \mid (x,y) \in I \times \overline{B}_\varepsilon(b) \}$

$\|_\infty$

$\checkmark$

$\checkmark$

$\square$

Setze $\overline{B} = B_\varepsilon(b)$ und $J =]a-\delta, a+\delta[$

zeige nun (1) $\forall \varphi \in \mathcal{C}(J, \overline{B}) : \Phi(\varphi) \in \mathcal{C}(J, \overline{B})$

(d.h. Φ ist eine Abbildung $\mathcal{C}(J, \overline{B}) \to \mathcal{C}(J, \overline{B})$)

(2) Φ ist eine <u>Kontraktion</u> auf $\mathcal{C}(J, \overline{B})$

<u>zu (1)</u> geg. $\varphi \in \mathcal{C}(J, \overline{B})$, $x \in J$, z.zg. $\Phi(\varphi)(x) \in \overline{B}$

Dies ist der Fall, denn $\| \Phi(\varphi)(x) - b \| = \| \int_a^x f(t, \varphi(t))\, dt \|_\infty$

$\leq \int_a^x \| f(t, \varphi(t)) \| \, dt \leq \int_a^x m \, dt = |x-a| \cdot m < \delta \cdot m < \varepsilon$

<u>zu (2)</u> Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{C}(J, \overline{B})$. <u>Beh.</u>: $\| \Phi(\varphi) - \Phi(\psi) \|_\infty \leq$

$L \delta \| \varphi - \psi \|_\infty$ ($\Rightarrow$ Kontraktionseig. wg. $L\delta < 1$)

$L\delta \|\varphi - \psi\|_\infty$ ($\Rightarrow$ Kontraktionseig. wg. $L\delta < 1$)

Sei $x \in J$. $\| \Phi(\varphi)(x) - \Phi(\psi)(x) \|_\infty = \| \int_a^x f(t,\varphi(t))\,dt - \int_a^x f(t,\psi(t))\,dt \|$

$= \| \int_a^x (f(t,\varphi(t)) - f(t,\psi(t)))\,dt \|_\infty \leq \int_a^x L \cdot \|\varphi(t) - \psi(t)\|_\infty \,dt$

$\leq |x-a| \cdot L \cdot \|\varphi - \psi\|_\infty \leq \delta \cdot L \cdot \|\varphi - \psi\|$

also: Φ ist Kontraktion auf $C(I, \bar{B})$, und $C(I, \bar{B})$ ist vollständiger metr. Raum nach Lemma 3.8. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz existiert also für Φ ein Fixpunkt. $\square$

Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf

Satz (3.10)

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{K}^n$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt, und $(a, b) \in D$. Dann besitzt das durch $y' = f(x, y)$ und (a, b) definierte Anfangswertproblem eine eindeutige maximale Lösung.

Beweis von Satz 3.10:

Nach Satz 3.6 genügt es, die Existenz einer maximalen Lösung durch den Punkt (a, b) nachzuweisen.

Satz 3.9 $\Rightarrow \exists\, \delta \in \mathbb{R}^+$ und eine Lsg. $\varphi:]a-\delta, a+\delta[\to \mathbb{K}^n$ mit $\varphi(a) = b$. Definiere $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ durch

$$c = \inf \{ c_1 \in \mathbb{R} \mid c_1 \leq a,\ \exists \text{ Lsg. } \varphi_1 :]c_1, a+\delta[\to \mathbb{K}^n \text{ mit } \varphi_1(a) = b \}$$

Definiere ebenso $d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ durch

$$d = \sup \{ d_1 \in \mathbb{R} \mid d_1 \geq a,\ \exists \text{ Lsg. } \varphi_1 :]a-\delta, d_1[\to \mathbb{K}^n \text{ mit } \varphi_1(a) = b \}$$

Offenbar gilt $c_1 \leq a-\delta$ und $d_1 \geq a+\delta$. Definiere nun folgendermaßen eine Fkt. $\psi :]c_1, d_1[\to \mathbb{K}^n$: Sei $t \in]c_1, d_1[$.

Ist $t < a$, dann wählen wir eine Lösung $\varphi_t :]\ell_t, a+\delta[\to \mathbb{K}^n$ des Anfangswertproblems mit $c_1 < \ell_t < t$ und setzen $\psi(t) = \varphi_t(t)$. Im Fall $t \geq a$ wählen wir eine Lösung $\varphi_t :]a-\delta, r_t[\to \mathbb{K}^n$ mit $r_t < t < d_1$ und setzen ebenfalls $\psi(t) = \varphi_t(t)$. Offenbar gilt $\psi(a) = \varphi_a(a) = b$.

Zu überprüfen ist nun

(1) Für alle $t \in]c_1, d_1[$ gilt $\psi'(t) = f(t, \psi(t))$, d.h. ψ ist eine Lösung von $y' = f(x, y)$.

(2) Die Lösung ψ ist maximal.

zu (1) Wir betrachten nur den Fall, dass $t \geq a$ ist, weil das Argument im anderen Fall analog funktioniert. Nach Definition gilt $\psi(t) = \varphi_t(t)$, und außerdem $\varphi_t(t') = f(t', \varphi_t(t'))$ für alle $t' \in]a-\delta, r_t[$, weil φ_t eine Lösung der DGL ist.

Auf Grund des Eindeutigkeitssatzes 3.6 stimmen für jedes t' in diesem Intervall die Lösungen φ_t und $\varphi_{t'}$ dort, wo sie beide definiert sind, überein, insbesondere im Punkt t'. Es gilt also jeweils $\psi(t') = \varphi_{t'}(t') = \varphi_t(t')$. Weil der Durchschnitt der Definitionsbereiche offen ist, stimmen ψ und φ_t also auf einem offenen Bereich überein, und daraus folgt auch jeweils $\psi'(t') = \varphi_t'(t')$. Insbesondere gilt also

$$\psi'(t) \quad = \quad \varphi_t'(t) \quad = \quad f(t, \varphi_t(t)) \quad = \quad f(t, \psi(t)).$$

insbesondere also $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$

<u>zu (2)</u> Ang. φ ist keine max. Lsg. $\Rightarrow$

$\exists\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und eine Fortsetzung von φ

auf $]c_1 - \varepsilon, d_1[$ oder $]c_1, d_1 + \varepsilon[$ ↯

zur Definition von c_1 bzw. d_1 $\square$

Wiederholung: Grundlagen Topologie

(1) Satz von Heine-Borel:
Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist. (Dasselbe gilt für Teilmenge von $\mathbb{C}^n$ oder von $\mathbb{R}^m \times \mathbb{C}^n$.)

(2) Ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, dann bezeichnet man eine Teilmenge $A \subseteq X$ als relativ kompakt, wenn ihr Abschluss $\bar{A}$ in $(X, \mathcal{T})$ kompakt ist.

(3) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$, aufgefasst als topologischer Raum mit der von $\mathbb{R}^n$ induzierten Topologie. Eine Teilmenge $A \subseteq D$ ist genau dann relativ kompakt in D, wenn sie beschränkt ist und der Abschluss $\bar{A}$ von A in $\mathbb{R}^n$ (!) in D enthalten ist.

zur relativen Kompaktheit:

<u>Bem</u>: geg. $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq D$

Genau dann ist B kompakt als Teilmenge von D, wenn B als Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ kompakt ist

„$\Rightarrow$" Vor: B ist kompakt in D

z.zg: B ist kompakt im $\mathbb{R}^n$

Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von B im $\mathbb{R}^n$. $\Rightarrow (U_i \cap D)_{i \in I}$ ist offene Überdeckung von B in D. B kompakt in D

$\Rightarrow \exists J \subseteq I$ endlich, s.d. $(U_i \cap D)_{i \in J}$ Überdeckung von $D \Rightarrow (U_i)_{i \in J}$ ist Überd. von D

„$\Leftarrow$" Vor: B ist kompakt in $\mathbb{R}^n$

z.zg.: B ist kompakt in D

Sei $(V_i)_{i\in I}$ eine offene Überd. von B in D

V_i offen in D $\Rightarrow$ $\exists\, U_i \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $U_i \cap D = V_i$

(für jedes $i \in I$) $\Rightarrow$ $(U_i)_{i\in I}$ ist offene Überd. von B in $\mathbb{R}^n$

Vor $\Rightarrow$ $\exists\, J \subseteq I$ endl.: $\bigcup_{i\in J} U_i \supseteq B$

$$\Rightarrow \bigcup_{i\in J} V_i = \bigcup_{i\in J} (U_i \cap D) = \Big(\bigcup_{i\in J} U_i\Big) \cap D \overset{D\supseteq B}{\supseteq} B \Rightarrow (V_i)_{i\in J} \text{ ist Überd. von } B \text{ in } D.$$

$\square$