Systeme von Differenzialgleichungen

Im Folgenden bezeichnet $\mathbb{K}$ einen der beiden Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Definition (3.1)

Seien $n, k \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^{nk}$ eine beliebige Teilmenge und $f : U \to \mathbb{K}^n$ eine Funktion. Dann bezeichen wir eine Gleichung der Form

$$y^{(k)} \quad = \quad f(x, y, y', ..., y^{(k-1)})$$

als (explizite) $\mathbb{K}$-wertiges System von n Differenzialgleichung der Ordnung k. Dabei wird U der Definitionsbereich des Systems genannt.

Anfangswertprobleme und ihre Lösungen

Definition (3.2)

Ein Anfangswertproblem besteht aus der Angabe eines $\mathbb{K}$-wertiges System von n Differenzialgleichung wie in Definition 3.1 und eines Punktes $(a, b) \in U$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{K}^{kn}$. Eine Lösung dieses Anfangswertproblems ist eine (mindestens) k-mal differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{K}^n$, definiert auf einem offenen Intervall I, mit $(\varphi(a), \varphi'(a), ..., \varphi^{(k-1)}(a)) = b$ und der Eigenschaft, dass

$$(t, \varphi(t), \varphi'(t), ..., \varphi^{(k-1)}(t)) \in U$$

und

$$\varphi_j^{(k)}(t)) \quad = \quad f_j(t, \varphi(t), \varphi'(t), ..., \varphi^{(k-1)}(t))$$

für $1 \leq j \leq n$ und alle $t \in I$ erfüllt ist. Eine solche Lösung wird als maximal bezeichnet, wenn keine Lösung $\psi : J \to \mathbb{K}^n$ des Anfangswertproblems mit $J \supsetneq I$ und $\psi|_I = \varphi$ existiert.

Korrespondenz zwischen Systemen erster und höherer Ordnung

Jedem System von n Differenzialgleichungen k-ter Ordnung wie oben kann auf folgende Weise ein System $y' = g(x, y)$ von kn Differenzialgleichungen zugeordnet werden: Man definiert eine Funktion $g : D \to \mathbb{K}^{kn}$ durch

$$\begin{aligned} g_{i,j}(x, y) &= y_{i+1,j} && \text{für } 0 \le i \le k-2,\ 1 \le j \le n \\ g_{k-1,j}(x, y) &= f_j(x, y) && \text{für } 1 \le j \le n \end{aligned}$$

Dabei wird für die Nummerierung der Indizes der Raum $\mathbb{K}^{kn}$ mit $(\mathbb{K}^n)^k$ gleichgesetzt.

Übersetzung der Lösungsmengen

Satz (3.3)

Sei $y^{(k)} = f(x, y, y', ..., y^{(k-1)})$ ein n-elementiges System von DGLs k-ter Ordnung der oben angegebenen Form und $y' = g(x, y)$ das zugeordnente kn-elementige System.

(i) Ist $\varphi : I \to \mathbb{K}^n$ eine Lösung des n-elementigen Systems, dann ist die Abbildung $\psi : I \to \mathbb{K}^{kn}$ gegeben durch $\psi(t) = (\varphi(t), \varphi'(t), ..., \varphi^{(k-1)}(t))$ für $t \in I$, in ausgeschriebener Form $\psi_{i,j}(t) = \varphi_j^{(i)}(t)$ $0 \leq i \leq k-1$ und $1 \leq j \leq n$, eine Lösung des kn-elementigen Systems.

(ii) Ist umgekehrt $\psi : I \to \mathbb{K}^{kn}$ eine Lösung des nk-elementigen Systems, dann ist durch $\varphi_j(t) = \psi_{0,j}(t)$ für $1 \leq j \leq n$ eine Lösung des n-elementigen Systems gegeben.

Beweis von Satz 3.3

geg. System $y^{(k)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)})$ k-ter Ordnung (*)

zugeordnetes System erster Ordnung $y' = g(x, y)$ (**)

wobei $g_i(x, y) = y_{i+1}$ $(0 \leq i \leq k-2)$

$g_{k-1}(x, y) = f(x, y_0, y_1, \ldots, y_{k-1})$

zu (i) geg. Lsg $\varphi : I \to \mathbb{K}^n$ Lsg. von (*)

definiere $\psi_i(t) = \varphi^{(i)}(t)$ für $t \in I$, $0 \leq i \leq k-1$

z.zg.: $\psi = (\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{k-1})$ ist Lsg. von (**)

Für jedes $t \in I$ und für $0 \leq i \leq k-2$ gilt jeweils

$$g_i(t,\Psi(t)) = g_i(t,\varphi(t),\varphi'(t),\dots,\varphi^{(k-1)}(t)) = \varphi^{(i+1)}(t)$$

$$= (\varphi^{(i)})'(t) = \Psi_i'(t)$$

$$g_{k-1}(t,\Psi(t)) = g_{k-1}(t,\dots,\varphi^{(k-1)}(t)) = f(t,\varphi(t),\dots,\varphi^{(k-1)}(t))$$

$$= \varphi^{(k)}(t) = (\varphi^{(k-1)})'(t)$$

<u>zu (ii)</u> geg. Lsg $\Psi : I \to (\mathbb{K}^n)^k$ von $(**)$ (Vor.!)

definiere $\varphi : I \to \mathbb{K}^n$ durch $\varphi = \Psi_0$

z. zg.: φ löst $(*)$, d.h. $\varphi^{(k)}(t) = f(t,\varphi(t),\varphi'(t),\dots,\varphi^{(k-1)}(t))$
für alle $t \in I$

Vor. $\Rightarrow$ Ψ_0 löst $y_0' = g_0(x,y) = y_1 \Rightarrow \Psi_0'(t) = \Psi_1(t)$

Ψ_1 löst $y_1' = g_1(x,y) = y_2 \Rightarrow \Psi_1'(t) = \Psi_2(t)$, insgesamt:

$\psi_i'(t) = \psi_{i+1}(t)$ für $0 \le i \le k-2$

ψ_{k-1} löst $y_{k-1}' = g_{k-1}(x,y) = f(x,y,\dots,y^{(k-1)})$

$$\Rightarrow \psi_{k-1}'(t) = f(t,\psi_0(t),\dots,\psi_{k-1}(t))$$

$$\Rightarrow \varphi^{(k)}(t) = \psi_0^{(k)}(t) = \psi_1^{(k-1)}(t) = \dots$$

$$= \psi_{k-1}'(t) = f(t,\psi_0(t),\dots,\psi_{k-1}(t)) =$$

$$f(t,\varphi(t),\dots,\varphi^{(k-1)}(t)). \qquad \square$$

Fü

un

z.z.

$\| f_x$

y, y

Seien

Mitte

Für

auf d

y nac

Lipschitz-stetige Funktionen bezüglich einer Komponente

Definition (3.4)

Seien V, W Banachräume, $m \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m \times V$ und $f : D \to W$ eine Funktion. Wir sagen, die Funktion f genügt

(i) einer Lipschitz-Bedingung, wenn eine Konstante $L \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass $\|f(x, y) - f(x, y')\| \leq L\|y - y'\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^m$ und $y, y' \in V$ mit $(x, y), (x, y') \in D$ erfüllt ist und

(ii) einer lokalen Lipschitz-Bedingung, wenn für jeden Punkt $(x, y) \in D$ eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^m \times V$ existiert, so dass $f|_{D \cap U}$ eine Lipschitz-Bedingung genügt.

Hinreichendes Kriterium für Lipschitz-Stetigkeit

Proposition (3.5)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{K}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{K}^n$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ eine stetige Funktion mit stetiger (reeller) Ableitung bezüglich der y-Komponente. Dann genügt f einer lokalen Lipschitz-Bedingung.

Beweis von Proposition 3.5:

geg. o.B.d.A. sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$D \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig, mit stetiger Ableitung bzgl. der y-Komponente. Sei $(a, b) \in D$ (mit $a \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^n$). z.zg.: f genügt auf einer Umgebung von (a, b) einer Lipschitz-Bed.

Sei U eine bel. <u>kompakte</u> Umgebung von (a, b) mit $U \subseteq D$. Maximumsprinzip $\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}^+$ mit $\left|\frac{\partial f}{\partial y_i}(x, y)\right| \leq c \quad \forall (x, y) \in U$

2

$y^{(k-1)})$

$t))$

$= \ldots$

$t)) =$

$\square$

Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ definiere $D_x = \{y \in \mathbb{R}^n \mid (x,y) \in D\}$
und $f_x : D_x \to \mathbb{R}^n$, $y \mapsto f(x,y)$

z.zg: Es gibt eine Konstante $L \in \mathbb{R}^+$ mit
$\|f_x(y) - f_x(y')\|_\infty \le L\|y-y'\|_\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$,
$y, y' \in \mathbb{R}^n$ mit $(x,y), (x,y') \in U$.

Seien also solche x, y, y' vorgegeben.

Mittelwertsatz für Richtungsableitungen $\Rightarrow$
Für $1 \le j \le n$ gibt es jeweils einen Punkt p_j
auf der offenen Verbindungsstrecke $]y, y'[$ von
y nach y' mit $D_v (f_x)_j(p_j) = (f_x)_j(y) - (f_x)_j(y')$

↑ Richtungsabl.

Für $1 \leq j \leq n$ gibt es jeweils einen Punkt p_j

Wenn wir voraussetzen, dass U konvex ist (z.B. eine abg. Kreisscheibe), dann liegen $p_1, \dots, p_n$ in U. Erinnerung: $\partial_v (f_x)_j = \sum_{l=1}^{n} v_l \frac{\partial (f_x)_j}{\partial y_l}$

$\Rightarrow$ erhalte für $1 \leq j \leq n$ jeweils

$$|(f_x)_j(y) - (f_x)_j(y')| = |\partial_v (f_x)_j (p_j)| \leq \sum_{l=1}^{n} |v_l| \left|\frac{\partial (f_x)_j}{\partial y_l}(p_j)\right| \leq c \sum_{l=1}^{n} |v_l| \leq c \cdot n \cdot \|v\|_\infty$$

$= c\, n \cdot \|y - y'\|$ Bilde nun das Maximum über die j Komponenten $\Rightarrow \|f(x,y) - f(x,y')\|_\infty = \|f_x(y) - f_x(y')\|_\infty \leq c \cdot n \cdot \|y - y'\|_\infty \Rightarrow f$ erfüllt Lipschitz-Bed. auf U mit der Konstanten $L := cn$. $\square$

Notation: Vektorwertige Integrale

Ist $g : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetige, vektorwertige Funktion, dann setzen wir

$$\int_a^b g(x)\ dx \quad = \quad \left(\int_a^b g_1(x)\ dx, ..., \int_a^b g_n(x)\ dx \right) \quad ,$$

wobei $g_1, .., g_n$ die Komponentenfunktionen von g bezeichnen.

Der Eindeutigkeitssatz

Satz (3.6)

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$, $(a, b) \in D$, und sei $f : D \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt.

- Sind $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}^n$ beides Lösungen des durch $y' = f(x, y)$ und (a, b) definierten Anfangswertproblems auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, dann stimmen sie auf ganz I überein.
- Desweiteren besitzt das Anfangswertproblem höchstens eine maximale Lösung.

Beweis von Satz 3.6

o.B.d.A. sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

geg: $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig, genügt einer lokalen Lipschitz-Bedingung, $(a, b) \in D$ (mit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^n$)

Seien $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}^n$ Lösungen von $y' = f(x,y)$ mit $\varphi(a) = \psi(a) = b$

<u>Beh</u>: Es gibt ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subseteq I$

und $\varphi|_{]a-\varepsilon, a+\varepsilon[} = \psi|_{]a-\varepsilon, a+\varepsilon[}$.

Vor $\Rightarrow$ $\exists$ offene Umgebung U von (a,b) mit $U \subseteq D$ und ein $L \in \mathbb{R}^+$ mit $\|f(x,y) - f(x,y')\|_\infty \leq L\,\|y - y'\|_\infty$ für alle x, y, y' mit $(x,y), (x,y') \in U$.

Stetigkeit von φ, ψ $\Rightarrow$ $\exists \varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+$ mit $(t, \varphi(t)), (t, \psi(t)) \in U$ für alle $t \in [a, a+\varepsilon_1[$

$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)),\ \psi'(t) = f(t, \psi(t)) \quad \forall\, t \in I$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\Rightarrow \varphi(t) - \psi(t) = \int_a^t (\varphi'(s) - \psi'(s))\, ds = \int_a^t (f(s,\varphi(s)) - f(s,\psi(s)))\, dt$$

für alle $t \in I$

$$\Rightarrow \|\varphi(t) - \psi(t)\|_\infty \leq \int_a^t \|f(s,\varphi(s)) - f(s,\psi(s))\|_\infty\, ds \leq$$

$$L \int_a^t \|\varphi(s) - \psi(s)\|_\infty\, ds \quad \forall\, t \in I$$

Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ setze

$$m(\varepsilon) = \sup \{ \| \varphi(t) - \psi(t) \|_\infty \mid t \in [a, a+\varepsilon[\}$$

$\Rightarrow \forall t \in [a, a+\varepsilon[$ erhalte

$$\| \varphi(t) - \psi(t) \|_\infty \leq L \cdot \int_a^t m(\varepsilon)\, ds = L (t-a)\, m(\varepsilon)$$

$< L \cdot \varepsilon\, m(\varepsilon)$ Supremum über alle $t \in [a, a+\varepsilon[$

$\Rightarrow m(\varepsilon) < L \cdot \varepsilon\, m(\varepsilon)$ $(*)$

Wähle $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ so klein, dass $L\varepsilon < 1$ gilt

$\Rightarrow m(\varepsilon) = 0 \Rightarrow \varphi(t) = \psi(t) \; \forall t \in [a, a+\varepsilon[$

Genauso zeigt man, dass ein $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ mit

$\varphi|_{]a-\varepsilon', a]} = \psi|_{]a-\varepsilon', a]}$ existiert.

Ersetzen wir ε durch $\min(\varepsilon, \varepsilon')$, dann folgt

$\varphi|_{]a-\varepsilon, a+\varepsilon[} = \psi|_{]a-\varepsilon, a+\varepsilon[}$ ($\Rightarrow$ Beh)

Beh: $\varphi = \psi$ (auf ganz I)

Betrachte $t_0 = \sup\{t \in I \mid \varphi|_{[a,t[} = \psi|_{[a,t[}\}$

(bereits bekannt: $t_0 \geq \varepsilon$)

1. Fall: $t_0 = +\infty$ oder t_0 rechte Intervallgr. von I

dann gilt $\varphi(t) = \psi(t)$ $\forall t \in I, t \geq a$

2. Fall: I hat endl. rechte Grenze $b \in \mathbb{R}$

und $t_0 < b$

Dann existiert ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ mit $[t_0, t_0+\delta]$

$\subseteq I$. $\varphi|_{[a,t_0[} = \psi|_{[a,t_0[}$, φ, ψ stetig

$=$

von

$\exists \varepsilon$

$\Rightarrow$

$\not\downarrow$ z

zeige

Ang

Lösung

Betrac

O.B.d

Sei ε

folgt
)
$|[a,t[\}$
von I
a
$\mathbb{R}$
$t_0+\delta]$
ehg

$\Rightarrow \varphi(t_0) = \psi(t_0)$ f genügt in einer Umg. von $(t_0, \varphi(t_0))$ einer Lipschitz-Bed. s.o. $\Rightarrow$

$\exists\, \varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+$ mit $\varphi|_{[t_0, t_0+\varepsilon_1[} = \psi|_{[t_0, t_0+\varepsilon_1[}$

$\Rightarrow \varphi|_{[a, t_0+\varepsilon_1[} = \psi|_{[a, t_0+\varepsilon_1[}$ und $t_0 + \varepsilon_1 > t_0$

$\lightning$ zur Definition von t_0

Zeige genauso: $\varphi(t) = \psi(t)$ $\forall\, t \in I$ mit $t \leq a$ ($\Rightarrow$ Beh.)

Ang. $\varphi: I \to \mathbb{R}^n$, $\psi: J \to \mathbb{R}^n$ sind zwei maximale Lösungen von $y' = f(x, y)$ durch (a, b).

Betrachten die rechten Grenzen c, d von I bzw. J.

O.B.d.A. $c \leq d$ und $c \in \mathbb{R}$. Ang. $c < d$.

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $a - \varepsilon \in I$ und $a - \varepsilon \in J$.

Dann ist $\psi|_{]a-\varepsilon,c[} = \varphi|_{]a-\varepsilon,c[}$ auf Grund der gerade gez. Beh. $c < d \Rightarrow$ erhalten durch ψ eine Fortsetzung von φ auf ein Intervall $I' \supsetneq I$ $(I' = I \cup [c,d[\,)$

↯ zur Maximalität von φ also: $c = d$

Genauso zeigt man, dass auch die linken Grenzen von I und J übereinstimmen. damit: $I = J \overset{\text{s.o.}}{\Rightarrow} \varphi = \psi$. $\square$

Lemma (3.7)

Sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein endliches, abgeschlossenes Intervall, und sei V ein Banachraum. Sei außerdem $n \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{C}(I, V)$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der stetigen Funktionen $f : I \to V$. Dann ist $\mathcal{C}(I, V)$ mit der Norm $\|f\|_\infty = \sup\{\, \|f(x)\| \mid x \in I\}$ ein Banachraum.

Beweis von Lemma 3.7:

geg $I = [a,b]$, $(V, \|\cdot\|)$ Banachraum

$\mathcal{C}(I,V)$ = Menge der stetigen Fkt. $I \to V$

(ist $\mathbb{R}$-Vektorraum bzgl. punktw. Addition und skalarer Mult.)

$\|f\|_\infty = \sup \{ \|f(x)\| \mid x \in I \}$

<u>Beh.</u>: $(\mathcal{C}(I,V), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banachraum

zu überprüfen: $\forall f, g \in \mathcal{C}(I,V), \lambda \in \mathbb{R}$

(i) $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = 0$ (ii) $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty$

(iii) $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ (iv) Vollständigkeit

Zeige nur (iii) und (iv) <u>zu (iii)</u> Für jedes $x \in I$ gilt $\|(f+g)(x)\|$ $\leq \|f(x)\| + \|g(x)\| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ Übergang zum Supremum über alle $x \in I$ liefert $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$