Exakte Differenzialformen

Definition (2.8)

Ist $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge und $f : U \to \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion, dann bezeichnet man die 1-Form

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

als äußere Ableitung von f. Eine 1-Form ω auf U wird exakt genannt, wenn eine partiell differenzierbare Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ mit $dg = \omega$ existiert. Die Funktion g bezeichnet man in diesem Fall als Stammfunktion von ω.

Satz (2.9)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, ω eine stetige exakte 1-Form auf U und $F : U \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von ω. Für eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma : I \to U$ definiert auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) Die Kurve γ ist eine Lösung der DGL $\omega(x, y) = 0$.

(ii) Die Funktion $F \circ \gamma$ ist auf I konstant.

Exakte Differenzialgleichungen

Erinnerung: Der Gradient einer Funktion $F : U \to \mathbb{R}$ auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die Funktion $\nabla F : U \to \mathbb{R}^n$ mit den Komponenten $(\nabla F)_k = \frac{\partial F}{\partial x_k}$ für $1 \leq k \leq n$.

Definition (2.10)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge, und seien $f, g : U \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Man bezeichnet die Differenzialgleichung

$$f(x,y) + g(x,y)\,y' \quad = \quad 0$$

als exakt, wenn eine $\mathcal{C}^1$-Funktion $F : U \to \mathbb{R}$ mit

$$\nabla F \quad = \quad \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

existiert. Man bezeichnet F dann als Stammfunktion der DGL.

Lösung exakter Differenzialgleichungen

Folgerung (2.11)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, und seien $f, g : U \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Sei $f(x,y) + g(x,y)y' = 0$ eine exakte DGL und $F : U \to \mathbb{R}$ eine zugehörige Stammfunktion. Für eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ sind dann folgende Aussagen äquivalent.

(i) Die Funktion φ ist Lösung der DGL.

(ii) Die Funktion $\tilde{\varphi} : I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto F(t, \varphi(t))$ ist konstant.

Lokale Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Satz (2.12)

Seien f, g stetige reellwertige Funktionen auf einem Gebiet $U \subseteq \mathbb{R}^2$, die eine exakte Differenzialgleichung

$$f(x,y) + g(x,y)y' = 0 \qquad \text{definieren.}$$

Sei außerdem $(a,b) \in U$ ein Punkt mit $g(a,b) \neq 0$. Dann existiert eine auf einem offenen Intervall I definierte Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}$ durch den Punkt (a,b), und dies ist auf dem Intervall I die einzige Lösung durch diesen Punkt.

Beweis von Satz 2.12

geg: exakte DGL $f(x,y) + g(x,y)\, y' = 0$
mit Definitionsbereich $U \subseteq \mathbb{R}^2$ (offen)

$p \in U$, $p = (a,b)$ mit $g(a,b) \neq 0$

F Stammfkt. der DGL, d.h. $\nabla F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$

<u>Existenz einer Lsg</u>: Folgerung 2.11 $\Rightarrow$ Es genügt, dass eine Fkt. $\varphi: I \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ existiert, so dass $t \mapsto F(t, \varphi(t))$

Satz über implizite Fkt $\rightarrow$ $\exists$ offene Intervalle $I, J \subseteq \mathbb{R}$
angewendet auf F, mit $\partial_2 F(a,b) = g(a,b) \neq 0$

mit $a \in I$, $b \in J$ und eine Fkt. $\varphi: I \to \mathbb{R}$, so dass für alle $(x,y) \in I \times J$ die Äquiv $y = \varphi(x) \Leftrightarrow F(x,y) = 0$ erfüllt ist. Dann ist $t \mapsto F(t, \varphi(t))$ auf I konstant null.

<u>Eindeutigkeit</u>: Ang. $\psi: I \to \mathbb{R}$ ist eine weitere Lsg. der DGL mit $\psi(a) = b$. Folgerung 2.11 $\Rightarrow$ $t \mapsto F(t, \psi(t))$ ist auf I konstant. Sei $c \in \mathbb{R}$ der konstante Wert $\Rightarrow c = F(a, \psi(a)) = F(a,b) = F(a, \varphi(a)) = 0$. Da ψ stetig ist, existiert ein offenes Intervall $I' \subseteq I$ mit $a \in I'$ und $\psi(t) \in J \;\forall t \in I'$ (da J offen). Für alle $(x,y) \in I' \times J$ gilt nun

$$y = \varphi(x) \Leftrightarrow F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \psi(x) \Rightarrow \varphi|_{I'} = \psi|_{I'}$$

Ang. $I' \subsetneq I$ (sonst sind wir fetig.)

Definiere $t_0 = \sup\{t \in I \mid t > a, \varphi|_{]a,t_0[} = \psi|_{]a,t_0[}\}$ Nehme an, dass weder $t_0 = +\infty$ oder t_0 der rechte Rand von I ist.

Stetigkeit von $\varphi, \psi \Rightarrow \varphi(t_0) = \psi(t_0)$

Dieselbe Überlegung, die oben auf den Punkt (a,b) angewendet wurde, können wir auch auf $(t_0, \varphi(t_0)) = (t_0, \psi(t_0))$ anwenden $\Rightarrow \exists$ offenes Intervall $I'' \subseteq I$ mit $t_0 \in I''$, auf dem φ und ψ übereistimmen

$\Rightarrow$ φ und ψ stimmen überein auf einem offenen Intervall, dass $]a, t_0[$ enthält, aber darüber hinausgeht

$\lightning$ zur Def. von t_0

also: $\varphi(t) = \psi(t) \ \forall t \in I$ mit $t > a$

Zeige analog: $\varphi(t) = \psi(t) \ \forall t \in I$ mit $t < a$

$\square$

Grundbegriffe aus der Topologie

- Sei X ein topologischer Raum, und seien $\gamma, \delta : [a, b] \to X$ stetige Funktionen. Eine Homotopie zwischen γ und δ ist eine stetige Abbildung $H : [a, b] \times [0, 1] \to X$ mit $H(s, 0) = \gamma(s)$ und $H(s, 1) = \delta(s)$ für alle $s \in [a, b]$.

- Gilt zusätzlich $H(a, t) = \gamma(a) = \delta(a)$ und $H(b, t) = \gamma(b) = \delta(b)$ für alle $t \in [0, 1]$, dann spricht man von einer Homotopie relativ zu den Endpunkten.

- Eine geschlossene Kurve $\gamma : [a, b] \to X$, also eine Kurve mit $\gamma(a) = \gamma(b)$, wird nullhomotop oder zusammenziehbar genannt, wenn eine Homotopie zwischen γ und der konstanten Abbildung $c : [a, b] \to X$, $t \mapsto \gamma(a)$ relativ zu den Endpunkte existiert.

Grundbegriffe aus der Topologie

- Der topologische Raum X wird als einfach zusammenhängend bezeichnet, wenn er zusammenhängend und jede geschlossene Kurve in X nullhomotop ist.

- Es ist zum Beispiel leicht zu zeigen, dass sternförmige und insbesondere konvexe Gebiete im $\mathbb{R}^n$ einfach zusammenhängend sind.

Kriterium für die Exaktheit von 1-Formen

Satz (2.13)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und ω eine 1-Form auf U, $\omega = f\,dx + g\,dy$ mit stetig differenzierbaren Funktionen $f, g : U \to \mathbb{R}$. Ist ω exakt, dann gilt $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$ auf ganz U. Ist U einfach zusammenhängend, dann gilt auch die Umkehrung.

Integrierende Faktoren für eine 1-Form

Definition (2.14)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $\omega = f\,dx + g\,dy$ eine 1-Form auf U, mit stetigen Funktionen f und g. Eine stetige Funktion $m : U \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ wird integrierender Faktor für ω genannt, wenn $m\omega$ eine exakte 1-Form ist.

Bestimmung eines integrierenden Faktors

ges. $m : U \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $\frac{\partial (mf)}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial (mg)}{\partial x}(x,y)$

für alle $(x,y) \in U$

auf Grund der Produktregel äquiv. Bed.

$$f(x,y) \cdot \frac{\partial m}{\partial y}(x,y) + m(x,y) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) =$$

$$g(x,y) \frac{\partial m}{\partial x}(x,y) + m(x,y) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$$

Hängt m nur von x ab, dann vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$m(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = m'(x)\,g(x,y) + m(x)\cdot\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{m'(x)}{m(x)} = \frac{1}{g(x,y)}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad (\ln \circ m)'(x) = \frac{1}{g(x,y)}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right)$$

konkretes Beispiel:

$$\omega = (2x^2 + 2xy^2 + 1)\, y\, dx + (3y^2 + x)\, dy$$

hier: $f(x,y) = (2x^2 + 2xy^2 + 1)\, y$

$g(x,y) = 3y^2 + x$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4xy \cdot y + (2x^2 + 2xy^2 + 1)$$
$$= 6xy^2 + 2x^2 + 1$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 1$$

Ansatz s.o. $\rightsquigarrow (\ln \circ m)'(x) = \frac{1}{3y^2 + x}\left(6xy^2 + 2x^2\right)$

$$= 2x \rightsquigarrow (\ln \circ m)(x) = x^2 \rightsquigarrow m(x) = e^{x^2}$$

Ergebnis der Rechnung: $e^{x^2}\omega$ ist eine exakte 1-Form (mit $F(x,y) = (x+y^2)\,y\,e^{x^2}$ als Stammfunktion)

Im Folgenden bezeichnet $\mathbb{K}$ einen der beiden Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Definition (3.1)

Seien $n, k \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^{nk}$ eine beliebige Teilmenge und $f : U \to \mathbb{K}^n$ eine Funktion. Dann bezeichen wir eine Gleichung der Form

$$y^{(k)} \quad = \quad f(x, y, y', ..., y^{(k-1)})$$

als (explizite) $\mathbb{K}$-wertiges System von n Differenzialgleichung der Ordnung k. Dabei wird U der Definitionsbereich des Systems genannt.

Anfangswertprobleme und ihre Lösungen

Definition (3.2)

Ein Anfangswertproblem besteht aus der Angabe eines $\mathbb{K}$-wertiges System von n Differenzialgleichung wie in Definition 3.1 und eines Punktes $(a, b) \in U$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{K}^{kn}$. Eine Lösung dieses Anfangswertproblems ist eine (mindestens) k-mal differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{K}^n$, definiert auf einem offenen Intervall I, mit $(\varphi(a), \varphi'(a), ..., \varphi^{(k-1)}(a)) = b$ und der Eigenschaft, dass

$$(t, \varphi(t), \varphi'(t), ..., \varphi^{(k-1)}(t)) \in U$$

und

$$\varphi_j^{(k)}(t)) \quad = \quad f_j(t, \varphi(t), \varphi'(t), ..., \varphi^{(k-1)}(t))$$

für $1 \leq j \leq n$ und alle $t \in I$ erfüllt ist. Eine solche Lösung wird als maximal bezeichnet, wenn keine Lösung $\psi : J \to \mathbb{K}^n$ des Anfangswertproblems mit $J \supsetneq I$ und $\psi|_I = \varphi$ existiert.

Beispiel für Systeme zweier DGLs in zwei Variablen

(1) $y_1'' = y_1 + y_2'$, $y_2'' = -3y_1 + 3y_2' + 7$

hier: $n = k = 2$, $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^{\overset{n}{2}})^{\overset{k}{2}}$

Die DGL hat die Form $y'' = f(x, y, y')$

mit $f(x, y_{01}, y_{02}, y_{11}, y_{12}) = \left(y_{01} + y_{12}, -3y_{01} + 3y_{12} + 7\right)$

Eine Lsg. einer solchen DGL ist eine Fkt. $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ auf einem offen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit

$\ldots xy^2 + 2x^2)$

$= e^{x^2}$

e^{x^2}

$\varphi_1''(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2'(t)$, $\varphi_2''(t) = -3\varphi_1(t) + 3\varphi_2'(t) + 7$

(2) $y_1'' = y_2$, $y_2'' = y_1$

hier: $n = k = 2$, $U = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^2)^2$

kompakte Form: $y'' = f(x, y, y')$ mit

$f(x, y_{01}, y_{02}, y_{12}, y_{22}) = (y_{02}, y_{01})$

Eine Lsg wäre zum Beispiel $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$t \mapsto \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}$

Korrespondenz zwischen Systemen erster und höherer Ordnung

Jedem System von n Differenzialgleichungen k-ter Ordnung wie oben kann auf folgende Weise ein System $y' = g(x, y)$ von kn Differenzialgleichungen zugeordnet werden: Man definiert eine Funktion $g : D \to \mathbb{K}^{kn}$ durch

$$\begin{array}{rcll} g_{i,j}(x,y) & = & y_{i+1,j} & \text{für } 0 \leq i \leq k-2,\ 1 \leq j \leq n \\ g_{k-1,j}(x,y) & = & f_j(x,y) & \text{für } 1 \leq j \leq n \end{array}$$

Dabei wird für die Nummerierung der Indizes der Raum $\mathbb{K}^{kn}$ mit $(\mathbb{K}^n)^k$ gleichgesetzt.

Übersetzung der Lösungsmengen

Satz (3.3)

Sei $y^{(k)} = f(x, y, y', ..., y^{(k-1)})$ ein n-elementiges System von DGLs k-ter Ordnung der oben angegebenen Form und $y' = g(x, y)$ das zugeordnente kn-elementige System.

(i) Ist $\varphi : I \to \mathbb{K}^n$ eine Lösung des n-elementigen Systems, dann ist die Abbildung $\psi : I \to \mathbb{K}^{kn}$ gegeben durch $\psi(t) = (\varphi(t), \varphi'(t), ..., \varphi^{(k-1)}(t))$ für $t \in I$, in ausgeschriebener Form $\psi_{i,j}(t) = \varphi_j^{(i)}(t)$ $0 \leq i \leq k-1$ und $1 \leq j \leq n$, eine Lösung des kn-elementigen Systems.

(ii) Ist umgekehrt $\psi : I \to \mathbb{K}^{kn}$ eine Lösung des nk-elementigen Systems, dann ist durch $\varphi_j(t) = \psi_{0,j}(t)$ für $1 \leq j \leq n$ eine Lösung des n-elementigen Systems gegeben.

Übersetzung der Systeme (1) und (2) in Systeme erster Ordnung:

zu (1) Definiere $g_0, g_1 : U \to \mathbb{R}^2$ durch

$$g_{0,1}(x, y_{01}, y_{02}, y_{11}, y_{12}) = y_{11}$$
$$g_{0,2}(x, y_{01}, y_{02}, y_{11}, y_{12}) = y_{12}$$
$$g_{1,1}(x, y_{01}, y_{02}, y_{11}, y_{12}) = y_{01} + y_{12}$$
$$g_{1,2}(x, y_{01}, y_{02}, y_{11}, y_{12}) = -3y_{01} + 3y_{12} + 7$$

gesammtes System in ausgeschriebener Form:

$$y_{01}' = y_{11}, \quad y_{02}' = y_{12}$$
$$y_{11}' = y_{01} + y_{12}, \quad y_{12}' = -3y_{01} + 3y_{12} + 7$$

zu (2) Definiere $g_0, g_1 : U \to \mathbb{R}^2$ durch

$$g_{01}(x, y_{01}, y_{02}, y_{11}, y_{12}) = y_{11}$$
$$g_{02}(x, y_{01}, y_{02}, y_{11}, y_{12}) = y_{12}$$
$$g_{1,1}(x, y_{01}, y_{02}, y_{11}, y_{12}) = y_{02}$$
$$g_{1,2}(x, y_{01}, y_{02}, y_{11}, y_{12}) = y_{01}$$

in ausgeschriebener Form: $y_{01}' = y_{11}$, $y_{02}' = y_{12}$,

$y_{11}' = y_{02}$, $y_{12}' = y_{01}$

konkrete Lg: $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$, $t \mapsto \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\sin(t) \\ \cos(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \varphi_{01}(t) \\ \varphi_{02}(t) \\ \varphi_{11}(t) \\ \varphi_{12}(t) \end{array} \end{array}$