

Ralf Gerkmann

Mathematisches Institut

Ludwig-Maximilians-Universität München

Vorlesung im Sommersemester 2026

Gewöhnliche Differenzialgleichungen

Zusammenfassung

Thema der Vorlesung ist die Theorie der Systeme von Differenzialgleichungen für Funktionen in einer Variablen. Diese Theorie entwickelte sich in erster Linie durch Fragestellungen aus der Physik, besitzt aber auch wichtige Anwendungen in Gebieten der Reinen Mathematik, wie zum Beispiel der Differentialgeometrie und der Funktionalanalysis. Wir beschäftigen uns mit Verfahren zur Berechnung von Lösungen solcher Gleichungssysteme, leiten Sätze über die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen her, untersuchen das asymptotische Verhalten von Lösungen und die Abhängigkeit der Lösungen von Parameterwerten. Im Einzelnen werden folgende Themen behandelt.

- elementare Lösungsmethoden für gewöhnliche DGLs
- Existenz- und Eindeutigkeitssätze, Randverhalten von Lösungen
- lineare Systeme von DGLs (u.a. mit konstanten oder periodischen Koeffizienten)
- Stabilität von Lösungen
- parameterabhängige Differenzialgleichungen

Inhaltsverzeichnis

§ 1.	<i>Grundbegriffe</i>	3
§ 2.	<i>Elementare Lösungsmethoden</i>	9

§ 1. Grundbegriffe

Zusammenfassung. In diesem Kapitel definieren wir Differenzialgleichungen (DGLs) erster Ordnung, ihren Definitionsbereich und ihre Lösungen. Die Lösungskurven und Richtungsvektorfelder ermöglichen eine geometrische Interpretation der DGLs. Wir formulieren hinreichende Kriterien für die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen. Während bei expliziten DGLs der Definitionsbereich oft künstlich eingeschränkt ist, ermöglichen DGLs in symmetrischer Form eine größere Flexibilität.

Wichtige Grundbegriffe

- explizite und implizite DGL erster Ordnung
- (maximale) Lösung einer solchen DGL
- normiertes Richtungsvektorfeld einer DGL
- (lokale) Lipschitz-Bedingung
- Lipschitz-Konstante
- 1-Form auf einer Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^2$
- DGL in symmetrischer Form

Zentrale Sätze

- Existenzsatz von Peano
- Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf

Im ersten Teil der Vorlesung beschäftigen wir uns vorwiegend mit Differenzialgleichungen des folgenden Typs.

Definition 1.1 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann nennt man eine Gleichung der Form

$$y' = f(x, y)$$

eine (gewöhnliche) **explizite Differenzialgleichung (DGL)** erster Ordnung. Eine **Lösung** einer solchen DGL ist eine differenzierbare Funktion $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $(t, \varphi(t)) \in D$ und $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ für alle $t \in I$ erfüllt ist.

Gelegentlich betrachtet man DGLs von etwas allgemeinerer Form.

Definition 1.2 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^3$ und $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann wird eine Gleichung der Form

$$F(x, y, y') = 0$$

eine **implizite DGL** erster Ordnung genannt. Eine Lösung ist in diesem Fall eine differenzierbare Funktion $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $(t, \varphi(t), \varphi'(t)) \in D$ und $F(t, \varphi(t), \varphi'(t)) = 0$ für alle $t \in I$ gilt.

Jeder expliziten DGL $y' = f(x, y)$ gegeben durch eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ kann eine implizite DGL zugeordnet werden, indem man $\tilde{D} = D \times \mathbb{R}$ und $F : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $F(x, y, y') = y' - f(x, y)$ definiert. Eine differenzierbare Funktion $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist offenbar genau dann eine Lösung von $y' = f(x, y)$, wenn sie eine Lösung von $F(x, y, y') = 0$ ist.

Umgekehrt liefert der Satz über implizite Funktionen aus der Analysis mehrerer Variablen ein hinreichendes Kriterium dafür, dass eine implizite DGL $F(x, y, y') = 0$ gegeben durch eine Funktion $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ zumindest in der Umgebung eines Punktes $(x_0, y_0, z_0) \in D$ in eine explizite DGL umgewandelt werden kann: Ist F stetig differenzierbar und $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, dann gibt es offene Intervall $I, J, K \subseteq \mathbb{R}$ mit $x_0 \in I, y_0 \in J, z_0 \in K$ und eine Funktion $f : I \times J \rightarrow K$ mit der Eigenschaft, dass die Äquivalenz

$$F(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow z = f(x, y) \quad \text{für alle } (x, y, z) \in I \times J \times K$$

erfüllt ist. Eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi : I' \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem offenen Teilintervall $I' \subseteq I$ mit $\varphi(t) \in J$ für alle $t \in I'$ ist unter diesen Voraussetzungen genau dann eine Lösung von $F(x, y, y') = 0$, wenn sie eine Lösung von $y' = f(x, y)$ ist. Wir werden uns in der Vorlesung aber fast ausschließlich mit expliziten DGLs befassen.

Definition 1.3 Man bezeichnet eine Lösung $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ der DGL $y' = f(x, y)$ als **maximal**, wenn keine Lösung $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}$ mit $J \supsetneq I$ und $\psi|_I = \varphi$ existiert.

Wir definieren nun zwei wichtige geometrische Merkmale einer expliziten DGL.

Definition 1.4 Sei $y' = f(x, y)$ eine explizite DGL erster Ordnung wie oben. Dann nennt man die Funktion $\vec{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\vec{f}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 + f(x, y)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ f(x, y) \end{pmatrix}$$

das **normierte Richtungsvektorfeld** der DGL. Ist $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der DGL, dann bezeichnet man den Graphen von φ gegeben durch $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto (t, \varphi(t))$ auch als **Lösungskurve** der DGL.

Für den weiteren Verlauf führen wir die folgende Sprechweise ein: Wir sagen, eine Lösung $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ **durchläuft** einen Punkt (x, y) des Definitionsbereichs D der DGL, wenn ein $t \in I$ mit $\gamma(t) = (t, \varphi(t)) = (x, y)$ existiert.

Die Definitionen sind so gewählt, dass für jedes $t \in I$ der Vektor $(\vec{f} \circ \gamma)(t)$ jeweils der normierte Tangentialvektor an die Kurve γ im Punkt $\gamma(t)$ ist. Denn der Tangentialvektor ohne Normierung ist jeweils gegeben durch $\gamma'(t)$, und es gilt

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ f(t, \varphi(t)) \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{1 + f(t, \varphi(t))^2}}{\sqrt{1 + f(t, \varphi(t))^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ f(t, \varphi(t)) \end{pmatrix} = \sqrt{1 + f(t, \varphi(t))^2} \cdot (\vec{f} \circ \gamma)(t).$$

Sehen wir uns diese geometrischen Merkmale anhand einiger konkreter Beispiele an.

- (1) Die Differentialgleichung $y' = \frac{y}{x}$ mit dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ besitzt als Lösungen die Funktionen $\varphi_c : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto ct$, wobei c die reellen Zahlen durchläuft. Dies überprüft man unmittelbar durch Differenziation der Funktion φ_c : Für alle $t \in \mathbb{R}^+$ gilt

$$\varphi_c'(t) = c = \frac{ct}{t} = \frac{\varphi_c(t)}{t}.$$

Die entsprechende Lösungskurve ist gegeben durch $\gamma_c(t) = (t, ct)$ für alle $t \in \mathbb{R}^+$. Das normierte Richtungsvektorfeld der DGL ist gegeben durch

$$\vec{f}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{y}{x} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

für alle $(x, y) \in D$. Offenbar handelt es sich bei allen φ_c um maximale Lösungen der DGL.

- (2) Die Differentialgleichung $y' = -\frac{x}{y}$ mit dem Definitionsbereich $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ besitzt als Lösungen die Funktionen der Form

$$\varphi_c : I_c \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \sqrt{c - t^2},$$

definiert jeweils auf dem offenen Intervall $I_c =]-\sqrt{c}, \sqrt{c}[$, wobei c die positiven reellen Zahlen durchläuft. Auch hier überprüft man die Lösungseigenschaft unmittelbar durch Differenziation: Für alle $c \in \mathbb{R}^+$ und $t \in I_c$ gilt

$$\varphi_c'(t) = \frac{(-2t)}{2\sqrt{c-t^2}} = -\frac{t}{\varphi_c(t)}.$$

Das normierte Richtungsvektorfeld ist in diesem Fall gegeben durch

$$\vec{f}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{x}{y} \end{pmatrix} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{x}{y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

für alle $(x, y) \in D$. Auch hier ist klar, dass es sich bei allen φ_c um maximale Lösungen handeln muss. Denn nehmen wir an, dass $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der DGL mit $\psi|_{I_c} = \varphi_c$ ist, definiert auf einem offenen Intervall $J \supsetneq I_c$. Dann gilt $-\sqrt{c} \in J$ oder $\sqrt{c} \in J$. Wir beschränken uns auf den zweiten Fall, weil die Argumentation im ersten Fall analog verläuft. Als Lösung der DGL ist die Funktion ψ auf I_c differenzierbar, damit auch stetig, und es folgt

$$\psi(\sqrt{c}) = \lim_{t \rightarrow \sqrt{c}} \psi(t) = \lim_{t \rightarrow \sqrt{c}} \varphi_c(t) = \lim_{t \rightarrow \sqrt{c}} \sqrt{c - t^2} = \sqrt{c - (\sqrt{c})^2} = 0.$$

Aber dies stets im Widerspruch dazu, dass $(t, \psi(t))$ für alle $t \in J$ im Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ der DGL liegen muss.

- (3) Betrachten wir allgemein eine DGL der Form $y' = f(x)$ mit einer stetigen Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist der Definitionsbereich der DGL durch $D = I \times \mathbb{R}$ gegeben. Bezeichnet $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Stammfunktion von f , dann sind die Lösungen der DGL genau die Funktionen der Form $\varphi_c : I \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $\varphi_c(t) = F(t) + c$. Dies folgt unmittelbar aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Diesmal hat das Richtungsvektorfeld der DGL die Form

$$\vec{f}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 + f(x)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ f(x) \end{pmatrix}.$$

Auch in diesem Beispiel sind alle angegebenen Lösungen offenbar maximale Lösungen.

Um ein Kriterium für die Eindeutigkeit von Lösungen formulieren zu können, benötigen wir den folgenden Begriff.

Definition 1.5 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

- (i) Man sagt, die Funktion f genügt einer **Lipschitz-Bedingung**, wenn eine Konstante $L \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass $|f(x, y) - f(x, y')| \leq L|y - y'|$ für alle $x, y, y' \in \mathbb{R}$ mit $(x, y), (x, y') \in D$ erfüllt ist. Die Zahl L wird in diesem Zusammenhang eine **Lipschitz-Konstante** der Funktion f genannt.
- (ii) Die Funktion f genügt einer **lokalen** Lipschitz-Bedingung, wenn für jeden Punkt $(x, y) \in D$ eine Umgebung U existiert, so dass $f|_{D \cap U}$ einer Lipschitz-Bedingung genügt.

Wie wir später überprüfen werden, genügt f zum Beispiel dann einer lokalen Lipschitz-Bedingung, wenn f stetig und die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y}$ nach der zweiten Variable y ebenfalls stetig ist. Für die definierenden Funktionen in den drei Beispielen, gegeben durch $f(x, y) = \frac{y}{x}$, $f(x, y) = -\frac{x}{y}$ bzw. $(x, y) \mapsto f(x)$ ist dieses Kriterium offenbar erfüllt. Die folgenden beiden Aussagen werden wir in einem späteren Kapitel in einem allgemeineren Rahmen beweisen.

Satz 1.6 Sei $y' = f(x, y)$ eine explizite DGL erster Ordnung, gegeben durch eine Funktion f auf einem Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

- (i) (*Existenzsatz von Peano*)
Ist f stetig, dann existiert für jeden Punkt $(x, y) \in D$ eine maximale, durch (x, y) verlaufende Lösung der DGL.
- (ii) (*Existenz- und Eindeutigkeitsatz von Picard-Lindelöf*)
Genügt f darüber hinaus einer lokalen Lipschitz-Bedingung, dann existiert für jeden Punkt $(x, y) \in D$ eine *eindeutig bestimmte* maximale Lösung durch (x, y) .

Geometrisch lässt sich der Existenzsatz von Peano dahingehend interpretieren, dass die Lösungskurven der DGL den Definitionsbereich D der DGL überdecken, wobei es aber vorkommen kann, dass zwei Lösungskurven zusammenlaufen oder sich überkreuzen. Der Existenz- und Eindeutigkeitsatz von Picard-Lindelöf bedeutet, dass die Lösungskurven darüber hinaus eine *Zerlegung* des Definitionsbereichs bilden.

Anhand der Beispiele (1) und (2) von oben wird ein Problem der expliziten DGLs in der Form $y' = f(x, y)$ deutlich: Die definierende Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt häufig Definitionslücken, wodurch der Definitionsbereich von Lösungen unnötig eingeschränkt wird. So wäre es wünschenswert, die DGL im Beispiel (1) so umzuschreiben, dass die Lösungen $\varphi_c(t)$ auf ganz \mathbb{R} definiert sind. Ebenso würde man die DGL im Beispiel (2) gern in eine Form bringen, bei der die Lösungskurven vollständige Kreisbahnen darstellen, und nicht nur Halbkreise.

Insgesamt wird die Beschreibung von Lösungen häufig vereinfacht, wenn man DGLs und Lösungen einer etwas allgemeineren Form betrachtet. Unser nächstes Ziel besteht darin, eine solche Form zu definieren. Sie wird später im Abschnitt über exakte DGLs Verwendung finden. Außerdem liefert diese Fassung einen Ansatz, um DGLs auch auf abstrakten Mannigfaltigkeiten zu definieren, ein wichtiges Thema im Rahmen der Differenzialgeometrie.

Definition 1.7 Eine **Linearform** auf einem \mathbb{R} -Vektorraum V ist eine lineare Abbildung $V \rightarrow \mathbb{R}$. Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass diese linearen Abbildungen selbst einen \mathbb{R} -Vektorraum bilden, den wir als den **Dualraum** V^* von V bezeichnen.

Wir interessieren uns im Folgenden nur für den Dualraum $(\mathbb{R}^2)^*$. Dieser enthält zwei ausgezeichnete Elemente e_1^* und e_2^* , die auf einem beliebigen Vektor $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ durch $e_1^*(v) = v_1$ und $e_2^*(v) = v_2$ definiert sind.

Definition 1.8 Eine **1-Form** auf einer Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ist eine Abbildung $\omega : D \rightarrow (\mathbb{R}^2)^*$.

Auf jeder Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ gibt es zwei ausgezeichnete 1-Formen, die mit dx und dy bezeichnet werden und durch die konstanten Werte $dx(x, y) = e_1^*$ bzw. $dy(x, y) = e_2^*$ für alle $(x, y) \in D$ gegeben sind. Weil es sich bei (e_1^*, e_2^*) um eine geordnete Basis des Dualraus $(\mathbb{R}^2)^*$ handelt, gibt es für jede 1-Form ω auf D eindeutig bestimmte Funktionen $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$\omega(x, y) = f(x, y)e_1^* + g(x, y)e_2^*$$

für alle $(x, y) \in D$ erfüllt ist. Dies bedeutet, dass ω stets in der Form $\omega = f dx + g dy$ dargestellt werden kann, mit geeigneten Funktionen f und g auf D . Man bezeichnet die 1-Form ω als stetig, differenzierbar, stetig differenzierbar, wenn f und g auf D stetige, differenzierbare bzw. stetig differenzierbare Funktionen sind.

Definition 1.9 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$, und seien ω und η zwei auf D definierte 1-Formen. Dann bezeichnen wir die Gleichung

$$\omega(x, y) = \eta(x, y)$$

als eine DGL **in symmetrischer Form**. Eine differenzierbare Funktion $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ wird eine **Lösung** der DGL genannt, wenn $\gamma(t) \in D$ und

$$\omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) = \eta(\gamma(t))(\gamma'(t))$$

für alle $t \in I$ erfüllt ist.

Auch den DGLs in symmetrischer Form können wir normierte Richtungsvektorfelder zuordnen, die aber im Allgemeinen nicht mehr eindeutig bestimmt sind. Ist $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ ein beliebiger Vektor, dann bezeichnen wir mit $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ seine euklidische Norm.

Definition 1.10 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$, und seien ω und η zwei auf D definierte 1-Formen. Wir bezeichnen eine Abbildung $\vec{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ als **normiertes Richtungsvektorfeld** der DGL $\omega(x, y) = \eta(x, y)$, wenn für alle $(x, y) \in D$ jeweils

$$\|\vec{f}(x, y)\| = 1 \quad \text{und} \quad \omega(x, y)(\vec{f}(x, y)) = \eta(x, y)(\vec{f}(x, y))$$

erfüllt ist.

Dieser Typ von Differenzialgleichungen steht zu den oben definierten, expliziten DGLs der Form $y' = f(x, y)$, gegeben durch eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, in folgendem Zusammenhang: Seien ω und η die 1-Formen auf D gegeben durch $\omega = dy$ und $\eta = f dx$. Dann ist durch $dy = f(x, y) dx$ also eine DGL in symmetrischer Form gegeben. Eine differenzierbare Funktion $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$, definiert auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, ist genau dann eine Lösung von $y' = f(x, y)$, wenn die zugehörige Lösungskurve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, \varphi(t))$ eine Lösung von $dy = f(x, y) dx$ ist. Weil nämlich für alle $t \in I$ sowohl

$$\omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) = e_2^*(\gamma'(t)) = e_2^*(1, \varphi'(t)) = \varphi'(t)$$

als auch

$$\eta(\gamma(t))(\gamma'(t)) = f(t, \varphi(t)) \cdot e_1^*(1, \varphi'(t)) = f(t, \varphi(t)) \cdot 1 = f(t, \varphi(t)),$$

gilt, ist Letzteres äquivalent zur Gleichung $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ für alle $t \in I$.

An Stelle der DGLs (1) und (2) von oben können wir nun die folgenden DGLs in symmetrischer Form mit erweitertem Definitionsbereich betrachten.

- (1') Wir betrachten auf $D = \mathbb{R}^2$ die DGL gegeben durch $x dy = y dx$. Dann ist für jedes $c \in \mathbb{R}$ durch $\gamma_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, ct)$ eine Lösung dieser DGL gegeben. Setzen wir nämlich $\omega = x dy$ und $\eta = y dx$, dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ jeweils $\omega(\gamma_c(t))(\gamma_c'(t)) = \omega(t, ct)(1, c) = t \cdot e_2^*(1, c) = t \cdot c = ct$, und ebenso $\eta(\gamma_c(t))(\gamma_c'(t)) = \eta(t, ct)(1, c) = ct \cdot e_1^*(1, c) = ct \cdot 1 = ct$. Ein Richtungsvektorfeld der DGL ist durch

$$\vec{f}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{für alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

und $\vec{f}(0, 0) = (1, 0)$ gegeben. Im Fall $(x, y) \neq (0, 0)$ gilt nämlich $\omega(x, y)(\vec{f}(x, y)) = (x^2 + y^2)^{-1/2} x \cdot e_2^*(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1/2} xy$, und ebenso $\eta(x, y)(\vec{f}(x, y)) = (x^2 + y^2)^{-1/2} y e_1^*(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1/2} xy$. Außerdem ist $\omega(0, 0)(1, 0) = 0 = \eta(0, 0)(1, 0)$. (Für den Wert $\vec{f}(0, 0)$ kann in der Tat ein beliebiger normierter Vektor gewählt werden, weil die DGL $x dy = y dx$ im Punkt $(0, 0)$ „entartet“.)

- (2') Auf $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ betrachten wir die DGL $y dy = -x dx$. Dann erhalten wir für jedes $c \in \mathbb{R}^+$ durch $\gamma_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (c \cos(t), c \sin(t))$ eine Lösung der DGL. Definieren wir nämlich $\omega = y dy$ und $\eta = -x dx$, dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ einerseits

$$\omega(\gamma_c(t))(\gamma_c'(t)) = \omega(c \cos(t), c \sin(t)) \begin{pmatrix} -c \sin(t) \\ c \cos(t) \end{pmatrix} = c \sin(t) e_2^* \begin{pmatrix} -c \sin(t) \\ c \cos(t) \end{pmatrix} = c^2 \cos(t) \sin(t) ,$$

andererseits aber auch

$$\begin{aligned} \eta(\gamma_c(t))(\gamma_c'(t)) &= \eta(c \cos(t), c \sin(t)) \begin{pmatrix} -c \sin(t) \\ c \cos(t) \end{pmatrix} = -(c \cos(t)) \cdot e_1^* \begin{pmatrix} -c \sin(t) \\ c \cos(t) \end{pmatrix} \\ &= -(c \cos(t)) \cdot (-c \sin(t)) = c^2 \cos(t) \sin(t). \end{aligned}$$

Man überprüft ohne Schwierigkeiten, dass durch $\vec{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x^2 + y^2)^{-1/2} (y, -x)$ ein Richtungsvektorfeld der DGL definiert ist.

§ 2. Elementare Lösungsmethoden

Zusammenfassung. In diesem Kapitel behandeln wir eine Reihe von elementaren Lösungsmethoden für gewöhnliche DGLs erster Ordnung von spezieller Form, im Einzelnen

- Lösung von DGLs mit getrennten Variablen
- Lösung linearer DGLs durch Variation der Konstanten
- Rückführung auf bekannte Typen durch Substitution
- Lösung exakter durch Bestimmung einer Stammfunktion bzw. eines integrierenden Faktors

2.1 Differenzialgleichungen mit getrennten Variablen

In diesem Abschnitt betrachten wir DGLs der folgenden Form.

Definition 2.1 Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann nennt man $y' = f(x)g(y)$ eine Differenzialgleichung mit **getrennten Variablen**.

Der folgende Satz gibt ein Kriterium für die Eindeutigkeit der Lösung durch einen Punkt und liefert zugleich ein Verfahren für die Bestimmung der Lösung.

Satz 2.2 Seien f, g wie oben definiert und außerdem $(a, b) \in I \times J$ mit $g(b) \neq 0$. Sei $J' \subseteq J$ ein Intervall mit $b \in J'$ und $g(y) \neq 0$ für alle $y \in J'$, und seien $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $G : J' \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \text{und} \quad G(y) = \int_b^y g(t)^{-1} dt.$$

Dann besitzt G eine Umkehrfunktion $H : G(J') \rightarrow J'$, und es existiert ein offenes Intervall $I' \subseteq I$ mit $a \in I'$ und $F(I') \subseteq G(J')$. Darüber hinaus ist die Funktion $\varphi : I' \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $\varphi = H \circ F$ die einzige durch (a, b) verlaufende Lösung der DGL auf I' .

Beweis: Zunächst bemerken wir, dass ein offenes Intervall J' mit der angegebenen Eigenschaft existiert, denn wegen $g(b) \neq 0$ und der Stetigkeit von g gilt $g(y) \neq 0$ für alle y in einem hinreichend kleinen offenen Teilintervall $J' \subseteq J$, das b enthält. Aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass im Fall $g(b) > 0$ auch $g(y) > 0$ für alle $y \in J'$ gilt, und $g(y) < 0$ für alle $y \in J'$ im Fall $g(b) < 0$. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt $G'(y) = g(y)^{-1}$ für alle $y \in J'$. Dies zeigt, dass G im Fall $g(b) > 0$ streng monoton wachsend und im Fall $g(b) < 0$ streng monoton fallend auf J' ist. Daraus wiederum folgt die Existenz der Umkehrfunktion H von G .

Nach Definition gilt $F(a) = G(b) = 0$, also ist $G(J')$ eine offene Intervallumgebung von $F(a)$. Auf Grund der Stetigkeit von F existiert somit eine offene Intervallumgebung $I' \subseteq I$ von a mit $F(I') \subseteq G(J')$. Daraus wiederum folgt, dass $\varphi = H \circ F$ auf dem gesamten Intervall I' definiert ist. Nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung gilt $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$ und $G'(y) = g(y)^{-1}$ für alle $y \in J'$. Weil G die Umkehrfunktion von H ist, gilt $G \circ \varphi = F$ auf dem gesamten Intervall I' , und für alle $t \in I'$ gilt auf Grund der Kettenregel

$$f(t) = F'(t) = (G \circ \varphi)'(t) = G'(\varphi(t))\varphi'(t) = g(\varphi(t))^{-1}\varphi'(t)$$

was zu $\varphi'(t) = f(t)g(\varphi(t))$ umgeformt werden kann. Wegen $G(b) = 0$ gilt außerdem $H(0) = b$ und somit $\varphi(a) = (H \circ F)(a) = H(0) = b$. Ingesamt ist damit gezeigt, dass φ tatsächlich eine durch (a, b) verlaufende Lösung der DGL ist.

Zum Beweis der Eindeutigkeit sei $\psi : I' \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Lösung der DGL durch (a, b) . Dann folgt $\psi'(t) = f(t)g(\psi(t))$ für alle $t \in I'$. Da $g \circ \psi$ stetig ist wegen $g(\psi(a)) = g(b) \neq 0$ existiert eine offene Intervallumgebung $I'' \subseteq I'$ von a mit $\psi(I'') \subseteq J'$. Es folgt dann $g(\psi(t)) \neq 0$ für alle $t \in I''$. Die Gleichung kann dann zu $g(\psi(t))^{-1}\psi'(t) = f(t)$ umgestellt werden. Es gilt also $G'(\psi(t))\psi'(t) = F'(t)$ für alle $t \in I''$, und Anwendung des Integrals \int_a^x auf beiden Seiten liefert $(G \circ \psi)(x) = F(x)$ für alle $x \in I''$. Die Gleichung $G \circ \psi = F$ kann zu $\psi = H \circ F$ umgestellt werden; dies zeigt, dass ψ auf I'' mit φ übereinstimmt.

Nehmen wir nun an, dass ein Punkt $x \in I'$ mit $\varphi(x) \neq \psi(x)$ existiert. O.B.d.A. nehmen wir an, dass $x > a$ ist; im Fall $x < a$ verläuft die Argumentation analog. Definieren wir $x_0 = \sup\{x \in I' \mid \varphi|_{[a,x]} = \psi|_{[a,x]}\}$, dann gilt $x_0 > a$ und $x_0 \in I$. Auf Grund der Stetigkeit von φ und ψ gilt außerdem $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$. Dieselbe Überlegung, angewendet auf x_0 an Stelle von a , zeigt, dass φ in einer offenen Umgebung von x_0 mit ψ übereinstimmt. Aber dies steht zur Definition von x_0 im Widerspruch. Also müssen φ und ψ auf ganz I' übereinstimmen. \square

Um das Lösungsverfahren zu illustrieren, bestimmen wir für jedes $c \in \mathbb{R}^+$ eine Lösung φ_c der Differenzialgleichung

$$y' = y^2 \quad \text{mit} \quad \varphi_c(0) = c$$

im Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Dazu betrachten wir die Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$ und $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $y \mapsto y^2$. Die zugehörigen Funktionen F und G sind dann definiert durch

$$F(x) = \int_0^x dt = x \quad \text{und} \quad G(y) = \int_c^y \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} \Big|_c^y = \frac{1}{c} - \frac{1}{y}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}^+$. Wegen $G(]0, +\infty[) =]-\infty, \frac{1}{c}[$ können wir $I' =]-\infty, \frac{1}{c}[$ wählen; dies ist das maximale offene Intervall mit $F(I') = I' \subseteq G(]0, +\infty[)$. Die Umkehrfunktion H von G erhält man durch die Umformung

$$x = G(y) \Leftrightarrow x = \frac{1}{c} - \frac{1}{y} \Leftrightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{c} - x \Leftrightarrow y = \frac{1}{\frac{1}{c} - x} = \frac{c}{1 - cx},$$

die gesuchte Funktion ist also $y = H(x)$. Für alle $x \in I'$ gilt $H(F(x)) = H(x) = \frac{c}{1 - cx}$. Durch $\varphi_c(x) = \frac{c}{1 - cx}$ ist also eine Lösung $\varphi_c : I' \rightarrow \mathbb{R}$ der DGL mit $\varphi_c(0) = c$ definiert. Tatsächlich gilt

$$\varphi_c'(x) = (-c^2)(-1)(1 - cx)^{-2} = \frac{c^2}{(1 - cx)^2} = \left(\frac{c}{1 - cx}\right)^2 = \varphi_c(x)^2.$$

für alle $x \in I'$.

Im Fall $g(b) = 0$ können durch den Punkt (a, b) unendlich viele verschiedene Lösungen verlaufen. Als Beispiel betrachten wir die DGL $y' = \sqrt{|y|}$ mit dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}^2$. Hier erhält man für alle $a \in \mathbb{R}$ jeweils unendlich viele Lösungen durch den Punkt $(a, 0)$, sogar in jeder beliebig kleinen Umgebung von $(a, 0)$. Sind nämlich $b, c \in \mathbb{R}$ mit $b < a < c$, dann ist zum Beispiel die Funktion $\varphi_{bc} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\varphi_{bc}(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(t-b)^2 & \text{für } t < b \\ 0 & \text{für } b \leq t < c \\ \frac{1}{4}(t-c)^2 & \text{für } t \geq c \end{cases}$$

eine Lösung. Denn für $t < b$ ist $\varphi'_{bc}(t) = -\frac{1}{2}(t-b)$ und ebenso $\sqrt{|\varphi_{bc}(t)|} = \sqrt{\frac{1}{4}(t-b)^2} = \frac{1}{2}|t-b| = -\frac{1}{2}(t-b)$ wegen $t-b < 0$. Auch für $t \geq c$ ist die DGL wegen $\varphi'_{bc}(t) = \frac{1}{2}(t-c)$ und $\sqrt{|\varphi_{bc}(t)|} = \sqrt{\frac{1}{4}(t-c)^2} = \frac{1}{2}|t-c| = \frac{1}{2}(t-c)$ erfüllt. Für $b < t < c$ gilt offenbar $\varphi'_{bc}(t) = 0 = \sqrt{|\varphi_{bc}(t)|}$. Durch Überprüfung der links- und rechtsseitigen Ableitung überprüft man, dass diese Gleichungen auch in den Punkten b und c erfüllt sind.

Im Fall $g(b) = 0$ ist auf jeden Fall $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto b$ eine Lösung von $y' = f(x)g(y)$ durch den Punkt (a, b) . Wir formulieren noch ein hinreichendes Kriterium, dass die Eindeutigkeit auch in dieser Situation sicherstellt.

Proposition 2.3 Seien die Bezeichnungen wie in Satz 2.2 gewählt. Ist $g(b) = 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}^+$ mit der Eigenschaft, dass $g(y) > 0$ für alle $y \in]b, b + \alpha]$ gilt und das uneigentliche Integral

$$\int_b^{b+\alpha} \frac{dy}{g(y)}$$

divergiert, dann gibt es keine Lösung $\varphi : I' \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem offenen Teilintervall $I' \subseteq I$ mit $a \in I'$ und $\varphi(t) > b$ für ein $t \in I'$.

Beweis: Nehmen wir an, dass die angegebene Bedingung erfüllt ist, aber dennoch eine Lösung φ wie angegeben existiert, wobei $t_1 \in I'$ mit $\varphi(t_1) > b$ sei. O.B.d.A. können wir $t_1 > a$ annehmen; im Fall $t_1 < a$ verläuft die Argumentation analog. Setzen wir $t_0 = \sup\{t \in [a, t_1[\mid \varphi(t) = b\}$, dann gilt $t_0 < t_1$, $\varphi(t_0) = b$ (auf Grund der Stetigkeit von φ) und $\varphi(t) > b$ für alle $t \in]t_0, t_1]$, denn nach Definition des Supremums ist $\varphi(t) = b$ für diese t ausgeschlossen, und auch $\varphi(t) < b$ würde auf Grund des Zwischenwertsatzes einen Widerspruch zur Definition liefern. Durch eventuelle Verkleinerung von t_1 können wir erreichen, dass $\varphi(t) \in]b, b + \alpha]$ für alle $t \in]t_0, t_1]$ gilt. Es folgt dann $g(\varphi(t)) > 0$ für all diese t .

Weil φ eine Lösung der DGL ist, gilt außerdem jeweils $\varphi'(t) = f(t)g(\varphi(t))$. Sei $x \in]t_0, t_1]$. Division durch $g(\varphi(t))$ und Integration über $[x, t_1]$ auf beiden Seiten liefert

$$\int_x^{t_1} \frac{\varphi'(t)}{g(\varphi(t))} dt = \int_x^{t_1} f(t) dt ,$$

was durch Anwendung der Substitutionsregel auf die Form

$$\int_{\varphi(x)}^{\varphi(t_1)} \frac{ds}{g(s)} = \int_x^{t_1} f(t) dt$$

gebracht werden kann. Lassen wir nun x innerhalb des Intervalls $]t_0, t_1]$ gegen t_0 laufen, dann läuft $\varphi(x)$ gegen $\varphi(t_0) = b$, und auf Grund unserer Voraussetzung divergiert das Integral auf der linken Seite der Gleichung. Die

rechte Seite dagegen ist für $x \rightarrow t_0$ konvergent auf Grund der Stetigkeit von f . Die Annahme der Existenz einer solchen Lösung hat also zu einem Widerspruch geführt. \square

Genauso zeigt man: Ist $g(b) = 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}^+$ mit der Eigenschaft, dass $g(y) < 0$ für alle $y \in [b - \alpha, b[$ gilt und das uneigentliche Integral $\int_{b-\alpha}^b g(y)^{-1} dy$ divergiert, dann gibt es keine Lösung $\varphi : I' \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem offenen Teilintervall $I' \subseteq I$ mit $a \in I'$ und $\varphi(t) < b$ für ein $t \in I'$. Sind beide Bedingungen zugleich erfüllt, dann ist die konstante Funktion mit dem Wert b also tatsächlich die einzige Lösung auf I durch den Punkt (a, b) .

2.2 Lineare Differenzialgleichungen

Definition 2.4 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, und seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann nennt man

$$y' = f(x)y + g(x)$$

eine **lineare DGL** erster Ordnung. Ist $g(x) = 0$ für alle $x \in I$, dann spricht man von einer **homogenen**, ansonsten von einer **inhomogenen** Differenzialgleichung.

Folgende allgemeine Aussagen lassen sich über die Lösungsmenge linearer DGL formulieren.

Proposition 2.5

- (i) Für jedes Paar $(a, b) \in I \times \mathbb{R}$ existiert eine eindeutig bestimmte Lösung $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ der homogenen linearen DGL $y' = f(x)y$ durch (a, b) . Diese ist gegeben durch $\varphi(t) = be^{F(t)}$ mit der Stammfunktion $F : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ von f .
- (ii) Sind φ_1, φ_2 Lösungen der homogenen linearen DGL, und ist $\lambda \in \mathbb{R}$, dann sind auch $\varphi_1 + \varphi_2$ und $\lambda\varphi_1$ Lösungen dieser DGL.
- (iii) Sei ψ_0 eine Lösung der inhomogenen DGL. Dann sind die Lösungen dieser DGL insgesamt die Funktionen der Form $\psi = \psi_0 + \varphi$, wobei φ die Lösungen der homogenen linearen DGL durchläuft.

Beweis: zu (i) Auf Grund des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung gilt $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$, und mit der Kettenregel erhalten wir $\varphi'(t) = be^{F(t)}F'(t) = be^{F(t)}f(t) = f(t)\varphi(t)$ auf Grund der Kettenregel, für beliebiges $t \in I$. Außerdem gilt $F(a) = 0$ und somit $\varphi(a) = be^{F(a)} = be^0 = b$. Die Lösung ist nach Satz 1.6 (ii) eindeutig bestimmt, weil die DGL einer lokalen Lipschitz-Bedingung genügt: Auf Grund der Stetigkeit von f existiert eine offene Umgebung $I' \subseteq I$ von a und eine konstante L , so dass $|f(x)| \leq L$ für alle $x \in I'$ gilt. Für alle $(x, y), (x, z) \in I' \times \mathbb{R}$ erhalten wir dann $|f(x)y - f(x)z| = |f(x)||y - z| \leq L|y - z|$.

zu (ii) Beide Gleichungen können direkt nachgerechnet werden: Für alle $t \in I$ gilt $(\varphi_1 + \varphi_2)'(t) = \varphi_1'(t) + \varphi_2'(t) = f(t)\varphi_1(t) + f(t)\varphi_2(t) = f(t)(\varphi_1 + \varphi_2)(t)$, und ebenso erhält man $(\lambda\varphi_1)'(t) = \lambda\varphi_1'(t) = \lambda f(t)\varphi_1(t) = f(t)(\lambda\varphi_1)(t)$.

zu (iii) Auch diese Äquivalenz überprüft man durch reines Einsetzen. Ist φ eine Lösung der homogenen und ψ_0 eine Lösung der inhomogenen DGL, dann ist $\psi = \psi_0 + \varphi$ ebenfalls eine Lösung der inhomogenen DGL, denn für alle $t \in I$ gilt jeweils $\psi'(t) = \psi_0'(t) + \varphi'(t) = f(t)\psi_0(t) + g(t) + f(t)\varphi(t) = f(t)(\psi_0 + \varphi)(t) + g(t) = f(t)\psi(t) + g(t)$. Ist umgekehrt ψ eine beliebige Lösung der inhomogenen DGL und definieren wir $\varphi = \psi - \psi_0$, dann gilt offenbar $\psi = \psi_0 + \varphi$, und φ ist eine Lösung der homogenen DGL, denn es gilt $\varphi'(t) = \psi'(t) - \psi_0'(t) = f(t)\psi(t) + g(t) - f(t)\psi_0(t) - g(t) = f(t)(\psi - \psi_0)(t) = f(t)\varphi(t)$. \square

Satz 2.6 (Variation der Konstanten)

Sei $(a, b) \in I \times \mathbb{R}$ vorgegeben und $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der homogenen linearen DGL $y' = f(x)y$ durch $(a, 1)$. Sei $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(t) = b + \int_a^t \frac{g(s)}{\varphi(s)} ds \quad \text{für alle } t \in I.$$

Dann ist $\psi = u\varphi$ die eindeutig bestimmte Lösung der inhomogenen linearen DGL $y' = f(x)y + g(x)$ durch den Punkt (a, b) .

Beweis: Dass es sich bei ψ um eine beliebige Lösung der inhomogenen DGL handelt, ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} \psi'(t) = f(t)\psi(t) + g(t) &\Leftrightarrow u(t)\varphi'(t) + u'(t)\varphi(t) = f(t)u(t)\varphi(t) + g(t) \Leftrightarrow \\ u(t)f(t)\varphi(t) + u'(t)\varphi(t) = u(t)f(t)\varphi(t) + g(t) &\Leftrightarrow u'(t)\varphi(t) = g(t) \Leftrightarrow u'(t) = \frac{g(t)}{\varphi(t)}, \end{aligned}$$

jeweils für alle $t \in I$. Nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung äquivalent dazu, dass $u(t) = b' + \int_a^t \frac{g(s)}{\varphi(s)} ds$ mit einer Konstanten $b' \in \mathbb{R}$ gilt. Die Lösung $\psi = u\varphi$ läuft genau dann durch den Punkt (a, b) , wenn $b' = u(a) = u(a)\varphi(1) = b$ gilt. Die Lösung ist nach Satz 1.6 (ii) eindeutig bestimmt, weil auch die inhomogene DGL einer lokalen Lipschitz-Bedingung genügt: Wiederum können wir eine offene Umgebung $I' \subseteq I$ von a und eine Konstante L wählen, so dass $|f(x)| \leq L$ für alle $x \in I'$ gilt. Für alle $(x, y), (x, z) \in I' \times \mathbb{R}$ erhalten wir dann $|(f(x)y + g(x)) - (f(x)z + g(x))| = |f(x)||y - z| \leq L|y - z|$. \square

Zur Illustration bestimmen wir für jedes $b \in \mathbb{R}$ eine Lösung $\psi_b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der DGL

$$y' = 2xy + x^3 \quad \text{mit } \psi_b(0) = b.$$

Diese inhomogene lineare DGL ist aus den Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = 2x$ und $g(x) = x^3$ aufgebaut. Die zugehörige Funktion F erhalten wir durch

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x 2t dt = t^2 \Big|_0^x = x^2.$$

Somit ist $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto e^{t^2}$ eine Lösung der homogenen linearen DGL $y' = 2xy$ mit $\varphi(0) = 1$. Um die inhomogene lineare DGL zu lösen, bestimmen wir die Hilfsfunktion u . Mit Hilfe der Substitutionsregel und durch partielle Integration erhalten wir

$$\begin{aligned} u(t) &= b + \int_0^t \frac{g(s)}{\varphi(s)} ds = b + \int_0^t \frac{s^3}{e^{s^2}} ds = b + \frac{1}{2} \int_0^t (2s)s^2 e^{-s^2} ds = \\ b + \frac{1}{2} \int_0^{t^2} se^{-s} ds &= b - \frac{1}{2} [se^{-s}]_0^{t^2} + \frac{1}{2} \int_0^{t^2} e^{-s} ds = b - \left[\frac{1}{2} se^{-s} + \frac{1}{2} e^{-s} \right]_0^{t^2} = \\ b - \frac{1}{2} t^2 e^{-t^2} - \frac{1}{2} e^{-t^2} + \frac{1}{2} &= b + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (t^2 + 1) e^{-t^2}. \end{aligned}$$

Durch $\psi_b(t) = \varphi(t)u(t) = (b + \frac{1}{2})e^{t^2} - \frac{1}{2}(t^2 + 1)$ ist also eine Lösung mit $\psi_b(0) = b$ gegeben.

2.3 Modifikation einer DGL durch Substitution

Satz 2.7 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $V \subseteq I \times \mathbb{R}$ ein Gebiet und $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Es sei $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Abbildung derart, dass für jedes $x \in I$ mit $V_x = \{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in V\} \neq \emptyset$ die Abbildung $\phi_x : V_x \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto \phi(x, y)$ ein C^1 -Diffeomorphismus auf ihre Bildmenge $\phi_x(V_x)$ ist. Für jedes offene Intervall $J \subseteq I$ und jede Funktion $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ sind dann äquivalent:

- (i) Die Funktion φ ist Lösung der DGL $y' = f(x, y)$.
- (ii) Die Funktion $\eta : J \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \phi(t, \varphi(t))$ ist eine Lösung von

$$y' = (\phi_x^{-1})'(y)^{-1} f(x, \phi_x^{-1}(y)) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, \phi_x^{-1}(y)).$$

Beweis: „(i) \Rightarrow (ii)“ Auf Grund der Voraussetzung gilt $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$. Die Ableitung von $t \mapsto (t, \varphi(t))$ ist gegeben durch $t \mapsto (1, \varphi'(t))$ und die totale Ableitung von ϕ durch

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) \quad \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y) \right) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) \quad \phi'_x(y) \right).$$

Durch Anwendung der mehrdimensionalen Kettenregel erhalten wir somit

$$\eta'(t) = \phi'_t(\varphi(t))\varphi'(t) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, \varphi(t)) = \phi'_t(\varphi(t))f(t, \varphi(t)) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, \varphi(t)).$$

Die Gleichung $\eta(t) = \phi(t, \varphi(t)) = \phi_t(\varphi(t))$ kann zu $\varphi(t) = \phi_t^{-1}(\eta(t))$ umgeformt werden. Die Ableitung von $\phi_t \circ \phi_t^{-1} = \text{id}_{V_t}$ liefert die Gleichung $(\phi'_t \circ \phi_t^{-1}) \cdot (\phi_t^{-1})' = 1$, was zu $((\phi_t^{-1})')^{-1} = \phi'_t \circ \phi_t^{-1}$ äquivalent ist. Setzen wir dies ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \eta'(t) &= \phi'_t(\phi_t^{-1}(\eta(t)))f(t, \phi_t^{-1}(\eta(t))) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, \phi_t^{-1}(\eta(t))) \\ &= (\phi_t^{-1})'(\eta(t))^{-1}f(t, \phi_t^{-1}(\eta(t))) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, \phi_t^{-1}(\eta(t))). \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass η eine Lösung der DGL $y' = (\phi_x^{-1})'(y)^{-1}f(x, \phi_x^{-1}(y)) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, \phi_x^{-1}(y))$ ist.

„(ii) \Rightarrow (i)“ Die Gleichung von oben

$$\eta'(t) = \phi'_t(\varphi(t))\varphi'(t) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, \varphi(t))$$

liefert durch Umstellen nach $\varphi'(t)$ die Identität

$$\varphi'(t) = \phi'_t(\varphi(t))^{-1} \left(\eta'(t) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, \varphi(t)) \right).$$

Auf Grund der Voraussetzung gilt $\eta'(t) = (\phi_t^{-1})'(\eta(t))^{-1}f(t, \phi_t^{-1}(\eta(t))) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, \phi_t^{-1}(\eta(t)))$. Setzen wir dies ein, so erhalten wir

$$\varphi'(t) = \phi'_t(\varphi(t))^{-1} \left((\phi_t^{-1})'(\eta(t))^{-1}f(t, \phi_t^{-1}(\eta(t))) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, \phi_t^{-1}(\eta(t))) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, \varphi(t)) \right).$$

Durch Einsetzen der Identität $\varphi(t) = \phi_t^{-1}(\eta(t))$ vereinfacht sich dies zu

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \phi_t'(\varphi(t))^{-1} \left((\phi_t^{-1})'(\eta(t))^{-1} f(t, \varphi(t)) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, \varphi(t)) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, \varphi(t)) \right) = \\ & \quad \phi_t'(\varphi(t))^{-1} (\phi_t^{-1})'(\eta(t))^{-1} f(t, \varphi(t)). \end{aligned}$$

Einsetzen von $\eta(t)$ in die Gleichung $((\phi_t^{-1})')^{-1} = \phi_t' \circ \phi_t^{-1}$ von oben ergibt wegen $\varphi(t) = \phi_t^{-1}(\eta(t))$ die Identität $(\phi_t^{-1})'(\eta(t))^{-1} = \phi_t'(\varphi(t))$. Setzen wir dies ein, so erhalten wir

$$\varphi'(t) = \phi_t'(\varphi(t))^{-1} \phi_t'(\varphi(t)) f(t, \varphi(t)) = f(t, \varphi(t)).$$

Dies zeigt, dass φ eine Lösung von $y' = f(x, y)$ ist. □

Wir demonstrieren die Anwendung von Satz 2.7 anhand zweier Beispiele.

- (1) Es seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit $\beta > 0$ und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Um die Differenzialgleichung

$$y' = f(\alpha x + \beta y + \gamma)$$

zu vereinfachen, betrachten wir die Substitutionsfunktion $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \alpha x + \beta y + \gamma$. Offenbar ist $\phi_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y \mapsto \alpha x + \beta y + \gamma$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ ein C^1 -Diffeomorphismus, deren Umkehrfunktion $\phi_x^{-1}(z) = \frac{1}{\beta}z - \frac{\alpha}{\beta}x - \frac{\gamma}{\beta}$ man durch die Umformung

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma \iff z - \alpha x - \gamma = \beta y \iff y = \frac{1}{\beta}z - \frac{\alpha}{\beta}x - \frac{\gamma}{\beta}$$

erhält. Nach Satz 2.7 führt dies wegen $(\phi_x^{-1})'(z) = \frac{1}{\beta}$, $\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) = \alpha$ und

$$f(\alpha x + \beta \phi_x^{-1}(y) + \gamma) = f(\alpha x + \beta(\frac{1}{\beta}y - \frac{\alpha}{\beta}x - \frac{\gamma}{\beta}) + \gamma) = f(y)$$

auf die modifizierte DGL $z' = \alpha + \beta f(z)$. Es handelt sich um eine DGL mit getrennten Variablen, die mit den Methoden aus Abschnitt 2.1 gelöst werden kann. Ist $\eta : J \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der modifizierten DGL, dann ist $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $\varphi(t) = \phi_t^{-1}(\eta(t)) = \frac{1}{\beta}\eta(t) - \frac{\alpha}{\beta}t - \frac{\gamma}{\beta}$ eine Lösung der ursprünglichen DGL.

- (ii) Es sei $V \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge, welche die x -Achse nicht schneidet, und es sei $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft $f(\sigma x, \sigma y) = f(x, y)$ für alle $(x, y) \in V$ und $\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wir betrachten die DGL $y' = f(x, y)$ mit dem Definitionsbereich V und wenden auf diese die Transformationsfunktion $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \frac{y}{x}$ an. Definieren wir U_x und ϕ_x wie im Satz, dann ist die Funktion $\phi_x : U_x \rightarrow \mathbb{R}$, $y \mapsto \frac{y}{x}$ ist wiederum für jedes x mit $U_x \neq \emptyset$ ein C^1 -Diffeomorphismus auf ihr Bild, mit der Umkehrfunktion $\phi_x^{-1} : \phi_x(U_x) \rightarrow \mathbb{R}$, $y \mapsto xy$. Wegen $(\phi_x^{-1})'(y) = x$, $f(x, \phi_x^{-1}(y)) = f(x, xy) = f(1, y)$ und $\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) = -\frac{y}{x^2}$ führt die Transformationsfunktion auf die modifizierte DGL mit getrennten Variablen

$$z' = \frac{f(1, z)}{x} + \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, \phi_x^{-1}(z)) = \frac{f(1, z)}{x} + \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, xz) = \frac{f(1, z)}{x} - \frac{xz}{x^2} = \frac{f(1, z) - z}{x}.$$

Ist $\eta : J \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung dieser DGL, dann ist durch $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi(t) = \phi_t^{-1}(\eta(t)) = t\eta(t)$ eine Lösung der ursprünglichen DGL definiert.

2.4 Exakte Differenzialgleichungen

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit der Lösbarkeit symmetrischer DGLs. Entscheidend ist dabei folgende Eigenschaft der einer solche DGL zu Grunde liegenden 1-Form.

Definition 2.8 Ist $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion, dann bezeichnet man die 1-Form

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

als **äußere Ableitung** von f . Eine 1-Form ω auf U wird **exakt** genannt, wenn eine partiell differenzierbare Funktion $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $dg = \omega$ existiert. Die Funktion g bezeichnet man in diesem Fall als **Stammfunktion** von ω .

Differenzialgleichungen in symmetrischer Form, die durch eine exakte 1-Form definiert sind, lassen sich oft auf einfachere Weise lösen.

Satz 2.9 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, ω eine stetige exakte 1-Form auf U und $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von ω . Für eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma : I \rightarrow U$ definiert auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ sind folgende Aussagen äquivalent.

- (i) Die Kurve γ ist eine Lösung der DGL $\omega(x, y) = 0$.
- (ii) Die Funktion $F \circ \gamma$ ist auf I konstant.

Beweis: „(ii) \Rightarrow (i)“ Für alle $t \in I$ gilt

$$\begin{aligned}\omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) &= \frac{\partial F}{\partial x}(\gamma(t)) dx(\gamma(t))(\gamma'(t)) + \frac{\partial F}{\partial y}(\gamma(t)) dy(\gamma(t))(\gamma'(t)) = \\ \frac{\partial F}{\partial x}(\gamma(t))e_1^*(\gamma'(t)) + \frac{\partial F}{\partial y}(\gamma(t))e_2^*(\gamma'(t)) &= \frac{\partial F}{\partial x}(\gamma(t))\gamma'_1(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(\gamma(t))\gamma'_2(t).\end{aligned}$$

Auf Grund der mehrdimensionale Kettenregel gilt

$$(F \circ \gamma)'(t) = F'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(\gamma(t)) & \frac{\partial F}{\partial y}(\gamma(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma'_1(t) \\ \gamma'_2(t) \end{pmatrix} = \frac{\partial F}{\partial x}(\gamma(t))\gamma'_1(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(\gamma(t))\gamma'_2(t).$$

Weil $F \circ \gamma$ nach Voraussetzung konstant ist, gilt jeweils $(F \circ \gamma)'(t) = 0$ und somit auch $\omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) = 0$. Also ist γ tatsächlich eine Lösung der DGL.

„(i) \Rightarrow (ii)“ Wie die Rechnung im ersten Teil des Beweises zeigt, ist die Voraussetzung äquivalent zu $(F \circ \gamma)'(t) = 0$ für alle $t \in I$. Daraus folgt, dass $F \circ \gamma$ auf dem Intervall I konstant ist. \square

Der dargestellte Sachverhalt lässt sich auch ohne den Begriff der Differenzialform formulieren.

Definition 2.10 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge, und seien $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Man bezeichnet die Differenzialgleichung

$$f(x, y) + g(x, y)y' = 0$$

als **exakt**, wenn eine C^1 -Funktion $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, deren Gradient ∇F mit $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ übereinstimmt. Man bezeichnet F dann als **Stammfunktion** der DGL.

Es sei daran erinnert, dass der Gradient einer Funktion $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ die Funktion $\nabla F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit den Komponenten $(\nabla F)_k = \frac{\partial F}{\partial x_k}$ für $1 \leq k \leq n$ ist. Nach Definition ist $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ also genau dann eine Stammfunktion der DGL $f(x, y) + g(x, y)y' = 0$, wenn $\partial_1 F = f$ und $\partial_2 F = g$ ist. Dies wiederum ist genau dann der Fall, wenn F eine Stammfunktion der 1-Form $\omega = f dx + g dy$ ist.

Folgerung 2.11 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, und seien $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Sei $f(x, y) + g(x, y)y' = 0$ eine exakte DGL und $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine zugehörige Stammfunktion. Für eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ sind dann folgende Aussagen äquivalent.

- (i) Die Funktion φ ist Lösung der DGL.
- (ii) Die Funktion $\tilde{\varphi} : I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto F(t, \varphi(t))$ ist konstant.

Beweis: Sei $\omega = f dx + g dy$, und sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $\gamma(t) = (t, \varphi(t))$. Wie in § 1 gezeigt wurde, ist φ genau dann eine Lösung der angegebenen DGL, wenn γ eine Lösung der symmetrischen DGL $\omega(x, y) = 0$ ist, mit der 1-Form $\omega = f dx + g dy$. Wie oben angemerkt, ist die Funktion F zugleich eine Stammfunktion von ω . Nach Satz 2.9 ist γ genau dann eine Lösung der symmetrischen DGL, wenn $F \circ \gamma$ konstant ist. Wegen $F \circ \gamma = \tilde{\varphi}$ ist dies gleichbedeutend damit, dass $\tilde{\varphi}$ konstant ist. \square

Wir zeigen anhand eines konkreten Beispiel, wie man die Lösungen einer exakten DGL bestimmt und betrachten dazu die Gleichung

$$(2xy + e^x) + x^2y' = 0.$$

Diese DGL ist exakt, denn $F(x, y) = e^x + x^2y$ ist eine Stammfunktion; es ist $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 2xy + e^x$ und $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = x^2$. Für jede Lösung $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ der DGL auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ existiert nach Folgerung 2.11 eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so dass

$$e^t + t^2\varphi(t) = c \quad \text{für alle } t \in I$$

erfüllt ist. Wenn wir nun beispielsweise eine Lösung φ durch den Punkt $(1, 0)$ suchen, dann muss $c = e$ gewählt werden, denn es ist $\varphi(1) = 0$ und somit $c = e^1 + 1^2 \cdot 0 = e$. Durch Umformung der Gleichung $e^t + t^2\varphi(t) = e$ finden wir die Lösung

$$\varphi(t) = \frac{e - e^t}{t^2}.$$

Sie ist definiert auf dem offenen Intervall $I =]0, +\infty[$.

Zumindest die lokale Existenz von Lösungen wird durch folgendes Kriterium sichergestellt.

Satz 2.12 Seien f, g stetige reellwertige Funktionen auf einem Gebiet $U \subseteq \mathbb{R}^2$, die eine exakte Differenzialgleichung

$$f(x, y) + g(x, y)y' = 0 \quad \text{definieren.}$$

Sei außerdem $(a, b) \in U$ ein Punkt mit $g(a, b) \neq 0$. Dann existiert eine auf einem offenen Intervall I definierte Lösung $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ durch den Punkt (a, b) , und dies ist auf dem Intervall I die einzige Lösung durch diesen Punkt.

Beweis: Sei $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion der DGL, wobei wir (nach eventueller Änderung von F durch eine Konstante) $F(a, b) = 0$ annehmen dürfen. Es gilt dann $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) = g(a, b) \neq 0$. Nach dem Satz über implizite Funktionen aus der Analysis mehrerer Variablen gibt es offene Intervalle $I, J \subseteq \mathbb{R}$ mit $a \in I, b \in J, I \times J \subseteq U$ und eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ der Eigenschaft, dass für alle $(x, y) \in I \times J$ die Äquivalenz

$$F(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \varphi(x)$$

erfüllt ist. Insbesondere gilt dann also $F(t, \varphi(t)) = 0$ für alle $t \in I$, und dies ist nach Folgerung 2.11 äquivalent dazu, dass φ eine Lösung der DGL darstellt. Wegen $F(a, b) = 0$ gilt insbesondere $\varphi(a) = b$.

Nehmen wir nun an, dass $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine weitere Lösung der DGL durch diesen Punkt ist. Dann nimmt die Funktion $t \mapsto F(t, \psi(t))$ auf dem Intervall I einen konstanten Wert $c \in \mathbb{R}$ an, wiederum auf Grund von Folgerung 2.11. Dabei ist $c = F(a, \psi(a)) = F(a, b) = 0$. Somit gilt $F(t, \psi(t)) = 0$ für alle $t \in I$. Weil $I \times J$ offen und $t \mapsto (t, \psi(t))$ stetig ist, und weil $(a, \psi(a)) = (a, b)$ in $I \times J$ liegt, gibt es ein offenes Teilintervall $I' \subseteq I$ mit $a \in I'$ und $(t, \psi(t)) \in I' \times J$ für alle $t \in I'$. Die Äquivalenz $F(x, y) \Leftrightarrow y = \varphi(x)$ ist erst recht für alle $(x, y) \in I' \times J$ gültig. Aus $F(t, \psi(t)) = 0$ für alle $t \in I'$ folgt somit $\psi(t) = \varphi(t)$ für alle $t \in I'$.

Um zu zeigen, dass diese Gleichung sogar für alle $t \in I$ erfüllt ist, setzen wir $t_1 = \sup\{t \in I \mid \psi|_{[a,t]} = \varphi|_{[a,t]}\}$. Nehmen wir an, dass t_1 nicht mit dem rechten Randpunkt von I übereinstimmt. Wegen der Stetigkeit von φ und ψ muss $\varphi(t_1) = \psi(t_1) \in J$ gelten, und weil J offen ist, existiert ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $\psi(t) \in J$ für alle $t \in [t_1, t_1 + \varepsilon[$. Dann zeigt aber dasselbe Argument wie oben, dass $\varphi(t) = \psi(t)$ auch noch für alle $t \in [t_1, t_1 + \varepsilon[$ erfüllt ist, im Widerspruch zur Definition von t_1 . Genauso zeigt man, dass $\psi(t) = \varphi(t)$ für alle t links von a erfüllt ist. \square

Die vorhergehenden Sätze zeigen, dass es eine wichtige Aufgabe ist, die Exaktheit einer 1-Form zu überprüfen. Um hierfür ein geeignetes Kriterium zu formulieren, wiederholen wir einen wichtigen Grundbegriff aus der Topologie. Sei X ein topologischer Raum, und seien $\gamma, \delta : [a, b] \rightarrow X$ stetige Funktionen, definiert auf einem kompakten Intervall $[a, b]$. Eine **Homotopie** zwischen γ und δ ist eine stetige Abbildung $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow X$ mit $H(s, 0) = \gamma(s)$ und $H(s, 1) = \delta(s)$ für alle $s \in [a, b]$. Gilt zusätzlich $H(a, t) = \gamma(a) = \delta(a)$ und $H(b, t) = \gamma(b) = \delta(b)$ für alle $t \in [0, 1]$, dann spricht man von einer Homotopie relativ zu den Endpunkten.

Eine geschlossene Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow X$, also eine Kurve mit $\gamma(a) = \gamma(b)$, wird **nullhomotop** oder **zusammenziehbar** genannt, wenn eine Homotopie zwischen γ und der konstanten Abbildung $c : [a, b] \rightarrow X, t \mapsto \gamma(a)$ relativ zu den Endpunkte existiert. Der topologische Raum X wird als **einfach zusammenhängend** bezeichnet, wenn er zusammenhängend und jede geschlossene Kurve in X nullhomotop ist. Es ist zum Beispiel leicht zu zeigen, dass sternförmige und insbesondere konvexe Gebiete im \mathbb{R}^n einfach zusammenhängend sind.

Satz 2.13 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und ω eine 1-Form auf U , $\omega = f dx + g dy$ mit stetig differenzierbaren Funktionen $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$. Ist ω exakt, dann gilt $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$ auf ganz U . Ist U einfach zusammenhängend, dann gilt auch die Umkehrung.

Beweis: Setzen wir voraus, dass ω exakt und F eine Stammfunktion von ω ist. Dann gilt $\frac{\partial F}{\partial x} = f$ und $\frac{\partial F}{\partial y} = g$. Daraus folgt

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}.$$

Die zweifach partiellen Ableitungen von F sind auf Grund unserer Voraussetzungen also stetig. Nach dem Satz von Schwarz aus der Analysis mehrerer Variablen stimmen sie also überein. Daraus folgt $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$.

Einen elementaren Beweis der Umkehrung für sternförmige Gebiete findet man zum Beispiel bei [Heu08] im Abschnitt 182 (wo er nicht für 1-Formen, sondern für Vektorfelder formuliert ist, was aber auf dasselbe hinausläuft). Die Voraussetzung an die Funktionen f und g ist gleichbedeutend mit der Feststellung, dass es sich bei ω um eine **geschlossene** 1-Form handelt. Die Aussage für einfach zusammenhängende Teilmengen ist somit ein Spezialfall des Poincaré-Lemmas, welches besagt, dass jede geschlossene 1-Form auf einer einfach zusammenhängenden Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ exakt ist. Der Beweis dieses Lemmas erfordert einige Hilfsmittel aus der Algebraischen Topologie, die wir hier aus Zeitgründen nicht bereitstellen können, die aber in jedem einschlägigen Lehrbuch zu finden sind.

Deshalb soll hier nur die grobe Beweisskizze angegeben werden. Die Aussage ist äquivalent zu der Feststellung, dass die erste de Rham-Kohomologie $H_{\text{dR}}^1(U)$, also der Faktorraum der geschlossenen modulo der exakten 1-Formen, gleich null ist. Nun ist sogar für jede beliebige orientierbare Mannigfaltigkeit M , erst recht also für Gebiete im \mathbb{R}^n , bekannt, dass $H_{\text{dR}}^1(M)$ kanonisch isomorph zum Dualraum von $H_1(M, \mathbb{R}) = H_1(M) \otimes \mathbb{R}$, der ersten reellen singulären Homologie von M , ist. Es genügt also zu zeigen, dass die erste singuläre Homologiegruppe $H_1(U)$ von U verschwindet. Dass das Gebiet U einfach zusammenhängend ist, ist gleichbedeutend mit der Trivialität $\pi_1(U)$ der ersten Fundamentalgruppe. Als Gebiet im \mathbb{R}^n ist U wegzusammenhängend, und für jeden wegzusammenhängenden topologischen Raum X ist die singuläre Kohomologie $H_1(X)$ kanonisch isomorph zu $\pi_1(X)^{\text{ab}}$, der maximalen abelschen Faktorgruppe der Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$. Es ist also tatsächlich $H_1(U) = \{0\}$. \square

Ist ω wie im Satz angegeben und existiert eine Stammfunktion F auf U , dann kann diese zumindest lokal durch folgendes Verfahren ermittelt werden: Zunächst wählt man einen beliebigen Punkt $(a, b) \in U$ und offene Intervalle $I, J \subseteq \mathbb{R}$ mit $a \in I$ und $b \in J$. O.B.d.A. dürfen wir $F(a, b) = 0$ annehmen; ansonsten ändern wir F durch eine Konstante ab. Nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung gilt für alle $x \in I$ dann

$$F(x, b) = \int_a^x \frac{\partial F}{\partial x}(t, b) dt = \int_a^x f(t, b) dt.$$

Ebenso erhalten wir für beliebige $y \in J$ dann

$$F(x, y) = F(x, b) + \int_b^y \frac{\partial F}{\partial y}(x, t) dt = F(x, b) + \int_b^y g(x, t) dt.$$

Natürlich kann auch in umgekehrter Reihenfolge vorgegangen werden, d.h. man berechnet zuerst $F(a, y)$ für alle $y \in J$ und dann $F(x, y)$ für alle $(x, y) \in I \times J$.

Als Beispiel betrachten wir auf dem \mathbb{R}^2 die 1-Form

$$\omega = (y^2 e^{xy} + 3x^2 y) dx + (x^3 + (1 + xy)e^{xy}) dy.$$

Setzen wir $f(x, y) = y^2 e^{xy} + 3x^2 y$ und $g(x, y) = x^3 + (1 + xy)e^{xy}$, dann gilt also $\omega = f dx + g dy$. Die Übereinstimmung der partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (xy^2 + 2y)e^{xy} + 3x^2 = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$$

zeigt nach Satz 2.13, dass ω exakt ist. Wir berechnen die eindeutig bestimmte Stammfunktion F von ω mit $F(0, 0) = 0$. Wir erhalten zunächst $F(x, 0) = \int_0^x f(t, 0) dt - \int_0^x 0 dt$ und dann im Fall $x \neq 0$ durch partielle Integration

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_0^y g(x, t) dt = \int_0^y (x^3 + (1 + xt)e^{xt}) dt = x^3 y + \int_0^y e^{xt} dt + x \int_0^y t e^{xt} dt \\ &= x^3 y + \frac{e^{xy} - 1}{x} + \frac{(xy - 1)e^{xy} + 1}{x} = x^3 y + \frac{e^{xy} - 1 + xy e^{xy} - e^{xy} + 1}{x} = x^3 y + y e^{xy}. \end{aligned}$$

Man überprüft nun unmittelbar, dass $F(x, y) = x^3 y + y e^{xy}$ auf dem gesamten \mathbb{R}^2 eine Stammfunktion von ω ist.

Leider sind die meisten 1-Formen nicht exakt. Häufig kann eine 1-Form aber durch Multiplikation mit einer geeigneten Funktion zu einer exakten 1-Form gemacht werden.

Definition 2.14 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $\omega = f dx + g dy$ eine 1-Form auf U , mit stetigen Funktionen f und g . Eine stetige Funktion $m : U \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ wird **integrierender Faktor** für ω genannt, wenn $m\omega$ eine exakte 1-Form ist.

Für die Lösung einer durch ω definierten symmetrischen DGL kann auch die 1-Form $m\omega$ genutzt werden, denn offenbar ist jede Kurve γ genau dann eine Lösung von $\omega(x, y) = 0$, wenn sie eine Lösung von $m(x, y)\omega(x, y) = 0$ ist. Aus Satz 2.13 folgt, dass eine Funktion $m : U \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ genau dann ein integrierender Faktor ist, wenn $\frac{\partial(mf)}{\partial y} = \frac{\partial(mg)}{\partial x}$ erfüllt ist. Auf Grund der Produktregel ist dies genau dann der Fall, wenn auf U die Gleichung

$$f(x, y) \frac{\partial m}{\partial y}(x, y) + m(x, y) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = g(x, y) \frac{\partial m}{\partial x}(x, y) + m(x, y) \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$$

gilt. Die Lösung dieser partiellen Differentialgleichung ist aber im Allgemeinen keine leichte Aufgabe. Man kann aber versuchen, einen integrierenden Faktor $m(x)$ zu finden, der nur von x (oder auch nur von y) abhängt. In diesem vereinfacht sich die zu lösende Gleichung zu

$$m(x) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = g(x, y) m'(x) + m(x) \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$$

was umgestellt werden kann zu

$$\frac{1}{g(x, y)} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \right) = \frac{m'(x)}{m(x)} = (\ln \circ m)'(x).$$

Als Beispiel betrachten wir die 1-Form

$$\omega = (2x^2 + 2xy^2 + 1)y dx + (3y^2 + x)dy.$$

Diese ist nicht exakt. Setzen wir aber $f(x, y) = (2x^2 + 2xy^2 + 1)y$ und $g(x, y) = 3y^2 + x$, dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{g(x, y)} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \right) &= \frac{1}{3y^2 + x} ((4xy^2 + 2x^2 + 2xy^2 + 1) - 1) \\ &= \frac{1}{3y^2 + x} (6xy^2 + 2x^2) = 2x. \end{aligned}$$

Ist $m(x)$ ein integrierender Faktor, dann gilt also $(\ln \circ m)'(x) = 2x$. Dies ist erfüllt, wenn $\ln(m(x)) = x^2$ und $m(x) = e^{x^2}$ gilt. Tatsächlich überprüft man leicht, dass $e^{x^2} \omega$ eine exakte 1-Form ist, mit $F(x, y) = (x + y^2)ye^{x^2}$ als Stammfunktion. Eine Kurve $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ ist also genau dann eine Lösung von $\omega(x, y) = 0$, wenn die Funktion

$$t \mapsto (\gamma_1(t) + \gamma_2(t)^2)\gamma_2(t)e^{\gamma_1(t)^2} \quad \text{konstant ist.}$$

Literaturverzeichnis

- [Aul10] Bernd Aulbach. *Gewöhnliche Differenzialgleichungen* -. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 2010. ISBN: 978-3-827-41492-2.
- [BF17] Dominik Bullach und Johannes Funk. *Vorbereitungskurs Staatsexamen Mathematik - Aufgabenbereiche Algebra und Analysis mit umfassenden Lösungen*. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 2017. ISBN: 978-3-658-18341-7.
- [Heu08] Harro Heuser. *Lehrbuch der Analysis. Teil 2* -. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2008. ISBN: 978-3-835-10208-8.
- [Heu13] Harro Heuser. *Gewöhnliche Differentialgleichungen - Einführung in Lehre und Gebrauch*. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 2013. ISBN: 978-3-322-93992-0.
- [Rog80] C. A. Rogers. "A Less Strange Version of Milnor's Proof of Brouwer's Fixed-Point Theorem". In: *American Mathematical Monthly* 87.7 (1980), S. 525–527.
- [Wal13] Wolfgang Walter. *Gewöhnliche Differentialgleichungen - Eine Einführung*. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 2013. ISBN: 978-3-642-57240-1.