Erinnerung: eindimensionale Umkehrregel

geg: $I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar und streng monoton wachsend

Dann ist auch $J = f(I)$ ein offenes Intervall und $f: I \to J$ bijektiv. Die Umkehrabbildung

$g: J \to I$ ist stetig diff'bar und es gilt

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} \quad \text{für alle } y \in J.$$

Anwendungsbeispiele

(i) $f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \quad (x \in \mathbb{R}^+)$

(ii) $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x \in \mathbb{R}^+)$

(iii) $f(x) = \arcsin(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (x \in \,]-1,1[\,)$

(iv) $f(x) = \arctan(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$

Vorbereitung zur Umkehrregel

Lemma (7.1)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine in $a \in U$ differenzierbare Abbildung. Dann gibt es eine offene Umgebung $U' \subseteq \mathbb{R}^n$ von $0_{\mathbb{R}^n}$ und eine in $0_{\mathbb{R}^n}$ stetige Abbildungen $\phi : U' \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ mit $\phi(0_{\mathbb{R}^n}) = df(a)$ und

$$f(a+h) \quad = \quad f(a) + \phi(h)(h) \qquad \text{für alle} \quad h \in U'.$$

Beweis von Lemma 7.1:

geg.: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \mathbb{R}^m$

$a \in U$ Punkt, in dem f diff'bar ist

Nach Def. gibt es eine offene Umg. U' von $0_{\mathbb{R}^n}$ und eine Abb. $\psi: U' \to \mathbb{R}^m$ mit

$f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + \psi(h) \quad \forall h \in U'$

und $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{\|h\|} \psi(h) = 0_{\mathbb{R}^m}$

ges.: Abb. $\phi: U' \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ mit

$f(a+h) = f(a) + \phi(h)(h) \quad \forall h \in U'$

gleichbed.: $df(a)(h) + \psi(h) = \phi(h)(h)$
für alle $h \in U'$. Dies ist wiederum gleichbedeutend mit der Existenz einer Abb.
$\mathcal{Q} : U' \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, so dass
$$df(a)(h) + \psi(h) = df(a)(h) + \mathcal{Q}(h)(h)$$
für alle $h \in U'$ $\iff$ $\mathcal{Q}(h)(h) \overset{(*)}{=} \psi(h)$ $\forall h \in U'$
Schreiben wir $\mathcal{Q}$ in der Form $\mathcal{Q}(h) = \phi_{R(h)}$ mit einer Fkt. $R : U' \to M_{m \times n, \mathbb{R}}$, dann ist $(*)$ äquivalent zu $R(h) \cdot h \overset{(**)}{=} \psi(h)$ $\forall h \in U'$. Schreibe $R(h) = (r_{ij}(h))$ $\forall h \in U'$.

Dann gilt (**) $\Longleftrightarrow$

$$\sum_{j=1}^{n} r_{ij}(h)\, h_j = \psi_i(h) \quad \text{für } 1 \le i \le m$$

und alle $h \in U'$. Für $h \in U' \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ ist dies gleichbed. mit

$$\sum_{j=1}^{n} r_{ij}(h)\, h_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\psi_i(h)\, h_j}{\|h\|_2^2}\, h_j$$

Definieren wir also die Fkt. $r_{ij} : U' \to \mathbb{R}$ durch

$$r_{ij}(h) = \begin{cases} 0 & \text{falls } h = 0_{\mathbb{R}^n} \\ \dfrac{\psi_i(h)\, h_j}{\|h\|_2^2} & \text{falls } h \neq 0_{\mathbb{R}^n} \end{cases}$$

dann ist die Gleichung erfüllt $\square$

Die Umkehrregel (vorläufige Fassung)

Proposition (7.2)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, dass auch $V = f(U)$ offen in $\mathbb{R}^n$ ist und eine Umkehrabbildung $g : V \to \mathbb{R}^n$ von f existiert. Sei f in $a \in U$ differenzierbar, und es gelte $\det df(a) \neq 0$. Schließlich setzen wir noch voraus, dass g in $b = f(a)$ stetig ist. Dann ist g in b differenzierbar, und es gilt

$$dg(b) \quad = \quad df(a)^{-1}.$$

Beweisskizze zu Satz 7.2

- Mit der Kettenregel wird der Beweis auf den Fall $a = b = 0_{R^n}$ zurückgeführt.
- Anwendung von Lemma 7.1 liefert eine offene Umgebung U' von $0_{\mathbb{R}^n}$ und eine Abbildung $\phi : U' \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit $f(h) = \phi(h)(h)$ für alle $h \in U'$ und $\lim_{h\to 0} \phi(h) = df(0_{\mathbb{R}^n})$.
- Wegen $\det df(0_{\mathbb{R}^n}) \neq 0$ und auf Grund des Grenzwerts gilt $\det \phi(h) \neq 0$ für h in einer Umgebung von $0_{\mathbb{R}^n}$.
- Nach Verkleinerung von U' kann also angenommen werden, dass $\phi(h)$ für alle $h \in U'$ invertierbar ist.
- Mit Hilfe der Darstellung der inversen Matrix durch die adjunkte Matrix aus der Linearen Algebra zeigt man, dass auch die Funktion $h \mapsto \phi(h)^{-1}$ im Nullpunkt stetig ist.
  Es gilt also $\lim_{h\to 0} \phi(h)^{-1} = df(0_{\mathbb{R}^n})^{-1}$.

Beweisskizze zu Satz 7.2 (Forts.)

- Sei $V' = f(U')$. Seien $h \in U'$ und $k \in V'$ jeweils Punkte, die durch $k = f(h) \Leftrightarrow g(k) = h$ zusammenhängen. Anwendung von $\phi(h)^{-1}$ auf die Gleichung $k = f(h) = \phi(h)(h)$ liefert $\phi(h)^{-1}(k) = h$.

- Für die Umkehrabbildung g von f erhalten wir somit für $k \in V'$ die Darstellung

$$g(k) = h = \phi(h)^{-1}(k) = \phi(g(k))^{-1}(k).$$

- Für $k \to 0_{\mathbb{R}^n}$ läuft $g(k)$ gegen $0_{\mathbb{R}^n}$ und und auf Grund der Stetigkeit somit $\phi(g(k))^{-1}$ gegen $df(0_{\mathbb{R}^n})^{-1}$ (siehe oben).

Beweisskizze zu Satz 7.2 (Forts.)

- Sei $\rho : U' \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ definiert durch

$$\rho(k) \quad = \quad \phi(g(k))^{-1} - df(0_{\mathbb{R}^n})^{-1}.$$

  Dann läuft $\rho(k)$ für $k \to 0_{\mathbb{R}^n}$ in $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ gegen die Nullabbildung, und für alle $k \in V'$ gilt

$$g(k) = \phi(g(k))^{-1}(k) = df(0_{\mathbb{R}^n})^{-1}(k) + \rho(k)(k).$$

- Daraus kann abgeleitet werden, dass g im Nullpunkt total differenzierbar ist, mit $dg(0_{\mathbb{R}^n}) = df(0_{\mathbb{R}^n})^{-1}$ als totaler Ableitung und dem Fehlerterm $\psi(k) = \rho(k)(k)$.

zur Stetigkeit der inversen Matrix in Abhängigkeit von $h \in U'$ im Beweis von Satz 7.2

Bsp $n = 2$ $\quad \phi(h) = \begin{pmatrix} a(h) & b(h) \\ c(h) & d(h) \end{pmatrix} \quad \forall h \in U'$

für geeignete Funktionen $a, b, c, d : U' \to \mathbb{R}$, die in $0_{\mathbb{R}^2}$ stetig sind (wobei $\phi(0_{\mathbb{R}^2}) = df(0_{\mathbb{R}^2})$)

$$\Rightarrow \phi(h)^{-1} = \frac{1}{a(h)d(h) - b(h)c(h)} \begin{pmatrix} d(h) & -b(h) \\ -c(h) & a(h) \end{pmatrix}$$

Definition der $\mathscr{C}^1$-Diffeomorphismen

Definition (7.3)

Sei $U \subseteq V$ eine offene Teilmenge.

- Eine stetig (total) differenzierbare Abbildung $f : U \to W$ wird auch $\mathscr{C}^1$-Abbildung genannt.
- Ist f eine Bijektion auf eine offene Teilmenge $\tilde{W} \subseteq W$, und ist die Umkehrabbildung $f^{-1} : \tilde{W} \to U$ ebenfalls eine $\mathscr{C}^1$-Abbildung, dann spricht man von einem $\mathscr{C}^1$-Diffeomorphismus zwischen U und $\tilde{W}$.

Der Schrankensatz

Satz (7.4)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine $\mathscr{C}^1$-Abbildung und die Konstante $\gamma_U \in \mathbb{R}^+$ gegeben durch

$$\gamma_U \quad = \quad \sup\{\|df(x)\| \mid x \in U\} \quad ,$$

dann gilt

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \quad \leq \quad \gamma_U \|x_1 - x_2\|$$

für alle $x_1, x_2 \in U$ mit der Eigenschaft, dass die Verbindungsstrecke $[x_1, x_2]$ in U enthalten ist.

Beweis von Satz 7.4:

Seien $f_1, \dots, f_m : U \to \mathbb{R}$ die Komponenten der Funktion f. Seien $x_1, x_2 \in U$ mit $[x_1, x_2] \subseteq U$ und $v = x_2 - x_1$. Der Mittelwertsatz für Richtungsableitungen (Satz 5.5) liefert für $1 \leq i \leq m$ jeweils einen Punkt $a_i \in]x_1, x_2[$ mit

$$f_i(x_2) - f_i(x_1) = \partial_v f_i(a_i) = df_i(a_i)(v).$$

$$\Rightarrow |f_i(x_2) - f_i(x_1)| = |df_i(a_i)(v)| \text{ für } 1 \leq i \leq m$$

$$f_i(x_2) - f_i(x_1) = \partial_v f_i(a_i) = df_i(a_i)(v).$$

Ist $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$ die Maximumsnorm auf $\mathbb{R}^n$, dann gilt $\|f(x_2) - f(x_1)\| = \max\{|f_i(x_2) - f_i(x_1)| \mid 1 \le i \le m\}$

$\Rightarrow \|f(x_2) - f(x_1)\| = \max\{|df_i(a_i)(v)| \mid 1 \le i \le m\}$

Für $1 \le i \le m$ gilt jeweils $|df_i(a_i)(v)| \le \|df(a_i)(v)\|$

$\le \|df(a_i)\| \cdot \|v\| \underset{a_i \in U}{=} \gamma_U \|v\| = \gamma_U \|x_2 - x_1\|$

$\Rightarrow \|f(x_2) - f(x_1)\| \le \gamma_U \|x_2 - x_1\|.$ $\square$

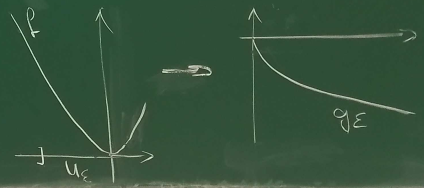
Def: Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen und $f: U \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Sei $a \in U$. Man sagt, f ist in a lokal umkehrbar, wenn ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass $f|_{]a-\varepsilon, a+\varepsilon[}$ injektiv ist. (Es existiert dann eine Umkehrfunktion $g: V_\varepsilon \to U_\varepsilon$, $f|_{U_\varepsilon}: U_\varepsilon \to V_\varepsilon$ $\to V_\varepsilon$, wobei $U_\varepsilon =]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$, $V_\varepsilon = f(U_\varepsilon)$ ist.)

Bsp: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$.

(i) Ist $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, dann ist f in a lokal

umkehrbar. (Setze $\varepsilon = a$ und $V_\varepsilon =]0, 4\varepsilon^2[$.
Dann ist $g: V_\varepsilon \to U_\varepsilon,\ y \mapsto \sqrt{y}$ die Umkehrfkt. von $f_\varepsilon: U_\varepsilon \to V_\varepsilon$, wobei $U_\varepsilon =]0, 2\varepsilon[$ und $f_\varepsilon = f|_{U_\varepsilon}$ ist.)

(ii) ebenso: f ist lokal umkehrbar in a, falls $a < 0$ ist (setze $\varepsilon = -a$, $U_\varepsilon =]-2\varepsilon, 0[$, $V_\varepsilon =]0, 4\varepsilon^2[$, $f_\varepsilon = f|_{U_\varepsilon}$, $g_\varepsilon: V_\varepsilon \to U_\varepsilon$, $y \mapsto -\sqrt{y}$



$\varepsilon^2[$

lm-

$]0,2\varepsilon[$

ls

$,0[$.

$\to U_\varepsilon$,

g_ε

(iii) Im Punkt 0 ist f <u>nicht</u> lokal umkehrbar, denn: Sonst gäbe es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, so dass $f|_{]-\varepsilon,\varepsilon[}$ injektiv ist. aber: $\pm\frac{1}{2}\varepsilon \in \,]-\varepsilon,\varepsilon[$, $-\frac{1}{2}\varepsilon \neq \frac{1}{2}\varepsilon$, $f(-\frac{1}{2}\varepsilon) = \frac{1}{4}\varepsilon^2 = f(\frac{1}{2}\varepsilon)$ ↯ zur Injektivität.

Der Satz über die lokale Umkehrbarkeit

Satz (7.5)

Sei $f : U \to W$ eine $\mathscr{C}^1$-Abbildung. Ist $a \in U$ ein Punkt mit der Eigenschaft, dass $df(a) \in \mathscr{L}(V, W)$ bijektiv ist, dann gibt es eine offene Umgebung $\tilde{U} \subseteq U$ von a und eine offene Umgebung $\tilde{W} \subseteq W$ von $b = f(a)$ mit der Eigenschaft, dass durch $f|_{\tilde{U}}$ $\mathscr{C}^1$-Diffeomorphismus zwischen $\tilde{U}$ und $\tilde{W}$ definiert ist.

Beweisskizze zu Satz 7.5

- Zunächst wird der Beweis durch Anwendung der Kettenregel auf den Fall $a = f(a) = 0_{\mathbb{R}^n}$ und $f'(0_{\mathbb{R}^n}) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ zurückgeführt.
- Für jedes w in der Nähe von $0_{\mathbb{R}^n}$ ist die Lösung der Gleichung $w = f(v)$ äquivalent zur Lösung des Fixpunktproblems $\varphi_w(v) = v$ für die Hilfsfunktion $\varphi_w(x) = w + x - f(x)$.
- Mit Hilfe von $f'(0_{\mathbb{R}^n}) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$, der Stetigkeit von f' im Nullpunkt und dem Schrankensatz kann gezeigt werden, dass φ_w für w hinreichend nahe bei $0_{\mathbb{R}^n}$ einen hinreichend kleinen abgeschlossenen Ball $\bar{B}_{2r}(0_{\mathbb{R}^n})$ in sich abbildet und zudem auf diesem Ball eine Kontraktion darstellt.

Beweisskizze zu Satz 7.5 (Forts.)

- Der Banachsche Fixpunktsatz zeigt nun, dass φ_w für diese w in dem Ball jeweils einen eindeutigen Fixpunkt besitzt. Der Punkt w unter f besitzt in dem Ball $\bar{B}_{2r}(0_{\mathbb{R}^n})$ also ein eindeutig bestimmtes Urbild v.
- Wie man anhand der Kontraktionseigenschaft leicht sieht, bildet φ_w ins Innere von $\bar{B}_{2r}(0_{\mathbb{R}^n})$ ab. Der Fixpunkt v muss deshalb sogar in $B_{2r}(0_{\mathbb{R}^n})$ liegen.
- Setzt man nun $\tilde{W} = B_r(0_{\mathbb{R}^n})$ und $\tilde{U} = f^{-1}(\tilde{W}) \cap B_{2r}(0_{\mathbb{R}^n})$, dann wird $f|_{\tilde{U}}$ zu einer Bijektion zwischen $\tilde{U}$ und $\tilde{W}$.
- Mit Hilfe der Kontraktionseigenschaft von $\varphi_{0_{\mathbb{R}^n}}$ zeigt man nun noch, dass die Umkehrfunktion $g : \tilde{W} \to \tilde{U}$ von $f|_{\tilde{U}}$ stetig, die Funktion $f|_{\tilde{U}}$ also ein Homöomorphismus ist.
- Mit der Umkehrregel folgt, dass es sich sogar um einen $\mathscr{C}^1$-Diffeomorphismus handelt.

Folgerung (7.6)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine injektive, stetig differenzierbare Abbildung mit der Eigenschaft, dass $f'(x)$ für jedes $x \in U$ invertierbar ist. Dann ist $V = f(U)$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, und f ist ein $\mathscr{C}^1$-Diffeomorphismus zwischen U und V.

Die Umkehregel (endgültige Fassung)

Satz (7.7)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine $\mathscr{C}^1$-Abbildung. Sei $a \in U$ ein Punkt mit $\det f'(a) \neq 0$. Dann existieren offene Umgebungen $U_1 \subseteq U$ von a und $V_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ von $b = f(a)$, so dass durch $f_1 = f|_{U_1}$ ein $\mathscr{C}^1$-Diffeomorphismus $U_1 \to V_1$ definiert ist. Die Ableitung der Umkehrabbildung $f_1^{-1} : V_1 \to U_1$ erfüllt dabei

$$d(f_1^{-1})(y) \quad = \quad df(f_1^{-1}(y))^{-1}$$

für alle $y \in V_1$. Insbesondere gilt also $d(f_1^{-1})(b) = df(a)^{-1}$.