

Satz (6.9)

Sei $U \subseteq V$ offen, $a \in U$, und seien $f, g : U \rightarrow W$ zwei Abbildungen, die beide in $a \in U$ differenzierbar sind. Dann sind auch $f + g$ und λf für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ im Punkt a differenzierbar, und es gilt

$$d(f + g)(a) = df(a) + dg(a) \quad \text{und} \quad d(\lambda f)(a) = \lambda df(a).$$

Satz (6.10)

Sei $U \subseteq V$ offen, $a \in U$, und seien $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ beide in a differenzierbar. Dann ist auch die Funktion fg in a differenzierbar, und es gilt

$$d(fg)(a) = f(a)dg(a) + g(a)df(a).$$

Folgerung (6.11)

Sei $U \subseteq V$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und $g(x) = f(x)^n$ für alle $x \in U$. Ist f in einem Punkt $a \in U$ differenzierbar, dann auch g , und es gilt

$$dg(a) = nf(a)^{n-1}df(a).$$

Beispiel zur Anwendung der Produktregel

Betrachte $f, g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ geg. durch

$$f(x, y, z) = x + z, \quad g(x, y, z) = y^2 z$$

$$df(x, y, z) = (1 \ 0 \ 1), \quad dg(x, y, z) = (0 \ 2yz \ y^2)$$

Laut Produktregel gilt

$$\begin{aligned} d(fg)(x, y, z) &= f(x, y, z) dg(x, y, z) + g(x, y, z) df(x, y, z) \\ &= (x+z)(0 \ 2yz \ y^2) + y^2 z (1 \ 0 \ 1) \\ &= (y^2 z \ 2xyz + 2yz^2 \ xy^2 + zy^2 z) \end{aligned}$$

direkte Berechnung der Ableitung:

$$(fg)(x,y,z) = f(x,y,z) \cdot g(x,y,z) = (x+z) y^2 z \\ = x y^2 z + y^2 z^2$$

$$d(fg)(x,y,z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}(fg)(x,y,z) \quad \frac{\partial}{\partial y}(fg)(x,y,z) \quad \frac{\partial}{\partial z}(fg)(x,y,z) \right) \\ = (y^2 z \quad 2xy z + 2y z^2 \quad xy^2 + 2y^2 z)$$

Beweis von Satz 6.10 :

geg.: $f, g: U \rightarrow W$ wobei $U \subseteq V$ offen,
 V, W endl.-dim. $\mathbb{R}$ -Vektorräume
und $a \in U$, f, g diff'bar in a

z.zg.: fg diff'bar in a , und

$$d(fg)(a) = f(a)dg(a) + g(a)df(a)$$

f diff'bar in $a \Rightarrow$ Es gibt auf

$U_a = \{x \in U \mid a+x \in U\}$ eine in a

stetige Funktion γ_1 mit $\gamma_1(0_v) = 0$

$$\text{und } \boxed{f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + \|h\| \cdot \psi_1(h)}$$

für alle $h \in U_a$

g diff'bar in $a \Rightarrow$ Es gibt auf U_a eine stetige Fkt. φ mit $\varphi(0_v) = 0$ und

$$\boxed{g(a+h) = g(a) + dg(a)(h) + \|h\| \cdot \varphi_1(h)}$$

für alle $h \in U_a$

Multiplikation ergibt für alle $h \in U_a$ jeweils

$$\begin{aligned} (fg)(a+h) &= f(a+h) \cdot g(a+h) = \\ &= (f(a) + df(a)(h) + \|h\| \psi_1(h)) \cdot (g(a) + dg(a)(h) + \|h\| \varphi_1(h)) \\ &= f(a)g(a) + g(a)df(a)(h) + f(a)dg(a)(h) + \end{aligned}$$

$\varphi_1(h)$

$$\begin{aligned} & \|h\| \cdot (f(a) \cdot \varphi_1(h) + df(a)(h) \cdot \varphi_1(h) + \\ & \varphi_1(h) \cdot g(a) + \varphi_1(h) \cdot dg(a)(h) + \|h\| \varphi_1(h) \varphi_1(h)) \quad (*) \\ & + df(a)(h) \cdot dg(a)(h) \\ & = f(a)g(a) + g(a)df(a)(h) + f(a)dg(a)(h) \\ & + \|h\| \rho_1(h) + df(a)(h) \cdot dg(a)(h) \end{aligned}$$

da eine

$\rho_1(h)$

ist. Umgekehrt

$a)(h) + \|h\| \varphi_1(h)$

$g(a)(h) +$

wobei $\rho_1(h)$ den Ausdruck in der Klammer (*) bezeichnet. Die Gleichung zeigt: fg ist in a genau dann diff'bar, mit $d(gh) = g(a)df(a) + f(a)dg(a)$, wenn gilt:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\rho_1(h) + \frac{1}{\|h\|} df(a)(h) dg(a)(h) \right) = 0$$

Auf Grund der Stetigkeit von ψ_i, φ_i im Nullpunkt gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \psi_i(h) = \psi_i(0_V) = 0 \text{ und } \lim_{h \rightarrow 0} \varphi_i(h) = \varphi_i(0_V) = 0 \text{ und}$$

$$\text{somit } \lim_{h \rightarrow 0} \rho_i(h) = 0$$

Nach Definition der Operatornorm gilt $|dg(a)(h)| \leq \|dg(a)\| \|h\|$

für alle $h \in U_a$. Für alle $h \in U_a \setminus \{0_V\}$ folgt

$$\left| \frac{1}{\|h\|} df(a)(h) dg(a)(h) \right| \leq \frac{1}{\|h\|} |df(a)(h)| \|dg(a)\| \|h\|$$

$$= |df(a)(h)| \cdot \|dg(a)\| \quad \text{Weil die lineare Abb. } df(a) \text{ stetig}$$

$$\text{in } 0_V \text{ ist, gilt } \lim_{h \rightarrow 0} |df(a)(h)| = 0 \text{ und somit } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|} df(a)(h) dg(a)(h) = 0 \quad \square$$

$= |df(a)(h)| \cdot \|dg(a)\|$ Weil die bilineare Abb. $df(a)$ stetig
in 0 ist, gilt $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} |df(a)(h)| = 0$ und somit $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|} |df(a)(h)| dg(a)(h) = 0$

Beweis von Folgerung 6.11

Ind.-Auf $n=1$: $1 \cdot f(a)^{1-1} df(a) = df(a) \stackrel{f^{n-1}}{=} dg(a)$

Ind.-schritt $n \rightarrow n+1$: Sei $g(x) = f(x)^n$, $h(x) = f(x) \cdot g(x)$

$= f(x)^{n+1} \quad \forall x \in U$. Dann gilt $dh(a) = d(fg)(a)$

$= f(a) \cdot dg(a) + g(a) \cdot df(a) = f(a) \cdot n f(a)^{n-1} \cdot df(a)$

$\square$ Produktregel

$\square$ Ind. V.

$+ f(a)^n df(a) = n \cdot f(a)^n df(a) + f(a)^n df(a)$

$= (n+1) \cdot f(a)^n \cdot df(a)$

$\square$

1-dimensionale Kettenregel:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

wichtiger Spezialfall zur Kettenregel:

$$X = \mathbb{R}^p, Y = \mathbb{R}^n, Z = \mathbb{R}^m$$

Dann ist $df(a) \in M_{n \times p, \mathbb{R}}$, $dg(f(a)) \in M_{m \times n, \mathbb{R}}$

und $d(g \circ f)(a) \in M_{m \times p, \mathbb{R}}$.

Satz (6.12)

Seien X, Y, Z endlich-dimensionale normierte $\mathbb{R}$ -Vektorräume und $U \subseteq X, V \subseteq Y$ offene Teilmengen. Seien $f : U \rightarrow Y$ und $g : V \rightarrow Z$ Abbildungen mit $f(U) \subseteq V$. Ferner sei $a \in U$ ein Punkt mit der Eigenschaft, dass f in a und g in $f(a)$ differenzierbar ist. Dann ist die Abbildung $g \circ f : U \rightarrow Z$ in a differenzierbar, und es gilt

$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a).$$

$$X = \mathbb{R}^p, Y = \mathbb{R}^n, Z = \mathbb{R}^m$$

Dann ist $df(a) \in M_{n \times p, \mathbb{R}}, dg(f(a)) \in M_{m \times n, \mathbb{R}}$

Anwendungsbeispiel 1:

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto (2x - y + z)^3$$

Es gilt $f = h \circ g$ mit $g(x, y, z) = 2x - y + z$
und $h(u) = u^3 \quad \forall x, y, z, u \in \mathbb{R}$.

$$dg(x, y, z) = (2 \ -1 \ 1)$$

$$\begin{aligned} df(x, y, z) &= d(h \circ g)(x, y, z) = dh(g(x, y, z)) \cdot dg(x, y, z) \\ &= 3 g(x, y, z)^2 \cdot (2 \ -1 \ 1) = 3 (2x - y + z)^2 \cdot (2 \ -1 \ 1) \end{aligned}$$

Anwendungsbeispiel 2:

Holung einer verallgemeinerten Produktregel (für 1-dim. Funktionen)

geg. $m \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots, f_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diff'bare Funktionen

Ziel: Berechnung von $(f_1 \cdot \dots \cdot f_m)'$

Definiere $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $p: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ Bsp
durch $F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_m(t) \end{pmatrix}$ und $p(x_1, \dots, x_m) = \prod_{j=1}^m x_j$

Definieren wir $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\tilde{f}(t) = \prod_{j=1}^m f_j(t), \text{ dann gilt } \tilde{f} = p \circ F.$$

Nach Satz 6.3 gilt $dF(t) = \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ \vdots \\ f_m'(t) \end{pmatrix} \forall t \in \mathbb{R}$.

außerdem, $dp(x_1, \dots, x_m) =$

$$(\partial_1 p(x_1, \dots, x_m) \partial_2 p(x_1, \dots, x_m) \dots \partial_m p(x_1, \dots, x_m))$$

$$= \left(\prod_{j \neq 1} x_j \quad \prod_{j \neq 2} x_j \quad \dots \quad \prod_{j \neq m} x_j \right) = \left(\prod_{j \neq i} x_j \right)_{1 \leq i \leq m}$$

$$\text{kettenregel} \Rightarrow \tilde{f}'(t) = d\tilde{f}(t) = d(p \circ F)(t)$$

$$= dp(F(t)) \cdot dF(t)$$

$$= \underbrace{\left(\prod_{j \neq i} f_j(t) \right)}_{\in \mathcal{M}_{1 \times m, \mathbb{R}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} f_1'(t) \\ \vdots \\ f_m'(t) \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{M}_{m \times 1, \mathbb{R}}}$$

$$= \sum_{i=1}^m \prod_{j \neq i} f_j(t) \cdot f_i'(t)$$

Bsp $m=3$ $(f_1 f_2 f_3)'(t) = f_2(t) f_3(t) \cdot f_1'(t) + f_1(t) \cdot f_3(t) \cdot f_2'(t) + f_1(t) \cdot f_2(t) \cdot f_3'(t)$

$$= \prod_{j=1}^m x_j$$

Beweis der Kettenregel, Satz 6.12

X, Y, Z endl.-dim. $\mathbb{R}$ -Vektorräume

$U \subseteq X, V \subseteq Y$ offen

$f: U \rightarrow Y, g: V \rightarrow Z$ mit $f(U) \subseteq V$

f diff'bar in $a \in U, g$ diff'bar in $b = f(a)$

$z \in Z: g \circ f$ diff'bar in a , mit der Ablei-

tung $d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$

Aus der Voraussetzung folgt wie in der Produktregel eine Darstellung von f, g der Form

$$f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + \|h\| Y_1(h)$$

und $g(b+k) = g(b) + dg(b)(k) + \|k\| r_1(k)$ mit den entsprechenden Eigenschaften. Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned}(g \circ f)(a+h) &= g(f(a+h)) = g(f(a) + k) \\ &= g(f(a)) + dg(f(a))(k) + \|k\| r_1(k) \text{ mit} \\ k &= df(a)(h) + \|h\| r_1(h)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& dg(f(a))(df(a)(h) + \|h\| r_1(h)) \\ &= dg(f(a))(df(a)(h)) + \|h\| dg(f(a))(r_1(h)) \\ &= (dg(f(a)) \circ df(a))(h) + \|h\| dg(f(a))(r_1(h))\end{aligned}$$

$$(g \circ f)(a+h) = g(f(a+h)) = g(f(a) + k) \\ = g(f(a)) + dg(f(a))(k) + \|k\| \varphi_1(k) \text{ mit}$$

$$\text{einsetzen} \Rightarrow (g \circ f)(a+h) = (g \circ f)(a) + \underbrace{(dg(f(a)) \circ df(a))}_{\text{}}(h) \\ + \|h\| dg(f(a))(\varphi_1(h)) + \|df(a)(h) + \|h\| \varphi_1(h)\| \cdot \varphi_1(df(a)(h) \\ + \|h\| \varphi_1(h))$$

Mit ähnlichen Methoden wie bei der Produktregel zeigt man

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|} (\|h\| dg(f(a)) \cdot \varphi_1(h) + \|df(a)(h) + \|h\| \varphi_1(h)\| \cdot \varphi_1(df(a)(h) + \|h\| \varphi_1(h))) = 0$$

ist $\Rightarrow g \circ f$ ist diff'bar in a , und $h \mapsto dg(f(a)) \circ df(a)$ ist die Ableitung in diesem Punkt. □