Definition der totalen Differenzierbarkeit

Im gesamten Abschnitt seien V, W jeweils endlich-dimensionale, normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume.

Definition (6.1)

Sei $U \subseteq V$ offen, $a \in U$ und $U_a = \{x \in V \mid a + x \in U\}$. Außerdem sei $f : U \to W$ eine Abbildung. Man sagt, die Funktion f ist im Punkt a total differenzierbar, wenn eine lineare Abbildung $\phi : V \to W$ und eine Funktion $\psi : U_a \to W$ existieren, so dass

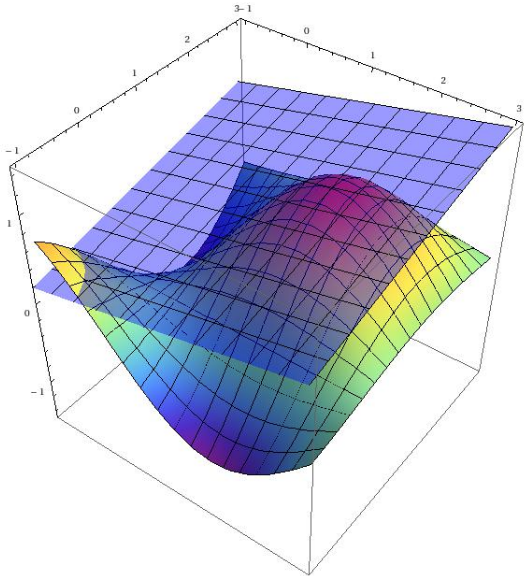
$$f(a+h) = f(a) + \phi(h) + \psi(h) \text{ für alle } h \in U_a$$

und außerdem

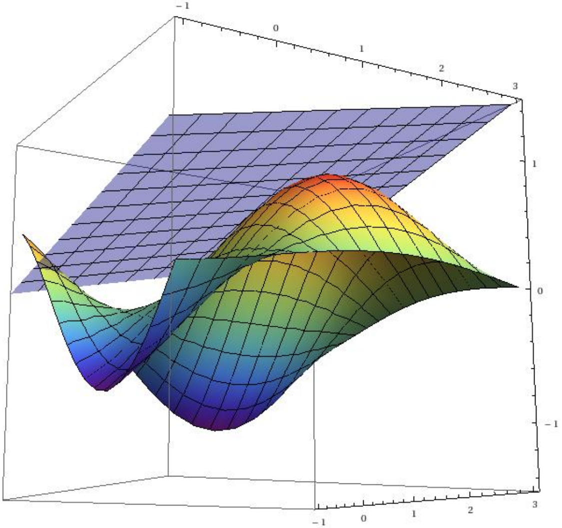
$$\lim_{h \to 0_V} \frac{\psi(h)}{\|h\|} \quad = \quad 0_W$$

erfüllt ist. Man nennt ϕ dann die Ableitung von f an der Stelle a und bezeichnet sie mit $df(a)$.

Veranschaulichung der totalen Differenzierbarkeit



Veranschaulichung der totalen Differenzierbarkeit



Beispiel für totale Differenzierbarkeit:

Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ geg. durch $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Überprüfe direkt anhand der Definition: f ist im Punkt $(3,4)$ total differenzierbar.

wissen bereits: $\phi = df(3,4)$ ist eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, kann also dargestellt werden als (1×2)-Matrix.

werden sehen: Diese Matrix ist geg. durch $(\partial_1 f(3,4), \partial_2 f(3,4))$
$= (6,8)$ $(\partial_1 f(x,y) = 2x,\ \partial_2 f(x,y) = 2y)$.

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kann also dargestellt werden als (1×2)-Matrix.

$$\Rightarrow \phi\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = (6 \;\; 8)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 6h_1 + 8h_2.$$

außerdem: $f(3,4) = 3^2 + 4^2 = 25$

Bestimmung des Fehlerterms:

$$\Psi(h_1, h_2) = f(3+h_1, 4+h_2) - f(3,4) - \phi\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} =$$

$$(3+h_1)^2 + (4+h_2)^2 - 25 - 6h_1 - 8h_2 =$$

$$\cancel{9} + \cancel{6h_1} + h_1^2 + \cancel{16} + \cancel{8h_2} + h_2^2 - \cancel{25} - \cancel{6h_1} - \cancel{8h_2} = h_1^2 + h_2^2$$

$$\frac{|\Psi(h_1, h_2)|}{\|h\|} = \frac{h_1^2 + h_2^2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \sqrt{h_1^2 + h_2^2} = \|h\|$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{\Psi(h_1, h_2)}{\|h\|} = \lim_{h \to 0} \|h\| = \|0\| = 0.$$

Komponentenweise Überprüfung der Differenzierbarkeit

Proposition (6.3)

Wir betrachten den Spezialfall, dass $W = \mathbb{R}^m$ für ein $m \in \mathbb{N}$ ist. Sei $U \subseteq V$ offen und $a \in U$. Eine Abbildung $f : U \to W$ ist genau dann in a differenzierbar, wenn die Komponentenfunktionen $f_i : U \to \mathbb{R}$ in a differenzierbar sind, für $1 \leq i \leq m$. Die Komponentenfunktionen der Ableitung $df(a)$ sind dann die Ableitungen $df_1(a), ..., df_m(a)$.

Totale Ableitung und Richtungsableitung

Proposition (6.4)

Sei $U \subseteq V$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion, und $a \in U$. Ist f im Punkt a differenzierbar, dann existiert für jedes $v \in V$ die Richtungsableitung $\partial_v f(a)$, und es gilt $\partial_v f(a) = df(a)(v)$.

Folgerung (6.5)

Ist $U \subseteq V$ offen, $a \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}$ im Punkt a differenzierbar, dann gilt

$$\partial_{v+w} f(a) = \partial_v f(a) + \partial_w f(a)$$

für alle $v, w \in V$.

Beweis von Proposition 6.4:

geg.: $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq V$ offen, V endl.-dim. $\mathbb{R}$-Vektorraum

$a \in U$ Punkt, in dem f total diff'bar ist

$v \in V$

Beh.: $\partial_v f(a)$ existiert, und es gilt

$$\boxed{\partial_v f(a) = df(a)(v)}$$

Auf Grund der totalen Diff'barkeit in a existiert eine Fkt. $\varphi : U_a \to \mathbb{R}$ auf $U_a = \{h \in V \mid a+h \in U\}$, so dass

$f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + \psi(h) \;\forall h \in U_a$

und $\lim\limits_{h \to 0_V} \frac{\psi(h)}{\|h\|} = 0 \quad (**)$

Definiere die Hilfsfunktion $\phi : \mathbb{R} \to V$ durch $\phi(t) = a + tv$. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ so gewählt, das $\phi(]-\varepsilon, \varepsilon[) \subseteq U$. Für $0 < |t| < \varepsilon$ sei

$$h(t) = \frac{(f \circ \phi)(t) - (f \circ \phi)(0)}{t}$$

$$= \frac{1}{t}\left(f(a+tv) - f(a)\right)$$

$$= \frac{1}{t}\left(df(a)(tv) + \psi(tv)\right)$$

zu zeigen: $\lim\limits_{t \to 0} \frac{h(t)}{t} = df(a)(v)$

B

(i)

R

f'(

<u>1. Fall</u>: $v = 0_V$. Dann ist $h(t)$ konstant null, und ebenso $df(a)(v) = 0$, die Gleichung also erfüllt.

<u>2. Fall</u>: $v \neq 0_V$. Für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $0 < |t| < \varepsilon$ gilt $h(t) = df(a)(v) + \frac{\psi(tv)}{t}$. Es genügt also zu zeigen: $\lim_{t \to 0} \frac{\psi(tv)}{t} = 0$. Sei $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $]-\varepsilon, \varepsilon[\setminus \{0\}$ mit $\lim_{n \to \infty} t_n = 0$. Setzen wir $h_n = t_n v$ $\forall n \in \mathbb{N}$, dann gilt $\lim_{n \to \infty} h_n = 0_V$.

Wegen (**) folgt $\lim_{n \to \infty} \frac{\psi(h_n)}{\|h_n\|} = 0 \longrightarrow$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\psi(t_n v)}{t_n \|v\|} = 0 \longrightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{\psi(t_n v)}{t_n} = 0. \qquad \square$$

a

gewählt

sei

Beweis von Folgerung 6.5:

Aus Prop. 6.4 folgt $\partial_{v+w} f(a) = df(a)(v+w)$

$$= df(a)(v) + df(a)(w) = \partial_v f(a) + \partial_w f(a). \qquad \square$$

$df(a)$ ist lineare Abb. $V \to \mathbb{R}$

Beispiele für Funktionalmatrizen:

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ (x,y) \mapsto 2x^2 + 7y^2 + 5y$

$$\mathrm{Jac}(f)(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x,y) & \partial_2 f(x,y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4x & 14y+5 \end{pmatrix}$$

Richtungsableitung für $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$:

$$f'(x,y)(v) = \begin{pmatrix} 4x & 14y+5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 4ax + 14by + 5b$$

(ii) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \ (x,y,z) \mapsto (3x^2 - 5y + z, \ z^4 + xy)$

$g_1(x,y,z) = 3x^2 - 5y + z, \ g_2(x,y,z) = z^4 + xy$

$$\mathrm{Jac}(g)(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_1 g_1(x,y,z) & \partial_2 g_1(x,y,z) & \partial_3 g_1(x,y,z) \\ \partial_1 g_2(x,y,z) & \partial_2 g_2(x,y,z) & \partial_3 g_2(x,y,z) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6x & -5 & 1 \\ y & x & 4z^3 \end{pmatrix}$$

Defintion der Jacobi-Matrix

Definition (6.6)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $a \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine in a differenzierbare Abbildung, mit Komponentenfunktionen $f_1, ..., f_m$. Dann nennt man

$$\mathrm{Jac}(f)(a) \quad = \quad \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \dots & \partial_n f_1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m(a) & \dots & \partial_n f_m(a) \end{pmatrix} \quad \in \mathscr{M}_{m \times n, \mathbb{R}}$$

die Jacobi- oder Funktionalmatrix von f an der Stelle a.

Beziehung zwischen totaler Ableitung und Jacobi-Matrix

Proposition (6.7)

Seien die Bezeichnungen wie in Definition (6.6) gewählt, und sei $J = \mathrm{Jac}(f)(a)$. Dann gilt $df(a)(v) = J \cdot v$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$. Die Matrix J ist also die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung $df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bezüglich der Einheitsbasen.

$\partial_1 g_2(x,y,z) \quad \partial_2 g_2(x,y,z) \quad \partial_3 g_2(x,y,z) \Big)$

$= \begin{pmatrix} 6x - 5 & 1 \end{pmatrix}$

Beweis von Proposition 6.7.

Nach Prop. 6.3 sind die Komponentenfunktionen von $df(a): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gegeben durch $df_i(a): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 \le i \le m$.
Um die Gleichung $df(a) = \phi_J$ zu überprüfen (mit $J = \mathrm{Jac}(f)(a)$ und $\phi_J: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $v \mapsto Jv$), reicht es also, für $i \in \{1, \dots, m\}$ jeweils $df_i(a)(v) = (Jv)_i$ zu überprüfen. Weil die Abbildungen $df_i(a)$ und $v \mapsto (Jv)_i$ linear sind, genügt es, sie für die Einheitsvektoren $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ zu kontrollieren. Sei $j \in \{1, \dots, n\}$.
Es gilt $df_i(a)(e_j) \underset{\text{Prop. 6.4}}{=} \partial_{e_j} f_i(a) = \partial_j f_i(a)$. Andererseits gilt $(Je_j)_i = (\partial_1 f_i(a) \dots \partial_n f_i(a)) \cdot e_j = \partial_j f_i(a)$ $\square$

Kriterium für totale Differenzierbarkeit

Satz (6.8)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f : U \to \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion, und sei $a \in U$ ein Punkt, in dem die partiellen Ableitungen $\partial_i f$ stetig sind, für $1 \leq i \leq n$. Dann ist f in a total differenzierbar.

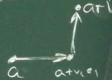
Beweis von Satz 6.8

geg.: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ partiell diff'bar

$a \in U$ Punkt, in dem $\partial_i f$ stetig ist für $1 \le i \le n$

Beh. f ist total diff'bar in a

Wähle $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ so, dass $B_\varepsilon(a) \subseteq U$ gilt, wobei $B_\varepsilon(a)$ den offenen Ball bzgl. der Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ bezeichnet.



Für jedes $v \in \mathbb{R}^n$ mit $a+v \in B_\varepsilon(a)$ definiere $z^{(0)}(v), \dots, z^{(n)}(v)$ durch $z^{(k)}(v) = a + \sum_{j=1}^{k} v_k e_k$.

($\Rightarrow z^{(0)}(v) = a$, $z^{(1)}(v) = a + v_1 e_1$, $\dots$, $z^{(n)}(a) = a + v$)

Nach dem Mittelwertsatz für Richtungsableitungen gibt es auf der Verbindungsstrecke $[z^{(k-1)}(v), z^{(k)}(v)]$ jeweils einen Punkt $y^{(k)}(v)$ mit $f(z^{(k)}(v)) - f(z^{(k-1)}(v)) = \partial_{v_k e_k} f(y^{(k)}(v))$ $= v_k \partial_j f(y^{(k)}(v))$. $\Rightarrow$ erhalte

$$f(a+v) - f(a) = f(z^{(n)}(v)) - f(z^{(0)}(v)) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(f(z^{(k)}(v)) - f(z^{(k-1)}(v)) \right) = \sum_{k=1}^{n} v_k \partial_j f(y^{(k)}(v))$$

$$= \sum_{k=1}^{n} v_k \partial_j f(a) + \sum_{k=1}^{n} v_k \left(\partial_j f(y^{(k)}(v)) - \partial_j f(a) \right)$$

$$= \mathrm{Jac}(f)(a) \cdot v + \varphi(v), \quad \varphi(v) = \sum_{k=1}^{n} v_k \left(\partial_j f(y^{(k)}(v)) - \partial_j f(a) \right)$$

Nach Def. ist f genau dann in $f(a)$

total diff'bar mit $df(a) = Jac(f)(a)$,

wenn $\lim\limits_{v \to 0} \frac{\varphi(v)}{\|v\|} = 0$

Für $1 \leq k \leq n$ gilt jeweils $\|y^{(k)}(v) - a\|$

$$\leq \sum_{j=1}^{k} |v_k| \leq \sum_{j=1}^{n} |v_n| = \|v\|_1$$

Für $v \to 0$ läuft $y^{(k)}(v)$ gegen a.

und $\partial_j f(y^{(k)}(v)) \to \partial_j f(a)$, weil

$\partial_j f$ im Punkt a stetig ist.

Außerdem ist $\frac{v_k}{\|v\|_1}$ für $1 \leq k \leq n$ durch 1

E

äq

an

φ_1

mit

f(a+

ebens

ein

stetig

g(a+

$\partial_j f$ im Punkt a stetig ist.

beschränkt. Insgesamt ist damit

$$\lim_{v \to 0} \frac{\psi(v)}{\|v\|} = 0 \text{ erfüllt} \qquad \square$$

Summenregel

Satz (6.9)

Sei $U \subseteq V$ offen, $a \in U$, und seien $f, g : U \to W$ zwei Abbildungen, die beide in $a \in U$ differenzierbar sind. Dann sind auch $f + g$ und λf für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ im Punkt a differenzierbar, und es gilt

$$d(f+g)(a) = df(a) + dg(a) \quad \text{und} \quad d(\lambda f)(a) = \lambda df(a).$$

$)(a),$

$- a\|$

$\|_1$

in a.

(a), weil

n durch 1

Beweis von Satz 6.9:

äquivalent zu totalen Diff'barkeit von f an der Stelle a: Es gibt eine Funktion $\psi_1 : U_a \to W$ auf $U_a = \{h \in V \mid a + h \in U\}$ mit $\psi_1(0_V) = 0_W$, ψ_1 stetig in 0_V und

$$f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + \|h\| \psi_1(h) \quad \forall h \in U_a$$

ebenso: g total diff'bar in a $\Rightarrow$ Es gibt eine Fkt. $\varphi_1 : U_a \to W$ mit $\varphi_1(0_V) = 0_W$, stetig in 0_V, so dass

$$g(a+h) = g(a) + dg(a)(h) + \|h\| \varphi_1(h) \quad \forall h \in U_a$$

stetig in O_V, so dass

Addiert man die beiden Gleichungen, dann erhält man $(f+g)(a+h) = (f+g)(a) + \big(df(a) + dg(a)\big)(h)$ $(*)$ $+ \|h\|(\psi_1 + \varphi_1)(h)$. Dabei gilt $(\psi_1 + \varphi_1)(O_V) = O_W$, und mit ψ_1 und φ_1 ist auch $\psi_1 + \varphi_1$ stetig in O_V. Also folgt aus $(*)$, dass $f+g$ in a diff'bar ist, mit $d(f+g)(a) = df(a) + dg(a)$ als Ableitung. ebenso.

$$(\lambda f)(a+h) = \lambda f(a) + \big(\lambda\, df(a)\big)(h) + \|h\|(\lambda\psi_1)(h)$$

$(\lambda\psi_1)(O_V) = \lambda\, O_W = O_W$, $\lambda\psi_1$ stetig in O_V $\Rightarrow$ λf diff'bar in a, mit $d(\lambda f)(a) = \lambda\, df(a)$. $\square$