Richtungsableitungen und partielle Ableitung

Definition (5.1)

Sei $U \subseteq V$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $a \in U$, $v \in V$, und sei $\phi : \mathbb{R} \to V$ gegeben durch $\phi(t) = a + tv$.

- Ist die Funktion $f \circ \phi$ im Punkt 0 differenzierbar, dann nennt man die Ableitung $\partial_v f(a) = (f \circ \phi)'(0)$ die Richtungsableitung von f im Punkt a in Richtung v.
- Ist $V = \mathbb{R}^n$ und $v = e_j$ für ein $j \in \{1, ..., n\}$, dann spricht man auch von der j-ten partiellen Ableitung und verwendet die Bezeichung $\partial_j f(a)$.

Zur Berechnung der partiellen Ableitung

Folgerung (5.3)

Sei $U \subseteq V$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in U$.
Dann gilt

$$\partial_j f(a) \quad = \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(f(a_1, ..., a_{j-1}, t, a_{j+1}, ..., a_n)\right)\Big|_{t=a_j}.$$

Dies soll bedeuten, dass genau dann die j-te partielle Ableitung von f an der Stelle a definiert ist, wenn die Funktion

$$t \mapsto f(a_1, ..., a_{j-1}, t, a_{j+1}, ..., a_n)$$

an der Stelle a_j differenzierbar ist, und dass in diesem Fall die Ableitung dieser Funktion an der Stelle a_j mit $\partial_j f(a)$ übereinstimmt.

Rechenregeln für Richtungsableitungen

Lemma (5.4)

Sei $U \subseteq V$ offen. Sei $v \in V$, und seien $f, g : U \to \mathbb{R}$ reellwertige Funktionen.

(i) Ist f konstant, dann gilt $\partial_v f(x) = 0$ für alle $x \in U$.

(ii) Ist $x \in U$ ein Punkt mit der Eigenschaft, dass die Richtungsableitungen $\partial_v f(x)$ und $\partial_v g(x)$ existieren, dann existiert auch $\partial_v (f+g)(x)$ und $\partial_v (fg)(x)$, und es gilt

$$\partial_v (f+g)(x) = \partial_v f(x) + \partial_v g(x) \qquad \text{und}$$
$$\partial_v (fg)(x) = f(x)\partial_v g(x) + g(x)\partial_v f(x).$$

(iii) Existiert $\partial_v f(x)$ im Punkt $x \in U$, dann existiert auch $\partial_{cv} f(x)$ für alle $c \in \mathbb{R}$, und es gilt $\partial_{cv} f = c\, \partial_v f$.

aber: Im Allgemeinen gilt nicht $\partial_{v+w} f = \partial_v f + \partial_w f$.
(Dafür muss f total differenzierbar sein, siehe nächstes Kapitel.)

Mehrfache partielle Ableitungen

- Man bezeichnet eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ als stetig partiell differenzierbar, wenn die partiellen Ableitungen $\partial_i f$ für $1 \leq i \leq n$ auf U existieren und stetig sind.
- Falls die Funktionen $\partial_i f$ ihrerseits alle partiell differenzierbar sind, spricht man von einer zweifach partiell differenzierbaren Funktion.
- Sind auch die Funktionen $\partial_i \partial_j f$ für $1 \leq i, j \leq n$ wieder stetig, nennt man f zweifach stetig partiell differenzierbar.
- Auf naheliegende Weise definiert man m-fach (stetig) partiell differenzierbar für beliebige $m \geq 3$.

Notation:

An Stelle von $\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_m} f$ verwendet man zur Abkürzung auch die Schreibweise $\partial_{i_1 \ldots i_m} f$ für die höheren partiellen Ableitungen.

Der Mittelwertsatz für Richtungsableitungen

Satz (5.5)

Sei $U \subseteq V$ eine offene Teilmenge und $f : U \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion. Seien $a, b \in U$ zwei verschiedene Punkte mit $[a, b] \subseteq U$ und der Eigenschaft, dass die Richtungsableitung $\partial_v f$ für $v = b - a$ auf ganz U existiert. Dann gibt es ein $p \in \,]a, b[$ mit

$$f(b) - f(a) \quad = \quad \partial_v f(p).$$

Erinnerung: Mittelwertsatz für 1-dim Funktionen

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, diff'bar auf $]a,b[$

$\Rightarrow \exists\, c \in]a,b[$ mit $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Beweis von Satz 5.5:

Erinnerung: $[a,b] = \{(1-t)a + tb \mid t \in [0,1]\}$

Konvention: $]a,b[\; = [a,b] \setminus \{a,b\}$

Definiere $\phi : \mathbb{R} \to V$, $t \mapsto (1-t)a + tb = a + tv$.

Nach Voraussetzung gilt $\phi([0,1]) \subseteq U$.

$\Rightarrow f \circ \phi$ ist eine $\mathbb{R}$-wertige, auf $[0,1]$ definierte Fkt.

Weil $\partial_v f$ auf ganz U existiert, ist $f \circ \phi$ auf $]0,1[$ diff'bar und auf $[0,1]$ stetig.

Mittelwertsatz der Analysis einer Variablen $\Rightarrow$

$\exists\, t_0 \in \,]0,1[$ mit $(f \circ \phi)'(t_0) = \dfrac{(f\circ\phi)(1) - (f\circ\phi)(0)}{1 - 0}$

Die rechte Seite ist gleich $(f\circ\phi)(1) - (f\circ\phi)(0) = f(\phi(1)) - f(\phi(0)) = f(b) - f(a)$. Setze $p = \phi(t_0)$

Dann ist die linke Seite gleich $(f\circ\phi)'(t_0) \overset{}{=} \partial_v f(\phi(t_0))$ Lemma 5.2

$= \partial_v f(p)$, wegen $\phi(a) = a + tv$ alle $t \in \mathbb{R}$.

$\square$

Satz von Schwarz (Vorbereitung)

Lemma (5.6)

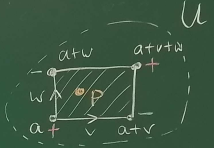
Sei $U \subseteq V$ offen. Seien $v, w \in V$, und sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion mit der Eigenschaft,dass die doppelte Richtungsableitung $\partial_v \partial_w f$ auf ganz U existiert. Sei außerdem $a \in U$ ein Punkt, so dass die Menge

$$R \quad = \quad \left\{ a + tv + t'w \mid t, t' \in [0,1] \right\}$$

vollständig in U enthalten ist. Dann gibt es ein $p \in R$ mit

$$f(a+v+w) - f(a+v) - f(a+w) + f(a) \quad = \quad \partial_v \partial_w f(p).$$

Beweis von Lemma 5.6



Setze $f_v(x) = f(x+v) - f(x)$.

Dann ist die linke Seite der zu beweisenden Gleichung geg. durch $f_v(a+w) - f_v(a)$.

Damit $f_v(x)$ in x definiert ist, muss gelten:

$x \in U$ und $x+v \in U \Leftrightarrow x \in U$ und $\tau_v(x) \in U$

$\Leftrightarrow x \in U \cap \tau_v^{-1}(U)$, wobei $\tau_v : V \to V$ definiert durch $\tau_v(x) = x+v \ \forall x \in V$. $\Rightarrow f_v$ ist definiert auf $U_v = U \cap \tau_v^{-1}(U)$ (ist offen in V, da τ_v stetig)

Ansatz: Wende den Mittelwertsatz 5.5 auf $f_v : U_v \to \mathbb{R}$ an. Dafür muss überprüft werden

(1) $[a, a+w] \subseteq U_v$

(2) $\partial_w f_v$ existiert auf ganz U_v, und es gilt

$$\partial_w f_v(x) = \partial_w f(x+v) - \partial_w f(x) \quad \forall x \in U_v$$

Ist dies gezeigt, dann liefert uns Satz 5.5 einen Punkt $p' \in]a, a+w[$ mit $f_v(a+w) - f_v(a) = \partial_w f_v(p')$. Dies ist gleichbedeutend mit $f(a+v+w) - f(a+v) - f(a+w) + f(a) = \partial_w f(p'+v) - \partial_w f(p')$. Wende dann Satz 5.5 an auf $\partial_w f$ und die Strecke $[p', p'+v]$. $\Rightarrow \exists p \in]p', p'+v[\subseteq R$ und $\partial_w f(p'+v) - \partial_w f(p') = \partial_v \partial_w f(p)$

Zu (1) Sei $x \in [a, a+w]$. $\Rightarrow \exists t \in [0,1]$ mit

$x = (1-t)a + t(a+w) = a - ta + ta + tw$

$= a + 0 \cdot v + t \cdot w \in R$

Zu (2) Definiere $\phi_v(t) = x + tw$. Dann gilt

nach Definition $\partial_w f_v(x) = (f_v \circ \phi_v)'(0)$.

$(f_v \circ \phi_v)(t) = f_v(\phi_v(t)) = f(v + \phi_v(t)) - f(\phi_v(t))$

$= (f \circ \tau_v \circ \phi_v)(t) - (f \circ \phi_v)(t) \quad \forall t$ mit $\phi_v(t) \in U_v$

$\Rightarrow \partial_w f_v(x) = (f \circ \tau_v \circ \phi_v)'(0) - (f \circ \phi_v)'(0)$.

Nach Def. gilt $(f \circ \phi_v)'(0) = \partial_w f(x)$

und $(f \circ \tau_v \circ \phi_v)'(0) = \partial_w (f \circ \tau_v)(x) = \partial_w f(x+v)$ $\square$

Der Satz von Schwarz

Satz (5.7)

Sei $U \subseteq V$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion, und seien $0 \neq v, w \in V$ derart, dass die zweifachen Richtungsableitungen $\partial_v \partial_w f$ und $\partial_w \partial_v f$ auf U existieren und stetig sind. Dann gilt

$$\partial_v \partial_w f \quad = \quad \partial_w \partial_v f$$

auf ganz U.

…so gilt $\lim_{n\to\infty} q_n = q$.

Beweis von Satz 5.7

geg: $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq V$ offen, V endl.-dim. $\mathbb{R}$-Vektorraum

$v, w \in V$, $v, w \neq 0_V$, $\partial_v \partial_w f$ und $\partial_w \partial_v f$ existieren auf U und sind stetig. Sei $a \in U$. z.zg.:

$$\partial_v \partial_w f(a) = \partial_w \partial_v f(a)$$

Definiere zwei Folgen $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^+$ mit $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$, so dass der Bereich

$R_n = \{a + t\alpha_n v + u\beta_n w \mid t, u \in [0,1]\}$ in U liegt.

Nach Lemma 5.6 gibt Punkte $p_n, q_n \in R_n$ mit

$$\partial_{(\alpha_n v)(\beta_n w)} f(p_n) = f(a+\alpha_n v+\beta_n w) - f(a+\alpha_n v) - f(a+\beta_n w)$$

$$+ f(a) = \partial_{(\beta_n w)(\alpha_n v)} f(q_n). \overset{\text{Lemma 5.4 (iii)}}{\Longrightarrow}$$

$$\alpha_n \beta_n \partial_v \partial_w f(p_n) = f(a+\alpha_n v+\beta_n w) - \ldots + f(a) = \alpha_n \beta_n \partial_w \partial_v f(q_n)$$

$$\Rightarrow \partial_v \partial_w f(p_n) = \partial_w \partial_v f(q_n), \text{ jeweils für alle } n \in \mathbb{N}$$

· Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es nach Def. von R_n jeweils $t_n, u_n \in [0,1]$ mit $p_n = a + \alpha_n t_n v + \beta_n u_n w \Rightarrow \|p_n - a\| =$
$\|\alpha_n t_n v + \beta_n u_n w\| \leq \alpha_n t_n \|v\| + \beta_n u_n \|w\| \leq \alpha_n \|v\| + \beta_n \|w\|$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = a$

Ebenso gilt $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = a$.

Weil $\partial_v \partial_w f$ und $\partial_w \partial_v f$ stetig sind,

folgt $\partial_v \partial_w f(a) = \lim_{n\to\infty} \partial_v \partial_w f(p_n)$

$= \lim_{n\to\infty} \partial_w \partial_v f(q_n) = \partial_w \partial_v f(a).$ $\square$

Erinnerung: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine Fkt. und $a \in I$. Genau dann ist f in c diff'bar, wenn ein $c \in \mathbb{R}$ und eine Fkt. ψ existieren, so dass

$$f(a+h) = \overbrace{f(a) + ch}^{\text{„affin-lineare Näherung"}} + \underbrace{\psi(h)}_{\text{„Fehlerterm"}}$$

für alle $h \in \mathbb{R}$ mit $|h|$ hinreichend klein und $\lim_{h \to 0} \frac{\psi(h)}{|h|} = 0$ gilt.

Definition der totalen Differenzierbarkeit

Im gesamten Abschnitt seien V, W jeweils endlich-dimensionale, normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume.

Definition (6.1)

Sei $U \subseteq V$ offen, $a \in U$ und $U_a = \{x \in V \mid a + x \in U\}$. Außerdem sei $f : U \to W$ eine Abbildung. Man sagt, die Funktion f ist im Punkt a total differenzierbar, wenn eine lineare Abbildung $\phi : V \to W$ und eine Funktion $\psi : U_a \to W$ existieren, so dass

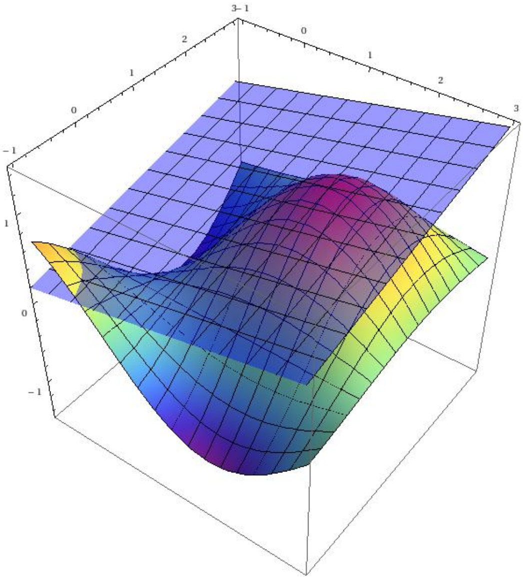
$$f(a+h) = f(a) + \phi(h) + \psi(h) \text{ für alle } h \in U_a$$

und außerdem

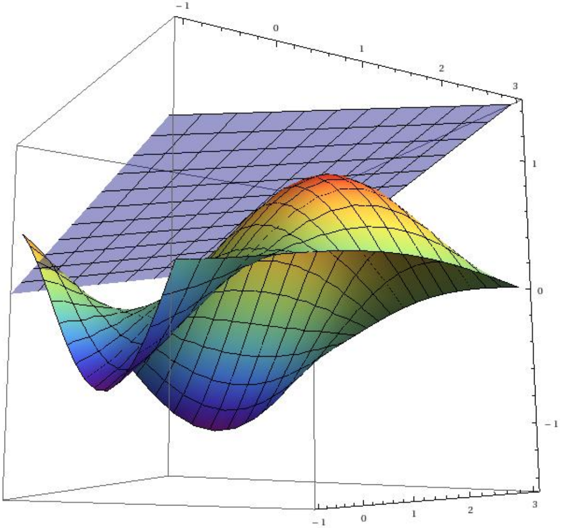
$$\lim_{h \to 0_V} \frac{\psi(h)}{\|h\|} \quad = \quad 0_W$$

erfüllt ist. Man nennt ϕ dann die Ableitung von f an der Stelle a und bezeichnet sie mit $df(a)$.

Veranschaulichung der totalen Differenzierbarkeit



Veranschaulichung der totalen Differenzierbarkeit



Totale Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit

Proposition (6.2)

Sei $f : U \to W$ eine Abbildung auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq V$, und $a \in U$ ein beliebiger Punkt. Ist f in a total differenzierbar, dann ist f auch in a stetig.

Komponentenweise Überprüfung der Differenzierbarkeit

Proposition (6.3)

Wir betrachten den Spezialfall, dass $W = \mathbb{R}^m$ für ein $m \in \mathbb{N}$ ist. Sei $U \subseteq V$ offen und $a \in U$. Eine Abbildung $f : U \to W$ ist genau dann in a differenzierbar, wenn die Komponentenfunktionen $f_i : U \to \mathbb{R}$ in a differenzierbar sind, für $1 \leq i \leq m$. Die Komponentenfunktionen der Ableitung $df(a)$ sind dann die Ableitungen $df_1(a), ..., df_m(a)$.

Beweis von Proposition 6.3

Sei $\phi: V \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung, $\psi: U_a \to \mathbb{R}^m$ eine beliebige Funktion, so dass

$f(a+h) = f(a) + \phi(h) + \psi(h) \quad \forall h \in U_a$ gilt. (*)

Durch Übergang zu den einzelnen Komponenten folgt

$f_i(a+h) = f_i(a) + \phi_i(h) + \psi_i(h) \quad \forall h \in U_a, \ 1 \leq i \leq m.$ (**)

„$\Rightarrow$" Setze voraus: f ist in a diff'bar, und es sei $\phi = df(a)$. Dann gilt $\lim_{h \to 0} \frac{\psi(h)}{\|h\|} = 0$.

Durch Übergang zu den einzelnen Komponenten folgt

Für $1 \leq i \leq m$ gilt $|\varphi_i(h)| \leq \max\{|\varphi_j(h)| \mid 1 \leq j \leq m\}$

$= \|\varphi(h)\|_\infty$, für jedes $h \in U_a$. also:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\varphi(h)}{\|h\|} = 0 \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{1}{\|h\|} \|\varphi(h)\|_\infty = 0 \Longrightarrow$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\|h\|} |\varphi_i(h)| = 0 \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{\varphi_i(h)}{\|h\|} = 0$$

Wegen $(**)$ folgt daraus, dass f_i in a total diff'bar ist, mit $df_i(a) = \phi_i$.

„$\Leftarrow$" Setze voraus: f_i ist in a diff'bar, mit $df_i(a) = \phi_i$.

$$\rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{|\varphi_i(h)|}{\|h\|} = 0 \text{ für } 1 \leq i \leq m \xRightarrow{\|\varphi(h)\|_\infty = \max\{|\varphi_i(h)| \mid 1 \leq i \leq m\}}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{\|\varphi(h)\|_\infty}{\|h\|} = 0 \xRightarrow{(*)} f \text{ ist in } a \text{ diff'bar, mit } df(a) = \phi \quad \square$$