

Definition (5.1)

Sei $U \subseteq V$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $a \in U$, $v \in V$, und sei $\phi : \mathbb{R} \rightarrow V$ gegeben durch $\phi(t) = a + tv$.

- Ist die Funktion $f \circ \phi$ im Punkt 0 differenzierbar, dann nennt man die Ableitung $\partial_v f(a) = (f \circ \phi)'(0)$ die **Richtungsableitung** von f im Punkt a in Richtung v .
- Ist $V = \mathbb{R}^n$ und $v = e_j$ für ein $j \in \{1, \dots, n\}$, dann spricht man auch von der j -ten **partiellen Ableitung** und verwendet die Bezeichnung $\partial_j f(a)$.

Wird f in Abhängigkeit von Variablen $x, y, \dots$ dargestellt, zum Beispiel in der Form $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$, dann verwendet man an Stelle von $\partial_1 f$ und $\partial_2 f$ auch die Bezeichnungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

für die partiellen Ableitungen.

Lemma (5.2)

Sei $U \subseteq V$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Seien $a, v \in V$, und sei $\phi : \mathbb{R} \rightarrow V$ gegeben durch $\phi(t) = a + tv$. Für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $\phi(t) \in U$ existiert $\partial_v f(a + tv)$ genau dann, wenn $f \circ \phi$ an der Stelle t differenzierbar ist, und in diesem Fall gilt

$$\partial_v f(a + tv) = (f \circ \phi)'(t).$$

Zur Berechnung der partiellen Ableitung (Forts.)

Folgerung (5.3)

Sei $U \subseteq V$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in U$.

Dann gilt

$$\partial_j f(a) = \left. \frac{\partial}{\partial t} (f(a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_n)) \right|_{t=a_j}.$$

Dies soll bedeuten, dass genau dann die j -te partielle Ableitung von f an der Stelle a definiert ist, wenn die Funktion

$$t \mapsto f(a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_n)$$

an der Stelle a_j differenzierbar ist, und dass in diesem Fall die Ableitung dieser Funktion an der Stelle a_j mit $\partial_j f(a)$ übereinstimmt.

(Dies folgt unmittelbar durch Anwendung von Lemma 5.2 auf die Hilfsfunktion $\phi(t) = (a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_n)$.)

Rechenregeln für Richtungsableitungen

Lemma (5.4)

Sei $U \subseteq V$ offen. Sei $v \in V$, und seien $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ reellwertige Funktionen.

- (i) Ist f konstant, dann gilt $\partial_v f(x) = 0$ für alle $x \in U$.
- (ii) Ist $x \in U$ ein Punkt mit der Eigenschaft, dass die Richtungsableitungen $\partial_v f(x)$ und $\partial_v g(x)$ existieren, dann existiert auch $\partial_v(f + g)(x)$ und $\partial_v(fg)(x)$, und es gilt

$$\begin{aligned}\partial_v(f + g)(x) &= \partial_v f(x) + \partial_v g(x) && \text{und} \\ \partial_v(fg)(x) &= f(x)\partial_v g(x) + g(x)\partial_v f(x).\end{aligned}$$

- (iii) Existiert $\partial_v f(x)$ im Punkt $x \in U$, dann existiert auch $\partial_{cv} f(x)$ für alle $c \in \mathbb{R}$, und es gilt $\partial_{cv} f = c \partial_v f$.

aber: Im Allgemeinen gilt **nicht** $\partial_{v+w} f = \partial_v f + \partial_w f$.
(Dafür muss f total differenzierbar sein, siehe nächstes Kapitel.)

Beweis von Lemma 5.4

geg. endl.-dim. $\mathbb{R}$ -Vektorraum V , $U \subseteq V$ offen

$f, g: U \rightarrow \mathbb{R}$, $v \in V$, $x \in U$

Sei $\phi:]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto x + tv$, wobei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$
so gewählt wird, dass $\phi(t) \in U \quad \forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ gilt.

Nach Def. der Richtungsableitung gilt

$$\partial_v f(x) = (f \circ \phi)'(0), \quad \partial_v g(x) = (g \circ \phi)'(0)$$

zu i) Da f konstant ist, ist $f \circ \phi$ konstant auf $]-\varepsilon, \varepsilon[$
konstant. $\Rightarrow (f \circ \phi)'(0) = 0 \Rightarrow \partial_v f(x) = 0$

zu (ii) Beweis der Summenregel:

Nach Def der Richtungsableitung gilt $\partial_v (f+g)(x) = ((f+g) \circ \phi)'(0)$. Für alle $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ gilt $((f+g) \circ \phi)(t) = (f+g)(\phi(t)) = f(\phi(t)) + g(\phi(t)) = ((f \circ \phi) + (g \circ \phi))(t)$.

Da $\partial_v f(x)$, $\partial_v g(x)$ existieren, sind $f \circ \phi$ und $g \circ \phi$ in 0 diff'bar. Nach der Summenregel der Analysis einer Variablen ist auch $f \circ \phi + g \circ \phi$ in 0 diff'bar, und $((f \circ \phi) + (g \circ \phi))'(t) = (f \circ \phi)'(t) + (g \circ \phi)'(t) \quad \forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ insbesondere:

$$\begin{aligned}\partial_v (f+g)(x) &= ((f+g) \circ \phi)'(0) = ((f \circ \phi) + (g \circ \phi))'(0) \\ &= (f \circ \phi)'(0) + (g \circ \phi)'(0) = \partial_v f(x) + \partial_v g(x)\end{aligned}$$

Beweis der Produktregel:

Ebenso folgt aus der Diff'barkeit von $f \circ \phi$ und $g \circ \phi$ in 0 mit der 1-dim.

Produktregel die Diff'barkeit von $(f \circ \phi) \cdot (g \circ \phi)$ an der Stelle 0, und es

$$\begin{aligned} \text{gilt } D_v(fg)(x) &= ((fg) \circ \phi)'(0) \\ &= ((f \circ \phi) \cdot (g \circ \phi))'(0) \quad \text{Produktregel} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow ((f \circ \phi) \cdot (g \circ \phi))'(t) &= (f \circ \phi)'(t) (g \circ \phi)(t) \\ &+ (g \circ \phi)'(t) (f \circ \phi)(t) \quad \forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[. \end{aligned}$$

sofern die Ableitungen rechts existieren

$$\begin{aligned}\Rightarrow \partial_v (fg)(x) &= (f \circ \phi)(0) (g \circ \phi)'(0) + \\ & (g \circ \phi)(0) (f \circ \phi)'(0) = f(x) \partial_v g(x) + \\ & g(x) \partial_v f(x)\end{aligned}$$

zu iii) Vor. $\partial_v f(x)$ existiert, geg. $c \in \mathbb{R}$

z.zg: $\partial_{cv} f(x)$ existiert und ist gleich $c \partial_v f(x)$

Nach Def. der Richtungsableitung gilt $\partial_v f(x) = (f \circ \phi)'(0)$ und $\partial_{cv} f(x) = (f \circ \phi_c)'(0)$, wobei $\phi_c(t) = x + tcv$. Setze $c \neq 0$ voraus.

(Für $c=0$ ist das Eoq. klar, weil $f \circ \phi_c$ konstant ist.)

Für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $|t| < \frac{\varepsilon}{|c|}$ gilt $\phi_c(t) = (\phi \circ \pi_c)(t)$

mit $\pi_c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ geg. durch $t \mapsto ct$

$$\Rightarrow \text{erhalte } (f \circ \phi_c)'(t) = (f \circ \phi \circ \pi_c)'(t) \\ = (f \circ \phi)'(\pi_c(t)) \cdot \pi_c'(t), \text{ sofern } (f \circ \phi)'(\pi_c(t))$$

existiert insbesondere: $D_{cv} f(x) = (f \circ \phi_c)'(0)$

$$= (f \circ \phi)'(\pi_c(0)) \cdot \pi_c'(0) = (f \circ \phi)'(0) \cdot c$$

$$= c \cdot D_v f(x).$$



regel

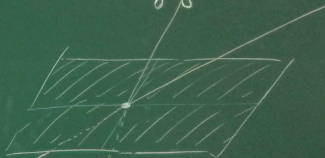
$\phi)'(t)$

$\in L$.

Gegenbeispiel zur Regel $\partial_{v+w} f(x) = \partial_v f(x) + \partial_w f(x)$:

Betrachte die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ geg. durch

$$f(x, y) = \begin{cases} 2x & \text{falls } y=0 \\ 3y & \text{falls } x=0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Definiere die Hilfsfunktionen

$$\phi_1(t) = te_1 = (t, 0), \quad \phi_2(t) = te_2 = (0, t),$$

$$\phi_3(t) = t \cdot (1, 1) = (t, t)$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 2y & \text{falls } x=0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



$$\Rightarrow (f \circ \phi_1)(t) = f(t, 0) = 2t$$

$$(f \circ \phi_2)(t) = f(0, t) = 3t$$

$$(f \circ \phi_3)(t) = f(t, t) = 0$$

$$\partial_{e_1} f(0,0) = (f \circ \phi_1)'(0) = 2$$

$$\partial_{e_2} f(0,0) = (f \circ \phi_2)'(0) = 3$$

$$\partial_{e_1+e_2} f(0,0) = (f \circ \phi_3)'(0) = 0$$

$$\Rightarrow \partial_{e_1} f(0,0) + \partial_{e_2} f(0,0) = 2+3 = 5 \neq 0 = \partial_{e_1+e_2} f(0,0)$$

Bem. Eine Funktion kann in einem Punkt unstetig sein, obwohl dort alle Richtungsableitungen existieren.

Bsp. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^6} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

- Existenz aller Richtungsableitungen

Sei $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Definiere $\phi_v(t) = (0, 0) + tv = (ta, tb)$.

1. Fall: $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt $(f \circ \phi_v)(t) = f(0, 0) = 0$

für alle $t \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow \nabla_v f(0, 0) = (f \circ \phi_v)'(0) = 0$

2. Fall: $a \neq 0 \vee b \neq 0$.

- Existenz aller Richtungsableitungen

$$\begin{aligned} \text{Dann gilt f\"ur } t \neq 0 \text{ jeweils } (f \circ \phi_v)(t) &= f(ta, tb) \\ &= \frac{(ta)(tb)^2}{(ta)^2 + (tb)^6} = \frac{t^3 a b^2}{t^2(a^2 + t^4 b^6)} = \frac{t a b^2}{a^2 + t^4 b^6} \end{aligned}$$

Ist $a \neq 0$, dann gilt die Gleichung auch f\"ur $t=0$

Die Funktion $t \mapsto \frac{t a b^2}{a^2 + t^4 b^6}$ ist (als rat. Fkt.) auf ihrem gesamten Def. bereich differenzierbar, insb. im Nullpunkt.
 $\Rightarrow D_v f(0,0) = (f \circ \phi_v)'(0)$ existiert

Ist $b \neq 0$, dann ist $t \mapsto (f \circ \phi_v)(t)$ konstant null auf ganz $\mathbb{R}$
 $\Rightarrow D_v f(0,0) = (f \circ \phi_v)'(0) = 0$

- Nachweis der Unstetigkeit im Nullpunkt:

Die Folge $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $(0,0)$ wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{aber:}$$

$$f\left(\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n^3} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\frac{1}{n^3}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^6} = \frac{\frac{1}{n^5}}{\frac{2}{n^6}} = \frac{1}{n^5} \cdot \frac{n^6}{2}$$

$$= \frac{1}{2} n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}\right) = +\infty, \text{ insbesondere}$$

gilt nicht $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}\right) = f(0, 0)$. Also ist

f in $(0, 0)$ unstetig.

Mehrfache partielle Ableitungen

- Man bezeichnet eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ als **stetig partiell differenzierbar**, wenn die partiellen Ableitungen $\partial_i f$ für $1 \leq i \leq n$ auf U existieren und stetig sind.
- Falls die Funktionen $\partial_i f$ ihrerseits alle partiell differenzierbar sind, spricht man von einer **zweifach partiell differenzierbaren** Funktion.
- Sind auch die Funktionen $\partial_i \partial_j f$ für $1 \leq i, j \leq n$ wieder stetig, nennt man f zweifach stetig partiell differenzierbar.
- Auf naheliegende Weise definiert man m -fach (stetig) partiell differenzierbar für beliebige $m \geq 3$.

Notation:

An Stelle von $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_m} f$ verwendet man zur Abkürzung auch die Schreibweise $\partial_{i_1 \dots i_m} f$ für die höheren partiellen Ableitungen.

Beispiel für mehrfache partielle Ableitungen.

$$f(x, y) = \sin(2x) \cdot e^{3y}$$

$$\partial_1 f(x, y) = 2 \cos(2x) e^{3y}$$

$$\partial_2 f(x, y) = 3 \sin(2x) e^{3y}$$

$$\partial_{11} f(x, y) = -4 \sin(2x) e^{3y}$$

$$\partial_{21} f(x, y) = 6 \cos(2x) e^{3y}$$

$$\partial_2(\partial_1 f)(x, y)$$

$$\partial_{12} f(x, y) = 6 \cos(2x) e^{3y}$$

$$\partial_{22} f(x, y) = 9 \sin(2x) e^{3y}$$

Bem.: Es gibt Funktion f mit $\partial_{12} f \neq \partial_{21} f$.

Bsp.: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Setzt man $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, dann ist $f|_U$ eine rationale Funktion (= Quotient zweier Polynome). Dort können $\partial_1 f$, $\partial_2 f$ einfach durch Anwendung der Ableitungsregeln angewendet werden. Quotientenregel $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x, y) &= \frac{(3x^2 y - y^3) \cdot (x^2 + y^2) - (x^3 y - x y^3) \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{\cancel{3x^4} y - x^2 \cancel{y^3} + 3x^2 y^3 - y^5 - 2x^4 y + 2x^3 \cancel{y^3}}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\text{ebenso: } \partial_2 f(x, y) = \frac{x^5 - 4x^3 y^2 - x y^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

für alle $(x, y) \neq (0, 0)$

Berechnung von $\partial_1 f(0, 0)$, $\partial_2 f(0, 0)$.

Definiere $\phi_1(t) = (t, 0)$, $\phi_2(t) = (0, t)$

$\Rightarrow (f \circ \phi_1)(t) = f(t, 0) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$

ebenso: $(f \circ \phi_2)(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \partial_1 f(0, 0) = (f \circ \phi_1)'(0) = 0$, $\partial_2 f(0, 0) = (f \circ \phi_2)'(0) = 0$

Ergebnis:

$$\partial_1 f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\partial_2 f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5 - 4x^3 y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$(\partial_1 f \circ \phi_2)(t) = \partial_1 f(0,t) = -\frac{t^5}{t^4} = -t \quad \text{für } t \neq 0$$

$$\Rightarrow (\partial_1 f \circ \phi_2)(t) = -t \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \partial_{2,1} f(0,0) = (\partial_1 f \circ \phi_2)'(0) = -1$$

$$(\partial_2 f \circ \phi_1)(t) = \partial_2 f(t, 0) = \frac{t^5}{t^4} = t \text{ für } t \neq 0$$

$$\Rightarrow (\partial_2 f \circ \phi_1)(t) = t \text{ für alle } t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \partial_{12} f(0, 0) = (\partial_2 f \circ \phi_1)'(0) = 1$$

$$\rightarrow \partial_{12} f(0, 0) = 1 \neq -1 = \partial_{21} f(0, 0)$$