Zusammenhängende topologische Räume

Sprechweise:
Ist $(X, \mathscr{T})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$, so bezeichnen wir eine Teilmenge $V \subseteq A$ als in A relativ offen bzw. relativ abgeschlossen, wenn V bezüglich der auf A induzierten Topologie offen bzw. abgeschlossen ist.

Definition (4.22)

Sei $(X, \mathscr{T})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ wird zusammenhängend genannt, wenn es keine disjunkten, nichtleeren und in A relativ offenen Mengen $U, V \subseteq A$ mit $A = U \cup V$ gibt.

Wir bezeichnen den topologischen Raum $(X, \mathscr{T})$ selbst als zusammenhängend, wenn die Teilmenge $A = X$ zusammenhängend ist.

Charakterisierung der zusammenhängenden Mengen

Proposition (4.23)

Eine Teilmenge A eines topologischen Raums $(X, \mathscr{T})$ ist genau dann zusammenhängend, wenn $\varnothing$ und A die einzigen Teilmengen von A sind, die sowohl relativ offen als auch relativ abgeschlossen in A sind.

Intervalle als zusammenhängende Teilmengen von $\mathbb{R}$

Satz (4.24)

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge, die mindestens zwei verschiedene Elemente enthält. Genau dann ist M eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}$, wenn M ein Intervall ist.

Der Zusammenhang unter stetigen Abbildungen

Proposition (4.25)

Seien $(X, \mathscr{T}_X)$ und $(Y, \mathscr{T}_Y)$ topologische Räume und $A \subseteq X$ zusammenhängend. Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Dann ist $f(A)$ eine zusammenhängende Teilmenge von Y.

Beweis von Prop. 4.25

$(X, \mathcal{J}), (Y, \mathcal{U})$ top. Räume, $f: X \to Y$ stetige Abb.

$A \subseteq X$ zusammenhängende Teilmenge

zzg.: $f(A)$ ist zshgd. Teilmenge von Y.

Ang. $f(A)$ ist nicht zusammenhängend. $\Rightarrow$ Es gibt eine Zerlegung $f(A) = U \cup V$ in nichtleere, disjunkte, in $f(A)$ relative offene Teilmengen $U, V \subseteq f(A)$.

$f: X \to Y$ stetig. $\Rightarrow$ $f|A : A \to f(A)$ ist stetig

Da $f|A$ stetig ist, sind die Urbildmengen $U_1 = (f|A)^{-1}(U)$

$f: X \to Y$ stetig $\Rightarrow$ $f|A : A \to f(A)$ ist stetig

Da $f|A$ stetig ist, sind die Urbilder wegen $U_1 = (f|A)^{-1}(U)$

und $V_1 = (f|A)^{-1}(V)$ relativ offen in A.

überprüfe außerdem: (1) $U_1 \cap V_1 = \emptyset$ (2) $U_1 \cup V_1 = A$

zu (1) Ang. $x \in U_1 \cap V_1$ $\quad x \in U_1 \Rightarrow x \in (f|A)^{-1}(U) \Rightarrow$
$(f|A)(x) \in U$ genauso: $(f|A)(x) \in V$ wegen $x \in V_1$
$\Rightarrow (f|A)(x) \in U \cap V$ ↯ zu $U \cap V = \emptyset$

zu (2) „$\subseteq$" klar, weil $f|A$ eine Abb. mit A als Def-bereich ist
„$\supseteq$" Sei $x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A) \overset{f(A) = U \cup V}{\Longrightarrow} f(x) \in U$ oder
$f(x) \in V \Rightarrow (f|A)(x) \in U$ oder $(f|A)(x) \in V \Rightarrow$
x liegt in $U_1 = (f|A)^{-1}(U)$ oder in $V_1 = (f|A)^{-1}(V)$
$\Rightarrow x \in U_1 \cup V_1$. $\square$

Der Zwischenwertsatz

Satz (4.26)

Sei $(X, \mathscr{T})$ ein topologischer Raum, $A \subseteq X$ eine zusammenhängende Teilmenge und $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Seien $a, b \in A$ vorgegeben. Dann nimmt f auf A jeden Wert $c \in \mathbb{R}$ mit $f(a) \le c \le f(b)$ an.

Beweis von Satz 4.26 (Zwischenwertsatz)

geg. $(X, \mathcal{T})$ top. Raum, $A \subseteq X$ zusammenhängend, $f: A \to \mathbb{R}$ stetig, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $f(a) \leq f(b)$, $c \in \mathbb{R}$ mit $f(a) \leq c \leq f(b)$ z.zg. $c \in f(A)$

A zshgd., f stetig $\overset{\text{Prop. 4.25}}{\Longrightarrow}$ $f(A)$ zshgd. Gilt $|f(A)| \leq 1$, dann ist die Aussage offensichtlich. Ansonsten ist $f(A) \subseteq \mathbb{R}$ nach Satz 4.24 ein Intervall. $f(a), f(b) \in f(A)$, $c \in \mathbb{R}$ mit $f(a) \leq c \leq f(b)$ $\overset{f(A) \text{ Intervall}}{\Longrightarrow}$ $c \in f(A)$

$\square$

Definition des Wegzusammenhangs

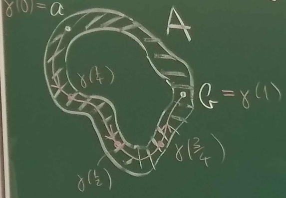
Definition (4.27)

Sei $(X, \mathscr{T})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt wegzusammenhängend, wenn für beliebige Punkte $a, b \in A$ jeweils eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to A$ mit

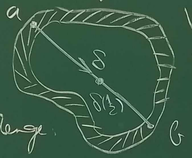
$$\gamma(0) = a \qquad \text{und} \qquad \gamma(1) = b$$

existiert. Man bezeichnet γ als Weg, der die Punkte a und b verbindet.

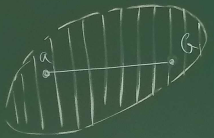
Veranschaulichung des Begriffs „wegzusammenhängend“



Diese Menge ist aber keine konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, denn: ~~Auf~~ der Verbindungsstrecke gibt es Punkte außerhalb von a, z.B. $\delta(\frac{1}{2})$



Beispiel für eine konvexe Menge:



Konvexe Teilmengen eines Vektorraums

Definition (4.28)

Sei V ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum, und seien $p, q \in V$. Dann ist die Verbindungsstrecke zwischen p und q die Menge $[p, q] = \{(1-t)p + tq \mid t \in [0, 1]\}$. Eine Teilmenge $A \subseteq V$ wird konvex genannt, wenn für alle $p, q \in A$ jeweils $[p, q] \subseteq A$ gilt.

Jede konvexe Teilmenge A in einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V ist wegzusammenhängend.

Proposition (4.29)

Sei V ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum. Dann ist jeder offene und jeder abgeschlossene Ball in V konvex.

Beweis von Prop. 4.26 (nur für abg. Bälle)

geg: normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$

Sei $r \in \mathbb{R}^+$ und $p \in V$. Zu zeigen:

$$\bar{B} = \bar{B}_r(p) = \{x \in V \mid \|x-p\| \leq r\}$$

ist eine konvexe Teilmenge von V.

Seien $x, y \in \bar{B}$. zzg: $[x,y] \subseteq \bar{B}$

Sei $\gamma : [0,1] \to V$, $t \mapsto (1-t)x + ty$

Dann gilt $\gamma([0,1]) = [x,y]$. Zu zeigen ist also $\gamma(t) \in \bar{B}$ für alle $t \in [0,1]$.

$x, y \in \overline{B} \Rightarrow \|x-p\| \leq r$ und $\|y-p\| \leq r$

$\|\gamma(t)-p\| = \|(1-t)x + ty - p\| =$

$\|(1-t)x - (1-t)p + ty - tp\| \leq$

$\|(1-t)x - (1-t)p\| + \|ty - tp\| =$

$\|(1-t)(x-p)\| + \|t(y-p)\| \overset{t\in[0,1]}{=}$

$(1-t)\underbrace{\|x-p\|}_{\leq r} + t\underbrace{\|y-p\|}_{\leq r} \leq (1-t)r + tr$

$= r \rightarrow \|\gamma(t)-p\| \leq r \Rightarrow \gamma(t) \in \overline{B}$ $\square$

Wegzusammenhang ⇒ Zusammenhang

Proposition (4.30)

Jeder wegzusammenhängende Teilmenge $A \subseteq X$ eines topologischen Raums $(X, \mathscr{T})$ ist zusammenhängend.

Beweis von Proposition 4.30.

Ang. $(X, \mathcal{T})$ ist ein topologischer Raum mit einer Teilmenge $A \subseteq X$, die zwar nicht zshgd., aber wegzshgd ist. nicht zshgd $\Rightarrow \exists\, U, V \subseteq A$, rel. offen in A, $U, V \neq \emptyset$ mit $U \cap V = \emptyset$ und $U \cup V = A$.

Wähle $a \in U$, $b \in V$. A wegzshgd. $\to \exists$ stetige Abb. $\gamma: [0,1] \to A$ mit $\gamma(0) = a$ und $\gamma(1) = b$.

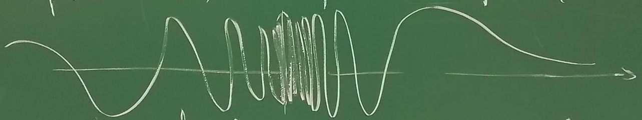
Betrachte $U_1 = \gamma^{-1}(U)$, $V_1 = \gamma^{-1}(V)$ γ stetig $\Rightarrow U_1, V_1 \subseteq [0,1]$ relativ offen, $U_1 \cap V_1 = \emptyset$ (sonst $U \cap V \neq \emptyset$), $U_1 \cup V_1 = [0,1]$ (weil jedes $\gamma(t)$ in $U \cup V$ liegt) $U_1, V_1 \neq \emptyset$;

$\Rightarrow U_1, V_1 \subseteq [0,1]$ relativ offen, $U_1 \cap V_1 = \emptyset$

denn $\gamma(0) = a \in U \Rightarrow 0 \in U_1$, ebenso $\gamma(1) = b \in V \Rightarrow 1 \in V_1$ insgesamt: $[0,1]$ ist nicht zusammenhängend $\lightning$ zu Satz 4.24 $\square$

Bem: Nicht jede zusammenhängende Menge ist wegzusammenhängend. Zum Beispiel ist

$$\Gamma = \{(x, \sin(\tfrac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \cup \{(0,0)\}$$



zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend.

Zusammenhang $\not\Rightarrow$ Wegzusammenhang

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Dann ist der Graph von f, also die Menge

$$A \quad = \quad \Gamma_f \quad = \quad \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

eine zusammenhängende, aber keine wegzusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}^2$.

Richtungsableitungen und partielle Ableitung

Definition (5.1)

Sei $U \subseteq V$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $a \in U$, $v \in V$, und sei $\phi : \mathbb{R} \to V$ gegeben durch $\phi(t) = a + tv$.

- Ist die Funktion $f \circ \phi$ im Punkt 0 differenzierbar, dann nennt man die Ableitung $\partial_v f(a) = (f \circ \phi)'(0)$ die Richtungsableitung von f im Punkt a in Richtung v.
- Ist $V = \mathbb{R}^n$ und $v = e_j$ für ein $j \in \{1, ..., n\}$, dann spricht man auch von der j-ten partiellen Ableitung und verwendet die Bezeichung $\partial_j f(a)$.

Beispiel für Richtungsableitungen / partielle Ableitungen

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto 2x^2 + 7y^2 + 5y$

Sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$.

- Berechnung von $\partial_v f(x_0, y_0)$ für $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

  Definiere $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + t \\ y_0 + t \end{pmatrix}$

  $\Rightarrow (f \circ \phi)(t) = f(x_0 + t, y_0 + t) = 2(x_0+t)^2 + 7(y_0+t)^2 + 5(y_0+t)$

  $\Rightarrow (f \circ \phi)'(t) = 4(x_0+t) \cdot 1 + 14(y_0+t) + 5$

  $\Rightarrow \partial_v f(x_0, y_0) = 4x_0 + 14y_0 + 5$

Definiere $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + t \\ y_0 + t \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (f \circ \phi)(t) = f(x_0 + t, y_0 + t) = 2(x_0+t)^2 + 7(y_0+t)^2 + 5(y_0+t)$

$\Rightarrow (f \circ \phi)'(t) = 4(x_0+t) \cdot 1 + 14(\dots) + 5$

- Berechnung von $\partial_1 f(x_0, y_0)$

Definiere $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + t \\ y_0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (f \circ \phi)(t) = 2(x_0+t)^2 + 7y_0^2 + 5y_0$

$\Rightarrow (f \circ \phi)'(t) = 4(x_0+t) \cdot 1 \Rightarrow \partial_1 f(x_0, y_0) = (f \circ \phi)'(0) = 4x_0$

Genauso überprüft man $\partial_2 f(x_0, y_0) = 14 y_0 + 5$

Alternativ kann man $\partial_1 f(x_0, y_0)$ dadurch ausrechnen, dass man die Ableitung von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x, y_0)$ an der Stelle x_0 bildet. Dies ist zulässig wegen Lemma 5.2. Ebenso erhält man $\partial_2 f(x_0, y_0)$ durch Ableitung von $y \mapsto f(x_0, y)$ an der Stelle y_0.

Berechne $\partial_v f(x_0, y_0)$ für einen bel. Vektor $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Betrachte die Hilfsfkt.

$$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \; t \mapsto \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + ta \\ y_0 + tb \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (f \circ \phi)(t) = f(x_0 + ta, y_0 + tb) =$$

$$2(x_0 + ta)^2 + 7(y_0 + tb)^2 + 5(y_0 + tb)$$

$$\Rightarrow (f \circ \phi)'(t) = 4(x_0 + ta) \cdot a + 14(y_0 + tb) \cdot b$$
$$+ 5b$$

$$\Rightarrow \partial_v f(x_0, y_0) = (f \circ \phi)'(0) = 4x_0 a +$$
$$14 y_0 b + 5b = a \cdot 4x_0 + b \cdot (14 y_0 + 5)$$
$$= a \cdot \partial_1 f(x_0, y_0) + b \cdot \partial_2 f(x_0, y_0)$$

$y_0 + t$

Zur Notation

Wird f in Abhängigkeit von Variablen x, y, ... dargestellt, zum Beispiel in der Form $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$, dann verwendet man an Stelle von $\partial_1 f$ und $\partial_2 f$ auch die Bezeichnungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}$$

für die partiellen Ableitungen.

Zur Berechnung der partiellen Ableitung

Lemma (5.2)

Sei $U \subseteq V$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Seien $a, v \in V$, und sei $\phi : \mathbb{R} \to V$ gegeben durch $\phi(t) = a + tv$. Für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $\phi(t) \in U$ existiert $\partial_v f(a + tv)$ genau dann, wenn $f \circ \phi$ an der Stelle t differenzierbar ist, und in diesem Fall gilt $\partial_v f(a + tv) = (f \circ \phi)'(t)$.

Beweis von Lemma 5.2:

Sei $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $a + t_0 v \in U$ (d.h. f kann im Punkt $a + t_0 v$ ausgewertet werden). Nach Definition existiert $\partial_v f(a + t_0 v)$ genau dann, wenn $f \circ \psi$ mit der Hilfsfunktion $\psi(t) = a + t_0 v + tv = a + (t_0 + t) v$ in 0 diff'bar ist, und es gilt dann $\partial_v f(a + t_0 v) = (f \circ \psi)'(0)$

zu zeigen also:

$$f \circ \phi \text{ in } t_0 \text{ diff'bar} \iff f \circ \psi \text{ in } 0 \text{ diff'bar}$$

Offenbar gilt $\psi(t) = \phi(t + t_0) = (\phi \circ \tau)(t)$ mit $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto t + t_0$, für alle $t \in \mathbb{R}$.

zu zeigen also:

$$f \circ \phi \text{ in } t_0 \text{ diff'bar} \Leftrightarrow f \circ \psi \text{ in } 0 \text{ diff'bar}$$

Offenbar gilt $\psi(t) = \phi(t+t_0) = (\phi \circ \tau)(t)$

Damit folgt „$\Rightarrow$" einfach aus der Kettenregel, wegen $f \circ \psi = f \circ \phi \circ \tau$. Demnach gilt $(f \circ \psi)'(t) = ((f \circ \phi) \circ \tau)'(t) = (f \circ \phi)'(\tau(t))\, \tau'(t) = (f \circ \phi)'(\tau(t))\, 1$
$= (f \circ \phi)'(\tau(t))$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $a + (t+t_0)v \in U$.

insbesondere: $\partial_v f(a + t_0 v) = (f \circ \psi)'(0) = (f \circ \phi)'(\tau(0)) = (f \circ \phi)'(t_0)$

„$\Leftarrow$" läuft ebenfalls mit der Kettenregel. Verwende hier die Gleichung $f \circ \phi = f \circ \psi \circ \tau_1$, mit $\tau_1(t) = \tau^{-1}(t) = t - t_0$.

$\square$

Zur Berechnung der partiellen Ableitung (Forts.)

Folgerung (5.3)

Sei $U \subseteq V$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in U$. Dann gilt

$$\partial_j f(a) \quad = \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(f(a_1, ..., a_{j-1}, t, a_{j+1}, ..., a_n)\right)\Big|_{t=a_j}.$$

Dies soll bedeuten, dass genau dann die j-te partielle Ableitung von f an der Stelle a definiert ist, wenn die Funktion

$$t \mapsto f(a_1, ..., a_{j-1}, t, a_{j+1}, ..., a_n)$$

an der Stelle a_j differenzierbar ist, und dass in diesem Fall die Ableitung dieser Funktion an der Stelle a_j mit $\partial_j f(a)$ übereinstimmt.