

Satz (4.16 Heine-Borel)

Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

In allgemeinen metrischen Räumen ist der Satz von Heine-Borel nicht gültig.

Proposition (4.17)

Sei X eine **unendliche** Menge und δ_X die diskrete Metrik auf X . Dann ist X zwar **beschränkt und abgeschlossen**, aber **nicht kompakt**.

Satz (4.18)

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen, wobei X kompakt sei. Dann ist auch die **Bildmenge** $f(X)$ kompakt.

Satz (4.19)

Jede stetige, reellwertige Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem **kompakten** topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ ist beschränkt und nimmt auf X ihr Maximum und Minimum an.

Beweis von Satz 4.18

geg. topologische Räume $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{U})$

wobei X kompakt ist

$f: X \rightarrow Y$ stetige Abbildung

Beh.: $f(X)$ ist kompakte Teilmenge von Y

Sei $(V_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $f(X)$, d.h.

$\bigcup_{i \in I} V_i \supseteq f(X)$. z.zg.: $\exists$ endliche Teilüberdeckung

Sei $U_i = f^{-1}(V_i)$ für jedes $i \in I$.

Beh.: $(U_i)_{i \in I}$ ist eine offene Überdeckung von X

Sei $U_i = f^{-1}(V_i)$ für jedes $i \in I$.

Beh.: $(U_i)_{i \in I}$ ist eine offene Überdeckung von X

- Für jedes $i \in I$ ist $V_i \subseteq Y$ offen. Weil f stetig ist, ist damit auch $U_i = f^{-1}(V_i)$.
- überprüfe: $\bigcup_{i \in I} U_i \supseteq X$ Sei $x \in X \Rightarrow f(x) \in f(X)$
 $(V_i)_{i \in I}$ Überdeckung von $f(X) \Rightarrow \exists i \in I$ mit $f(x) \in V_i$
 $\Rightarrow x \in f^{-1}(V_i) \Rightarrow x \in U_i \Rightarrow x \in \bigcup_{i \in I} U_i$ ($\Rightarrow$ Beh.)

Da X kompakt ist, existiert eine endl. Teilmenge $J \subseteq I$ mit $\bigcup_{i \in J} U_i \supseteq X$. Daraus folgt $\bigcup_{i \in J} V_i \supseteq f(X)$, dann:

Sei $y \in f(X) \Rightarrow \exists x \in X : y = f(x) \stackrel{\text{S.o.}}{\Rightarrow} \exists i \in J$ mit $x \in U_i$

überprüfe: $y \in V_i \quad x \in f^{-1}(V_i) \Rightarrow f(x) \in V_i \Rightarrow y \in V_i$



Beweis des Maximumprinzips (Satz 4.19)

geg. (X, T) kompakter topologischer
Raum, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $X \neq \emptyset$

z.zg. f ist beschränkt, Funktion nimmt
auf X ein Maximum und ein Mini-
mum an

Satz 4.18 $\Rightarrow f(X)$ ist eine kompakte
Teilmenge von $\mathbb{R}$ Satz von Heine-Borel
 $\Rightarrow f(X) \subseteq \mathbb{R}$ ist beschränkt und abge-
schlossen

zeige: f nimmt einen maximalen Wert auf X an.
Da $f(X)$ beschränkt und nicht-leer ist, existiert
 $s = \sup f(X)$ in $\mathbb{R}$. Nach Def. des Supremums
existiert eine Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $f(X)$ mit
 $s - \frac{1}{n} < y_n \leq s$ in $f(X)$. Diese Folge kon-
vergiert gegen s . $f(X)$ abgeschlossen $\Rightarrow$ Satz 3.9
Der Grenzwert s der Folge ist in $f(X)$ enthalten.
 $\Rightarrow \exists x \in X$ mit $f(x) = s$, d.h. das Maximum
wird von f auf X angenommen. $\square$

Gleichmäßige Stetigkeit auf kompakten Räumen

Definition (4.20)

Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y) wird **gleichmäßig stetig** auf X genannt, wenn für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass die Implikation

$$d_X(x, y) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

für alle $x, y \in X$ erfüllt ist.

Satz (4.21)

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen, wobei X **kompakt** sei. Dann ist f sogar **gleichmäßig stetig** auf X .

Beweis von Satz 4.21

geg: (X, d) , (Y, d') metrische Räume,

wobei X kompakt ist, $f: X \rightarrow Y$ stetige Abb.

z.zg: f ist gleichmäßig stetig

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. z.zg: $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$ so dass

$$\forall x, y \in X: d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon \quad (*)$$

Sei $a \in X$. f ist stetig in $a \Rightarrow \exists \delta_a \in \mathbb{R}^+$:

$$\forall x \in X: d(a, x) < \delta_a \stackrel{(***)}{\Rightarrow} d'(f(a), f(x)) < \frac{1}{2}\varepsilon$$

Definiere jeweils $U_a = B_{\frac{1}{2}\delta_a}(a) \subseteq X$.

klar: $(U_a)_{a \in X}$ ist offene Überdeckung von X

Da X kompakt ist, existiert eine endl. Teilmenge $J \subseteq X$ mit $X \stackrel{(**)}{=} \bigcup_{a \in J} U_a$. Definiere

Nun $\delta \in \mathbb{R}^+$ durch $\delta = \min \{ \frac{1}{2} \delta_a \mid a \in J \}$

Beh.: Mit diesem δ ist die Aussage (*) erfüllt.

Seien $x, y \in X$ mit $d(x, y) < \delta$. z.zg.:

$d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ Wegen $(**)$ existiert ein $a \in J$,
so dass x in $U_a = B_{\frac{1}{2}\delta_a}(a)$ liegt.

$$\begin{aligned} d(a, y) &\leq d(a, x) + d(x, y) < \frac{1}{2}\delta_a + \delta \\ &\leq \frac{1}{2}\delta_a + \frac{1}{2}\delta_a = \delta_a \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ x \in B_{\frac{1}{2}\delta_a}(a) \end{array}$$

Wegen (***) folgt $d(f(a), f(y)) < \frac{1}{2}\varepsilon$

$$d(a, x) < \frac{1}{2}\delta_a < \delta_a \stackrel{(***)}{\Rightarrow} d(f(a), f(x)) < \frac{1}{2}\varepsilon$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow d(f(x), f(y)) &\leq d(f(x), f(a)) + d(f(a), f(y)) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

□

Zusammenhängende topologische Räume

Sprechweise:

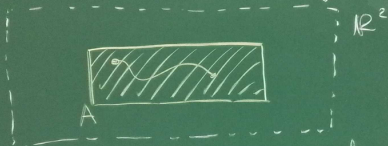
Ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$, so bezeichnen wir eine Teilmenge $V \subseteq A$ als in A **relativ offen** bzw. **relativ abgeschlossen**, wenn V bezüglich der auf A **induzierten Topologie** offen bzw. abgeschlossen ist.

Definition (4.22)

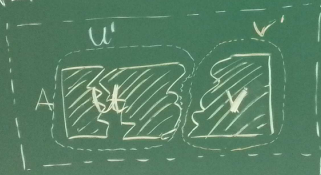
Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ wird **zusammenhängend** genannt, wenn es keine disjunkten, nichtleeren und in A relativ offenen Mengen $U, V \subseteq A$ mit $A = U \cup V$ gibt.

Wir bezeichnen den topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ selbst als **zusammenhängend**, wenn die Teilmenge $A = X$ zusammenhängend ist.

Beispiel für eine zusammenhängende Teilmenge
des $\mathbb{R}^2$



Beispiel für eine nicht zusammenhängende Teilmenge



U, V sind relativ offen
in A , weil U' und V'
offen in $\mathbb{R}^2$ sind

Proposition (4.23)

Eine Teilmenge A eines topologischen Raums $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann zusammenhängend, wenn $\emptyset$ und A die **einzigsten** Teilmengen von A sind, die sowohl relativ offen als auch relativ abgeschlossen in A sind.

Beweis von Proposition 4.23

Wir beweisen beide Richtungen durch Kontraposition, also:

- (i) Ist A nicht zusammenhängend, dann gibt es eine Teilmenge $U \subsetneq A$ mit $U \neq \emptyset$, die in A sowohl relativ offen als auch relativ abgeschlossen ist.
- (ii) Existiert umgekehrt ein solches U , dann ist U nicht zusammenhängend.

zu i) A nicht zshgnd $\Rightarrow \exists U, V \subseteq A, U, V \neq \emptyset$ mit
 $U \cap V = \emptyset$ und $U \cup V = A$, beide relativ offen in A .
Aufgrund der Voraussetzungen gilt $U = A \setminus V$ und
 $V = A \setminus U, V \neq \emptyset \Rightarrow U = A \setminus V \subsetneq A$ Da V in A

relativ offen ist, ist $U = A \setminus V$ in A relativ abgeschlossen. Insgesamt hat U also alle angegebenen Eigenschaften.

zu iii) Sei U wie angegeben. Sei $V = A \setminus U$.

Dann gilt $U \cap V = \emptyset$ und $U \cup V = A$.

U relativ abg. in $A \Rightarrow V = A \setminus U$ ist relativ offen in A . Aus $U \neq A$ folgt außerdem $V \neq \emptyset$. Also zeigt die Existenz von U und V insgesamt, dass A nicht zusammenhängend ist.

Satz (4.24)

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge, die mindestens zwei verschiedene Elemente enthält. Genau dann ist M eine **zusammenhängende** Teilmenge von $\mathbb{R}$, wenn M ein **Intervall** ist.

Beweis von Satz 4.24

geg.: $M \subseteq \mathbb{R}$ mit $|M| \geq 2$ (z.B. $|M| = +\infty$)

Beh.: M ist Intervall $\Leftrightarrow M$ ist zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}$

" $\Leftarrow$ " Ang. M ist zusammenhängend, aber kein Intervall. Dann gibt es Elemente $u, v \in M$ und ein $z \in \mathbb{R}$, so dass $u < z < v$ und $z \notin M$ gilt. Sei $U' =]-\infty, z[$, $V' =]z, +\infty[$.
Setze $U = M \cap U'$ und $V = M \cap V'$.

U' und V' sind offen in $\mathbb{R}$ (als offene Intervalle) $\Rightarrow U, V$ beide relativ offen in M

$$u \in U \Rightarrow U \neq \emptyset, v \in V \Rightarrow V \neq \emptyset$$

$$U' \cap V' = \emptyset \Rightarrow U \cap V = \emptyset$$

noch zu überprüfen: $M = U \cup V$

„ $\supseteq$ “ klar, weil $U \subseteq M$ und $V \subseteq M$ nach Def

„ $\subseteq$ “ Sei $x \in M \xrightarrow{z \in M} x < z$ oder $x > z$

$$1. \text{ Fall: } x < z \Rightarrow x \in]-\infty, z[\xrightarrow{x \in M} x \in U$$

$$2. \text{ Fall: } x > z \Rightarrow x \in]z, +\infty[\xrightarrow{x \in M} x \in V$$

Also gilt $x \in U \cup V$ in beiden Fällen.

" $\Rightarrow$ " Vor: M ist Intervall

Ang. M ist nicht zusammenhängend.

$\Rightarrow \exists U, V \subseteq M, U, V \neq \emptyset$ mit $M = U \cup V$

$U \cap V = \emptyset$, U, V beide relativ offen in M

$U \neq \emptyset \Rightarrow \exists u \in U \quad V \neq \emptyset \Rightarrow \exists v \in V$

O.B.d.A. setze $u < v$ woraus

Betrachte $[u, v] \cap M$. Die disjunkte Zerlegung $M = U \cup V$ liefert eine Zerlegung

$[u, v] = U_1 \cup V_1$ in $U_1 = U \cap [u, v], V_1 = V \cap [u, v]$

Dabei gilt $u \in U_1$ und $v \in V_1$, und $U_1 \cap V_1 = \emptyset$.

Sei $s = \sup U_1$ (existiert in $\mathbb{R}$, weil $U_1 \neq \emptyset$ gilt und $U_1 \subseteq [u, v]$ beschränkt ist). Nach Def. des Supremums existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $s_n \in U_1$ mit $s - \frac{1}{n} < s_n \leq s$.

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$. V_1 relativ offen in $[u, v] \cap M \Rightarrow$

$U_1 = [u, v] \setminus V_1$ ist relativ abg. in $[u, v]$. Weil s der Grenzwert einer in U_1 liegenden Folge ist, erhalten wir $s \in U_1$ durch

Satz 3.9. $s \in U_1$, U_1 ist relativ offen in $[u, v] \Rightarrow \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(s) \subseteq U_1 \Rightarrow [s, s + \varepsilon[\subseteq U_1 \Rightarrow s + \frac{1}{2}\varepsilon \in U_1$,

$\uparrow$ weil s das Supremum von U_1 ist. □