Definition der offenen Überdeckung einer Menge

Definition (4.1)

Sei I eine Menge, $(X, \mathscr{T})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Eine offene Überdeckung von A ist eine Familie $(U_i)_{i \in I}$ offener Teilmengen $U_i \subseteq X$ mit der Eigenschaft $\bigcup_{i \in I} U_i \supseteq A$.

Definition der Kompaktheit

Definition (4.2)

Sei $(X, \mathscr{T})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ wird kompakt genannt, wenn zu jeder offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von A eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ existiert, so dass bereits $\bigcup_{i \in J} U_i \supseteq A$ erfüllt ist.

Proposition (4.3)

Sei $(X, \mathscr{T})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ eine endliche Teilmenge. Dann ist A kompakt.

Proposition (4.4)

Die Menge $\mathbb{R}$ im metrischen Raum $(\mathbb{R}, d_1)$ mit der Standardmetrik $d_1(x,y) = |x-y|$ für $x, y \in \mathbb{R}$ ist nicht kompakt.

Proposition (4.5)

Sei $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in einem metrischen Raum (X, d) mit Grenzwert $a = \lim_n x^{(n)}$. Dann ist die Menge

$$A \quad = \quad \{x^{(n)} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\} \quad \text{kompakt.}$$

Durchmesser und Beschränktheit

Definition (4.6)

Eine Teilmenge $A \subseteq X$ eines metrischen Raums (X, d_X) wird beschränkt genannt, wenn die Menge

$$D(A) \quad = \quad \{d_X(a,b) \mid a,b \in A\} \subseteq \mathbb{R}_+$$

beschränkt ist. Ist dies der Fall, dann bezeichnen wir $d(A) = \sup D(A)$ als den Durchmesser der Teilmenge A. Der leeren Menge $\varnothing$ wird der Durchmesser $d(\varnothing) = 0$ zugeordnet.

Satz (4.7)

Sei (X, d_X) ein vollständiger metrischer Raum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nichtleerer, abgeschlossener, beschränkter Teilmengen von X mit $A_n \supseteq A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Gilt

$$\lim_{n\to\infty} d(A_n) \quad = \quad 0 \quad ,$$

dann gibt es einen eindeutig bestimmten Punkt $a \in X$ mit $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{a\}$.

Beweis von Satz 4.7

geg: vollst. metrischer Raum (X, d)

Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abg. beschr. Teilmengen $A_n \subseteq X$

mit $A_n \supseteq A_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} d(A_n) = 0$

Beh.: Es gibt genau ein $a \in X$ mit $a \in A_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Eindeutigkeit: Ang. $a, a' \in X$ sind Punkte mit

$a \in A_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und $a' \in A_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

z.zg. $a = a'$. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ mit $d(A_n) < \varepsilon$

$a, a' \in A_n \Rightarrow d(a, a') \leq d(A_n) < \varepsilon$

also: $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : d(a,a') < \varepsilon \Rightarrow d(a,a') = 0 \Rightarrow a = a'$

Existenz: Sei $a_n \in A_n$ bel. gewählt für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Beh.: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge in (X, d)

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgeg. $\lim\limits_{n \to \infty} d(A_n) = 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N :$

$d(A_n) < \varepsilon$ Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geq N$.

$a_m \in A_m,\ a_n \in A_n \xRightarrow[A_m, A_n \subseteq A_N]{m,n \geq N} a_m, a_n \in A_N \xRightarrow{d(A_N) < \varepsilon}$

$\Rightarrow d(a_m, a_n) < \varepsilon$ ($\Rightarrow$ Beh.) Aus der Beh. folgt, dass die Folge gegen ein $a \in X$ konvergiert.

noch zu zeigen: $a \in A_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ Sei $n \in \mathbb{N}$ vorgeg.

Dann gilt $a_n \in A_n$. $\forall m \geq n: A_m \subseteq A_n$,

$a_m \in A_m \Rightarrow \forall m \geq n: a_m \in A_n \Rightarrow$

Die Folge $(a_m)_{m \geq n}$ ist in A_n enthalten, sie konvergiert gegen a, und A_n ist abgeschlossen. $\xRightarrow{\text{Satz 3.9}}$ $a \in A_n$ $\square$

Kompaktheit abgeschlossener Quader

Definition (4.8)

Ein abgeschlossener Quader in $\mathbb{R}^n$ ist eine Teilmenge $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ der Form

$$Q \quad = \quad I_1 \times \ldots \times I_n \quad ,$$

wobei $I_k \subseteq \mathbb{R}$ für $1 \leq k \leq n$ jeweils ein abgeschlossenes Intervall $[a_k, b_k]$ mit $a_k < b_k$ bezeichnet.

Satz (4.9)

Jeder abgeschlossene Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ist kompakt.

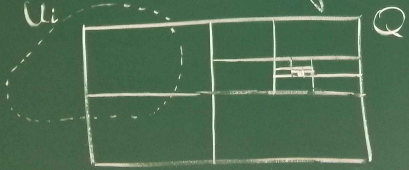
Beweis von Satz 4.9

geg: abgeschlossener Quader $Q = I_1 \times \dots \times I_n$

$I_k = [a_k, b_k]$ mit $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $a_k < b_k$,

für $1 \leq k \leq n$ Beh: Q ist kompakt

Ang., dies ist nicht der Fall. Dann gibt es eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von Q, in der keine endliche Teilüberdeckung von Q existiert.



Wir konstruieren eine Folge $(Q_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ von abgeschlossenen Quadern mit der Eigenschaft $Q_m \supseteq Q_{m+1}$ und $d(Q_m) = 2^{-m} d(Q)$ $\forall m \in \mathbb{N}_0$. Außerdem wird die Folge so gewählt, dass kein Q_m durch endlich viele Elemente von $(Q_i)_{i \in I}$ überdeckt wird.

Definiere $Q_0 = Q$. Sei nun $m \in \mathbb{N}_0$, und nehme an, dass Q_m bereits konstruiert ist, $Q_m = J_1 \times \dots \times J_n$, $J_k = [c_k, d_k]$ mit $c_k < d_k$ für $1 \leq k \leq n$.

Sei $u_k = \frac{1}{2}(c_k + d_k)$, $J_k^{(1)} = [c_k, u_k]$, $J_k^{(2)} = [u_k, v_k]$

Für jedes $s \in \{1,2\}^n$ definiere den Teilquader

In

t

eine

keine

t:

$Q_m^{(s)}$ durch $J_1^{(s_1)} \times J_2^{(s_2)} \times \ldots \times J_n^{(s_n)}$

Laut Annahme wird Q_m nicht durch endl. viele Elemente von $(U_i)_{i\in I}$ überdeckt. Also muss ein $s \in \{1,2\}^n$ existiert, so dass dasselbe für $Q_m^{(s)}$ gilt. Setze $Q_{m+1} = Q_m^{(s)}$ für dieses s.

Ist die Metrik d durch $\| \; \|_\infty$ definiert, dann gilt $d(Q_m) = \max\{ d_k - c_k \mid 1 \le k \le n \}$.
Laut Annahme ist außerdem $d(Q_m) = 2^{-m} \cdot d(Q)$.
Sei $u_k = \frac{1}{2}(c_k + d_k)$. $J_k^{(s)} \in \{ [c_k, u_k], [u_k, d_k] \}$
$\Rightarrow$ Die Länge von $J_k^{(s)}$ ist auf jeden Fall $\frac{1}{2}(d_k - c_k)$

weil sowohl $u_k - c_k = \frac{1}{2}(d_k - c_k)$ als auch $d_k - u_k = \frac{1}{2}(d_k - c_k)$

$\Rightarrow d(Q_{m+1}) = \frac{1}{2} d(Q_m) = \frac{1}{2} 2^{-m} d(Q) = 2^{-(m+1)} d(Q)$.

Laut Schachtelungsprinzip (Satz 4.7) existiert ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\bigcap_{m \in \mathbb{N}_0} Q_m = \{x\}$. $x \in Q \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow$ Es gibt ein $i_0 \in I$ mit $x \in U_{i_0}$. U_{i_0} offen $\Rightarrow \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq U_{i_0}$. Wähle $m \in \mathbb{N}$ so groß, dass $2^{-m} d(Q) < \varepsilon$.

$\Rightarrow d(Q_m) < \varepsilon$ <u>Beh</u>: $Q_m \subseteq U_{i_0}$. Sei $y \in Q_m$

$\Rightarrow x, y \in Q_m \overset{d(Q_m) < \varepsilon}{\Longrightarrow} d(x,y) < \varepsilon \Rightarrow y \in B_\varepsilon(x)$

$\overset{B_\varepsilon(x) \subseteq U_{i_0}}{\Longrightarrow} y \in U_{i_0}$ ($\Rightarrow$ Beh.)

Die Behauptung widerspricht der Aussage, dass Q_m nicht durch endl. viele Elemente von $(Q_i)_{i \in I}$ überdeckt wird.

$\square$

Kompakte Teilmengen im $\mathbb{R}^n$

Satz (4.10)

Sei A eine abgeschlossene Teilmenge eines kompakten topologischen Raums $(X, \mathscr{T})$. Dann ist A kompakt.

Folgerung (4.11)

Jede beschränkte und abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist kompakt.

Beweis von Satz 4.10:

$(X, \mathcal{T})$ kompakter top. Raum, $A \subseteq X$ abgeschlossen

z.zg.: A ist kompakt

Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von A.

z.zg.: Es gibt eine endl. Teilüberdeckung

A abgeschl. $\Rightarrow U = X \setminus A$ ist offen

$(U_i)_{i \in I}$ zusammen mit U bildet eine offene Überdeckung von X, denn: $X = A \cup (X \setminus A) \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i \cup U$

A abgeschl $\Rightarrow U = X \setminus A$ ist offen

Da X kompakt ist, gibt es eine endl. Teilmenge $J \subseteq I$ mit $\bigcup_{i \in J} U_i \cup U = X \Rightarrow$

$$A = X \cap A = \bigcup_{i \in J} (U_i \cap A) \cup (U \cap A) =$$

$$\bigcup_{i \in J} (U_i \cap A) \cup \emptyset = \Big(\bigcup_{i \in J} U_i\Big) \cap A$$

$\Rightarrow \bigcup_{i \in J} U_i \supseteq A$ Also existiert für A in $(U_i)_{i \in I}$ tatsächlich eine endl. Teilüberdeckung. $\square$

Der Satz von Bolzano-Weierstrass

Definition (4.12)

Ein Punkt x in einem topologischen Raum $(X, \mathscr{T})$ wird Häufungspunkt einer Teilmenge $A \subseteq X$ genannt, wenn in jeder Umgebung von x jeweils unendlich viele Elemente aus A liegen.

Satz (4.13)

Jede Folge in einem kompakten metrischen Raum (X, d_X) besitzt eine konvergente Teilfolge.

Folgerung (4.14)

Jede beschränkte Folge im $\mathbb{R}^n$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis von Satz 4.13 (Bolzano-Weierstrass)

geg.: kompakter metrischer Raum (X, d)

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in (X, d)

z.zg.: Es gibt eine konvergente Teilfolge.

Betrachte die Menge $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

1. <u>Fall</u>: A ist endlich. Dann existiert ein $a \in A$ mit $a_n = a$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Sei $N = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n = a\}$.

und seien $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ die Elemente von N der Größe nach geordnet. Dann ist $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine konstante und somit konvergente Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. Fall: A ist unendlich

Wir zeigen, dass A einen Häufungspunkt besitzt. Ang., es gibt keinen Häufungspunkt. Dann existiert für jedes $x \in X$ eine offene Umgebung U_x, so dass $U_x \cap A$ jeweils endlich ist. Für jedes $x \in X$ gilt $\{x\} \subseteq U_x$

$\Rightarrow X = \bigcup_{x \in X} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in X} U_x$ Also ist

N

Se

Da

$\leq$

ss)

folge

[ ]

ein

ele

[ ].

$(U_x)_{x \in X}$ eine offene Überdeckung von X.

X kompakt $\Rightarrow$ Es gibt eine endl. Teilmenge $J \subseteq X$ mit $X = \bigcup_{x \in J} U_x \Rightarrow A = X \cap A$

$= \left(\bigcup_{x \in J} U_x\right) \cap A = \bigcup_{x \in J} (U_x \cap A)$

Weil J endlich ist und $U_x \cap A$ endl. $\forall x \in J$, ist A endlich. ↯ zur Vor.

Also besitzt A einen Häufungspunkt $a \in X$.

Definiere $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ folgendermaßen rekursiv:

Wähle n_1 so, dass $a_{n_1} \in B_{1/2}(a)$ (existiert, von

ver-

et

ngs-

X eine

jeweils

$x\} \subseteq U_x$

so ist

weil a Häufungspkt. von a ist).

Sei $k \in \mathbb{N}$ und nehme an, dass n_k bereits konstruiert ist. Weil a Häufungspunkt ist, existiert ein $n > n_k$ mit $a_n \in B_{2^{-(k+1)}}(a)$.

Setze dann $n_{k+1} = n$.

<u>Beh</u>: Die Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen a.

Nach Konstruktion gilt $d(a, a_{n_k}) < 2^{-k}$.

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Wähle $K \in \mathbb{N}$ so, dass $2^{-K} < \varepsilon$.

Dann gilt für alle $k \geq K$: $d(a, a_{n_k}) < 2^{-k} \leq 2^{-K} < \varepsilon$. ($\Rightarrow$ Beh.) $\square$

Der Satz von Heine-Borel

Folgerung (4.15)

Jede kompakte Teilmenge $A \subseteq X$ eines metrischen Raums (X, d_X) ist beschränkt und abgeschlossen.

Satz (4.16 Heine-Borel)

Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Beweis von Folgerung 4.15

geg: metrischer Raum (X, d), $A \subseteq X$ kompakt

z.zg: A ist beschränkt und abgeschlossen

Ang.: A ist nicht beschränkt.

Wähle $x_0 \in X$ bel. und definiere $B_n = B_n(x_0)$ (offene Ball vom Radius n) $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = X$, insb. ist $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ eine offene Überdeckung von A. A kompakt $\Rightarrow \exists$ endliche Teilmenge $J \subseteq \mathbb{N}$ mit $\bigcup_{n \in J} B_n \supseteq A$. aber: $\bigcup_{n \in J} B_n$ ist beschränkt

Wähle $x_0 \in X$ bel. und definiere $B_n = B_n(x_0)$
(offene Ball vom Radius n) $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ A ist beschränkt $\lightning$

Ang. A ist nicht abgeschlossen. Nach Satz 3.9 muss es dann eine in X konvergente, in A enthaltene Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ geben, deren Grenzwert x nicht in A liegt.
aber: Satz von Bolzano-W. $\Rightarrow$ Es gibt eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die einen Grenzwert a in A besitzt, auf Grund der Kompaktheit von A. Auf Grund der Teilfolgeneig. muss aber $a = x$ gelten. also: $a \in A$ und $a = x \notin A$ $\lightning$ $\square$