# Definition der topologischen Räume

## Definition (3.3)

Sei $X$ eine Menge und $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{P}(X)$. Man bezeichnet $\mathscr{T}$ als Topologie auf $X$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

(i) Es gilt $\varnothing \in \mathscr{T}$ und $X \in \mathscr{T}$.

(ii) Für alle $U, V \in \mathscr{T}$ gilt $U \cap V \in \mathscr{T}$.

(iii) Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen von $X$, wobei $U_i \in \mathscr{T}$ für jedes $i \in I$ gilt, dann ist auch die Vereinigung $\bigcup_{i \in I} U_i$ ein Element von $\mathscr{T}$.

Ein Paar $(X, \mathscr{T})$ bestehend aus einer Menge $X$ und einer Topologie $\mathscr{T}$ auf $X$ bezeichnet man als topologischen Raum. Die Elemente von $\mathscr{T}$ werden als offene, die Mengen der Form $X \setminus U$ mit $U \in \mathscr{T}$ als abgeschlossene Teilmengen des topologischen Raums bezeichnet.

# Definition der Stetigkeit auf topologischen Räumen

**Definition (3.12)**

Seien $(X, \mathscr{T})$ und $(Y, \mathscr{U})$ topologische Räume, $f : X \to Y$ eine Abbildung, und sei $a \in X$.

- Wir bezeichnen $f$ als stetig im Punkt $a$, wenn für jede Umgebung $V$ von $f(a)$ in $(Y, \mathscr{U})$ eine Umgebung $U$ von $a$ in $(X, \mathscr{T})$ mit $f(U) \subseteq V$ existiert.
- Die Funktion $f$ wird ingesamt als stetig bezeichnet, wenn sie in jedem Punkt von $X$ stetig ist.

# Charakterisierung der stetigen Funktionen

**Proposition (3.13)**

Seien $(X, \mathscr{T})$ und $(Y, \mathscr{U})$ topologische Räume. Für eine Abbildung $f : X \to Y$ sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(i) Die Abbildung $f$ ist stetig.

(ii) Für jede offene Teilmenge $V$ in $(Y, \mathscr{U})$ ist $f^{-1}(V)$ offen.

(iii) Für jede abgeschlossene Teilmenge $A$ in $(Y, \mathscr{U})$ ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen.

Beweis von Prop. 3.13 (Abschluss)

„(ii) $\Rightarrow$ (i)" Sei $a \in X$. z.zg.: $f$ ist stetig in $a$.

Sei dazu $V$ eine Umgebung von $f(a)$. z.zg.: Es gibt eine Umgebung $U$ von $a$ mit $f(U) \subseteq V$.

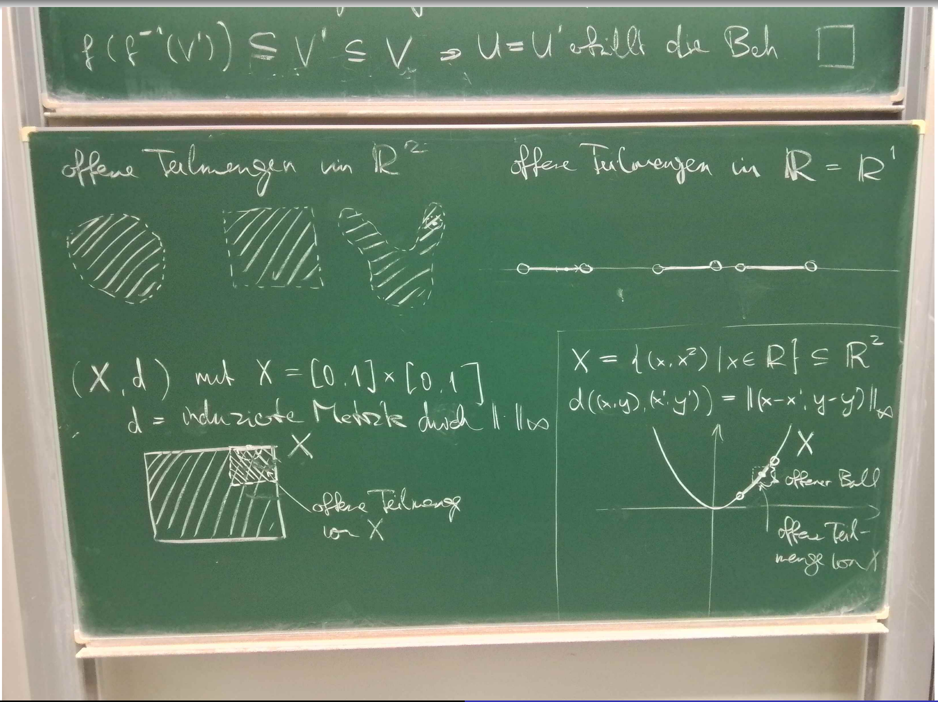
$V$ Umgebung von $f(a)$ $\Rightarrow$ Es gibt eine offene Teilmenge $V' \subseteq V$ mit $f(a) \in V'$. Vor. (ii) $\Rightarrow$ $U' = f^{-1}(V')$ ist offen. $f(a) \in V' \Rightarrow a \in f^{-1}(V') \Rightarrow a \in U'$

$\underset{\Rightarrow}{U' \text{ offen}}$ $U'$ ist Umgebung von $a$. außerdem: $f(U') = f(f^{-1}(V')) \subseteq V' \subseteq V \Rightarrow U = U'$ erfüllt die Beh. $\square$

# Definition der induzierten Topologie

**Satz (3.14)**

Sei $(X, \mathscr{T})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Es sei $\mathscr{T}_A$ die Menge aller Teilmengen der Form $U \cap A$ mit $U \in \mathscr{T}$. Dann ist $(A, \mathscr{T}_A)$ ein topologischer Raum. Man nennt $\mathscr{T}_A$ die auf $A$ induzierte Topologie.



f(f⁻¹(V')) ⊆ V' ⊆ V ⇒ U = U' erfüllt die Beh □
offene Teilmengen im ℝ²:
offene Teilmengen in ℝ = ℝ¹
(X, d) mit X = [0,1] × [0,1]
d = induzierte Metrik durch ‖·‖∞
X
offene Teilmenge von X
X = {(x, x²) | x ∈ ℝ} ⊆ ℝ²
d((x,y),(x',y')) = ‖(x−x', y−y')‖∞
X
offener Ball
offene Teilmenge von X

Überprüfe: Ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$, dann ist $\mathcal{T}_A = \{U \cap A \mid U \in \mathcal{T}\}$ eine Topologie auf $A$.

Wir müssen zeigen, dass $\mathcal{T}_A$ die drei Bed. aus Def 3.3 erfüllt.

zu (i) $\emptyset \in \mathcal{T} \Rightarrow \emptyset \cap A \in \mathcal{T}_A \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{T}_A$

$X \in \mathcal{T} \Rightarrow X \cap A \in \mathcal{T}_A \Rightarrow A \in \mathcal{T}_A$

zu (ii) Seien $U, V \in \mathcal{T}_A$. z.zg: $U \cap V \in \mathcal{T}_A$

$U \in \mathcal{T}_A \Rightarrow \exists \hat{U} \in \mathcal{T}$ mit $\hat{U} \cap A = U$

$V \in \mathcal{T}_A \Rightarrow \exists \tilde{V} \in \mathcal{T}$ mit $\tilde{V} \cap A = V$

$\Rightarrow U \cap V = (\hat{U} \cap A) \cap (\tilde{V} \cap A) = (\hat{U} \cap \tilde{V}) \cap A$

Wegen $\hat{U} \cap \tilde{V} \in \mathcal{T}$ folgt $U \cap V = (\hat{U} \cap \tilde{V}) \cap A \in \mathcal{T}_A$

zu (iii) Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie in $\mathcal{T}_A$. z.zg: $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_A$

$\forall i \in I: U_i \in \mathcal{T}_A \Rightarrow \exists \tilde{U}_i \in \mathcal{T}$ mit $\tilde{U}_i \cap A = U_i$

$$\Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} (\tilde{U}_i \cap A) = \Big(\bigcup_{i \in I} \tilde{U}_i\Big) \cap A$$

leicht zu überprüfen

Aus $\tilde{U}_i \in \mathcal{T}\ \forall i \in I$ folgt $\bigcup_{i \in I} \tilde{U}_i \in \mathcal{T}$. Daraus wiederum folgt $\bigcup_{i \in I} U_i = \Big(\bigcup_{i \in I} U_i\Big) \cap A \in \mathcal{T}_A$

# Die induzierte Topologie auf metrischen Räumen

**Satz (3.15)**

Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Sei $\mathscr{T}$ die durch $d$ definierte Topologie, und sei $\mathscr{T}_A$ die auf $A$ induzierte Topologie. Dann ist $d_A = d|_{A \times A}$ eine Metrik auf $A$, und $\mathscr{T}_A$ ist genau die durch $d_A$ definierte Topologie.

Beweis von Satz 3.15

geg: metrischer Raum $(X, d)$, $A \subseteq X$

$\mathcal{T}$ = durch $d$ induzierte Topologie auf $X$

$\mathcal{T}_A$ = Teilraumtopologie $= \{ U \cap A \mid U \in \mathcal{T} \}$

$d_A = d|_{A \times A}$ Metrik auf $A$

<u>Beh.</u>: Für jede Teilmenge $U \subseteq A$ gilt

$U \in \mathcal{T}_A \iff U$ ist offen in $(A, d_A)$

Sei also $U \subseteq A$ vorgegeben.

Sei also $U \subseteq A$ vorgegeben.

„$\Leftarrow$" Vor. $U$ ist offen in $(A, d_A)$

Für jeden Punkt $a \in A$ und jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ können wir zwei verschiedene offene Bälle betrachten, nämlich

$B_\varepsilon(a) = \{x \in X \mid d(a,x) < \varepsilon\}$ offener Ball in $(X, d)$

und $B_{A,\varepsilon}(a) = \{x \in A \mid d_A(a,x) < \varepsilon\}$ offener Ball in $(A, d_A)$

zu beachten: Es gilt immer $B_{A,\varepsilon}(a) = B_\varepsilon(a) \cap A$.

$U$ ist offen in $(A, d_A) \Rightarrow$ Für jedes $a \in U$ gibt es ein $\varepsilon_a \in \mathbb{R}^+$ mit $B_{A,\varepsilon_a}(a) \subseteq U$. Setze $\tilde{U} = \bigcup_{a \in U} B_{\varepsilon_a}(a)$. Weil $B_{\varepsilon_a}(a)$ $\forall a \in U$ eine offene Teilmenge von $X$ ist, ist auch $\tilde{U}$ eine offene Teilmenge von $X$. $\tilde{U} \cap A = \left(\bigcup_{a \in U} B_{\varepsilon_a}(a)\right) \cap A =$

$$\bigcup_{a\in U} \left(B_{\varepsilon_a}(a) \cap A\right) = \bigcup_{a\in U} B_{A,\varepsilon_a}(a)$$

Es gilt $\bigcup_{a\in U} B_{A,\varepsilon_a}(a) = U$, denn:

Ist $a \in U$, dann gilt $a \in B_{A,\varepsilon_a}(a)$, und somit liegt $a$ in der Vereinigung. Die Inklusion „$\subseteq$" folgt aus $B_{A,\varepsilon_a}(a) \subseteq U \;\forall a \in U$.

Aus $\hat{U} \cap A = U$ folgt $U \in \mathcal{T}_A$.

„$\Longrightarrow$" Vor.: $U \in \mathcal{T}_A$, zzg: $U$ ist offen im metrischen Raum $(A, d_A)$

$U \in \mathcal{T}_A \Longrightarrow \exists \tilde{U} \subseteq X$: $\tilde{U}$ offen in $(X, d)$, mit $\tilde{U} \cap A = U$. Sei nun $a \in U$ vorgeg.

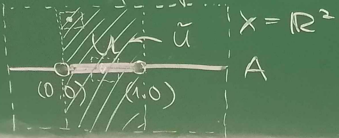
z.zg.: $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_{A,\varepsilon}(a) \subseteq U$. Da $\tilde{U}$ offen in $X$ ist, gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(a) \subseteq \tilde{U}$. $\Rightarrow B_\varepsilon(a) \cap A \subseteq \tilde{U} \cap A$

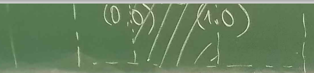
$\Rightarrow B_{A,\varepsilon}(a) \subseteq U$. $\square$

Anwendungsbeispiel zu Satz 3.15:

Betrachte $(X, d)$ geg. durch $X = \mathbb{R}^2$ und $d =$ durch $\|\ \|_\infty$ induzierte Metrik. Sei $\mathcal{T}$ die durch $d$ definierte Topologie.

Sei $A = \mathbb{R} \times \{0\}$, $d_A = d|_{A \times A}$ und $\mathcal{T}_A$ die durch $\mathcal{T}$ induzierte Topologie auf $A$ (die Teilraumtopologie). Sei $U = ]0,1[ \times \{0\}$






Überprüfe: (i) $U$ ist offen in $(A, \mathcal{J}_A)$ (d.h. $U \in \mathcal{J}_A$)

(ii) $U$ ist nicht offen in $(X, \mathcal{J})$ (d.h. $U \notin \mathcal{J}$)

zu (i) Sei $\tilde{U} = \,]0,1[\, \times \mathbb{R}$. Wie man leicht überprüft, gilt $\tilde{U} \cap A = U$. Gilt nun $\tilde{U} \in \mathcal{J}$ (d.h. ist $\tilde{U}$ offen in $\mathbb{R}^2$), dann folgt $U \in \mathcal{J}_A$ nach Def.

Nachweis der Offenheit von $\tilde{U}$:

bekannt: $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x$ ist stetig, und $]0,1[$ ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$. Außerdem gilt $\tilde{U} = \pi_1^{-1}(]0,1[)$, denn: $(x,y) \in \tilde{U} \Leftrightarrow x \in \,]0,1[\, \Leftrightarrow \pi_1(x,y) \in \,]0,1[\, \Leftrightarrow (x,y) \in \pi_1^{-1}(]0,1[)$. Als Urbild einer offenen Teilmenge unter einer stetigen Abb. ist $\tilde{U}$ in $X = \mathbb{R}^2$ offen.

zu 1(ii) Ang. $U$ ist offen in $\mathbb{R}^2$. $(\frac{1}{2}, 0) \in U$

$\Rightarrow$ Es gibt ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(\frac{1}{2}, 0) \subseteq U$

aber: Betrachte $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\varepsilon)$ $\longrightarrow$

$$d((\tfrac{1}{2}, 0), (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\varepsilon)) = \|(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\varepsilon) - (\tfrac{1}{2}, 0)\|_\infty =$$

$$\|(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\varepsilon - 0)\|_\infty = \|(0, \tfrac{1}{2}\varepsilon)\|_\infty = \tfrac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ $p \in B_\varepsilon(\frac{1}{2}, 0)$, aber $p \notin U$

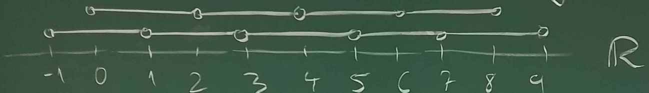
$\longrightarrow$ $B_\varepsilon(\frac{1}{2}, 0) \not\subseteq U$ ↯

# Definition der offenen Überdeckung einer Menge

**Definition (4.1)**

Sei $I$ eine Menge, $(X, \mathscr{T})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Eine offene Überdeckung von $A$ ist eine Familie $(U_i)_{i \in I}$ offener Teilmengen $U_i \subseteq X$ mit der Eigenschaft $\bigcup_{i \in I} U_i \supseteq A$.

Beispiel für eine offene Überdeckung



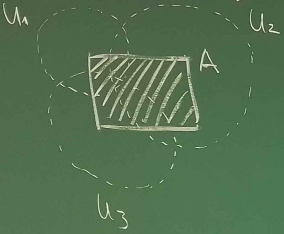

$(U_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ geg. durch $U_n = ]n-1, n+1[$ ist eine offene Überdeckung von $\mathbb{R}$: Jedes $U_n$ ist offen in $(\mathbb{R}, d)$ (mit $d$ = Standardmetrik) und $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} U_n = \mathbb{R}$.

Dagegen ist $(V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ mit $V_n = ]n, n+1[$ keine offene Überdeckung, da $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} V_n = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

$(U_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ geg. durch

offene Überdeckung von $\mathbb{R}$: Jedes $U_n$ ist offen in

offene Überdeckung einer Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^2$:




$$U_1 \cup U_2 \cup U_3 \supseteq A$$

# Definition der Kompaktheit

**Definition (4.2)**

Sei $(X, \mathscr{T})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ wird kompakt genannt, wenn zu jeder offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von $A$ eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ existiert, so dass bereits $\bigcup_{i \in J} U_i \supseteq A$ erfüllt ist.

# Kompaktheit: Beispiele und Gegenbeispiele

## Proposition (4.3)

Sei $(X, \mathscr{T})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ eine endliche Teilmenge. Dann ist $A$ kompakt.

## Proposition (4.4)

Die Menge $\mathbb{R}$ im metrischen Raum $(\mathbb{R}, d_1)$ mit der Standardmetrik $d_1(x, y) = |x - y|$ für $x, y \in \mathbb{R}$ ist nicht kompakt.

## Proposition (4.5)

Sei $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in einem metrischen Raum $(X, d)$ mit Grenzwert $a = \lim_n x^{(n)}$. Dann ist die Menge

$$A \quad = \quad \{x^{(n)} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\} \quad \text{kompakt.}$$

Beweis von Prop. 4.3

geg.: metrischer Raum $(X, d)$, $A \subseteq X$ endliche Teilmenge: $A = \{a_1, \dots, a_r\}$ $(r \in \mathbb{N}_0)$

Beh: $A$ ist kompakt.

Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $A$.

z.zg.: Es gibt eine endl. Teilmenge $J \subseteq I$ mit $\bigcup_{i \in J} U_i \supseteq A$.

Für $1 \leq k \leq r$ gilt: $a_k \in A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow$ $\exists\, i_k \in I$ mit $a \in U_{i_k}$. Setze $J = \{i_1, \dots, i_r\}$

geg.

Dann gilt $a_k \in U_{i_k} \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i$ für $1 \leq k \leq r$,

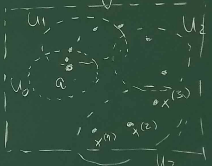
also $A = \{a_1, \ldots, a_r\} \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i$ .

$\square$

Beweis von Prop. 4.5:

$(X, d)$ metrischer Raum, $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $X$ mit $a = \lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)}$.

<u>Beh.</u>: $A = \{x^{(n)} \mid n\in\mathbb{N}\} \cup \{a\}$ ist kompakte Teilmenge von $X$.




Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von $A$.

$a \in A \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} U_i \Rightarrow$ Es gibt ein $i_0 \in I$ mit $a\in U_{i_0}$. $U_{i_0}\subseteq X$ ist offen $\Rightarrow \exists \varepsilon\in\mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(a)\subseteq U_{i_0}$. $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = a \Rightarrow \exists N\in\mathbb{N}: \forall n\geq N:$ $d(a,x^{(n)})<\varepsilon \Rightarrow \forall n\geq N: x^{(n)}\in B_\varepsilon(a) \Rightarrow \forall n \geq N: x^{(n)}\in U_{i_0}$.

Für $1\leq n< N$ gilt jeweils $x^{(n)}\in A\subseteq \bigcup\limits_{i\in I} U_i \Rightarrow \exists i_n\in I$

mit $x^{(n)} \in U_{i_n}$. Setze $J = \{i_0, i_1, \dots, i_{N-1}\}$.

<u>Beh.</u>: $A \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i$  Sei $x \in A$.

1. Fall: $x = a$ oder $x = x^{(n)}$ für ein $n \geq N$.
Dann gilt $x \in U_{i_0}$.

2. Fall: $x = x^{(n)}$ für ein $n < N$ Dann gilt $x \in U_{i_n}$.