Definition der Stetigkeit

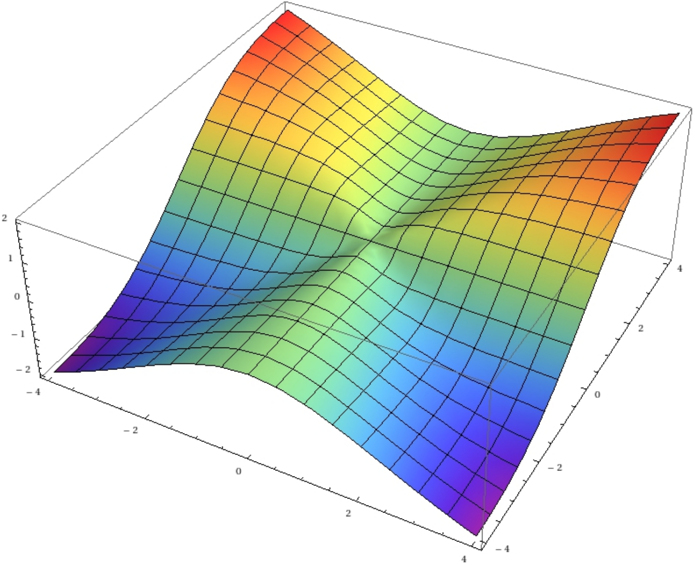
Definition (2.1)

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ wird stetig in einem Punkt $a \in X$ bezüglich der Metriken d_X und d_Y genannt, wenn für jede Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ die Implikation

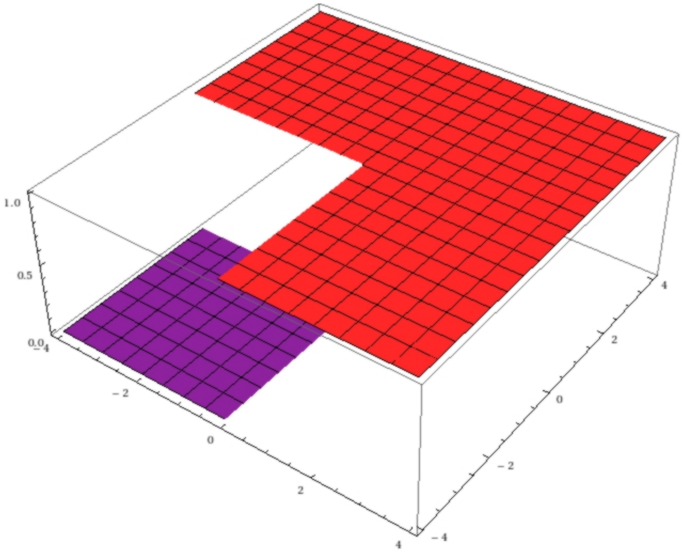
$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = a \;\text{ in }\; (X, d_X) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x^{(n)}) = f(a) \;\text{ in }\; (Y, d_Y)$$

gilt. Wir bezeichnen f insgesamt als stetig, wenn f in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.

Funktionsgraph einer stetigen Funktion



Funktionsgraph einer unstetigen Funktion



Das ε-δ-Kriterium

Satz (2.6)

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann stetig im Punkt a bezüglich d_X und d_Y, wenn für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass die Implikation

$$d_X(a, x) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon$$

für alle $x \in X$ erfüllt ist.

Beweis von Satz 2.6

geg. metrische Räume (X, d_X), (Y, d_Y)

$\phi: X \to Y$ Abbildung, $a \in X$

z.zg. ϕ ist stetig in a $\iff$ $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists \delta \in \mathbb{R}^+ :$
$\forall x \in X : d_X(a,x) < \delta \Rightarrow d_Y(\phi(a), \phi(x)) < \varepsilon$

„$\Leftarrow$" Sei $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X, so dass $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = a$
in (X, d_X) gilt. z.zg: $\lim\limits_{n\to\infty} \phi(x^{(n)}) = \phi(a)$ in (Y, d_Y)

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. z.zg.: $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : d_Y(\phi(a), \phi(x^{(n)})) < \varepsilon$

Vor $\Rightarrow$ $\exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \forall x \in X : d_X(a,x) < \delta \Rightarrow d_Y(\phi(a), \phi(x)) < \varepsilon$

$\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = a \implies \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : d_X(a, x^{(n)}) < \delta$

$\overset{\text{s.o.}}{\implies} \forall n \geq N : d_Y(\phi(a), \phi(x^{(n)})) < \varepsilon$

„$\Rightarrow$" Ang. ϕ ist stetig in a, aber die Aussage rechts gilt nicht. Dann gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, so dass für jedes $\delta \in \mathbb{R}^+$ die Aussage $\forall x \in X : d_X(a, x) < \delta \Rightarrow d_Y(\phi(a), \phi(x)) < \varepsilon$ falsch ist. Insb. ist sie für $\delta = \frac{1}{n}$ falsch für jedes $n \in \mathbb{N}$. Es gibt also jeweils ein $x^{(n)} \in X$, so dass $d_X(a, x^{(n)}) < \frac{1}{n} \Rightarrow d_Y(\phi(a), \phi(x^{(n)})) < \varepsilon$ nicht erfüllt ist. Für dieses $x^{(n)}$ gilt also jeweils $d_X(a, x^{(n)}) < \frac{1}{n}$, aber nicht $d_Y(\phi(a), \phi(x^{(n)})) < \varepsilon$, sondern $d_Y(\phi(a), \phi(x^{(n)})) \geq \varepsilon$.

Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = a$ in (X, d_X), denn: Ist $\gamma \in \mathbb{R}^+$ vorgeg.

dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < \delta$, und für alle $n \geq N$ folgt $d_X(a, x^{(n)}) < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \delta$.

Weil ϕ laut Annahme stetig ist, folgt

$\lim\limits_{n \to \infty} \phi(x^{(n)}) = \phi(a) \Rightarrow \exists M \in \mathbb{N} : \forall n \geq M:$

$d_Y(\phi(a), \phi(x^{(n)})) < \varepsilon \ \forall n \geq M$, insb.

$d_Y(\phi(a), \phi(x^{(M)})) < \varepsilon$ ↯ denn s.o. $\Rightarrow$

$d_Y(\phi(a), \phi(x^{(n)})) \geq \varepsilon \ \forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

Stetigkeit der Projektionsabbildungen

Proposition (2.5)

Die Abbildung $\pi_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $(x_1, ..., x_m) \mapsto x_i$ ist stetig, für $1 \leq i \leq m$.

Komponentenweise Überprüfung der Stetigkeit

Proposition (2.7)

Sei (X, d_X) ein metrischer Raum, $r \in \mathbb{N}$ und $f : X \to \mathbb{R}^d$ eine Funktion mit den Komponenten $f_1, ..., f_d : X \to \mathbb{R}$, so dass also $f(x) = (f_1(x), ..., f_d(x))$ für alle $x \in X$ gilt. Genau dann ist f in einem Punkt $a \in X$ stetig, wenn die Funktionen $f_1, ..., f_d$ alle in a stetig sind.

Beweis von Proposition 2.7:

geg: metrischer Raum (X, d_X), $f: X \to \mathbb{R}^d$ Abb., wobei $d \in \mathbb{N}$

$f_1, \ldots, f_d : X \to \mathbb{R}^d$ Komponenten von f, $a \in X$

<u>Beh:</u> f stetig in a $\Longleftrightarrow$ f_j stetig in a, für $1 \leq j \leq d$

„$\Longrightarrow$" Es gilt $f_j = \pi_j \circ f$ für $1 \leq j \leq d$, wobei $\pi_j : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ jeweils die Proj.-abb. bezeichnet. f ist stetig n. V., π_j ist stetig nach Prop. 2.5 $\Rightarrow$ f_j ist als Komposition ebenfalls stetig.

„$\Longleftarrow$" z.zg: f ist stetig in a

Als Metrik auf $\mathbb{R}^d$ verwenden wir die Metrik der induzierd durch $\|\cdot\|_\infty$. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgeg. z.zg. $\exists\, \delta \in \mathbb{R}^+$, so

dass gilt: $\forall x \in X: d_X(a,x) < \delta \overset{(*)}{\Longrightarrow} d_\infty(f(a), f(x)) < \varepsilon$

Da $f_1, \dots, f_d$ in a stetig sind, finden wir für jedes $j \in \{1, \dots, d\}$

ein $\delta_j \in \mathbb{R}^+$ mit $\forall x \in X: d_X(a,x) < \delta_j \Rightarrow |f_j(x) - f_j(a)| < \varepsilon$

Sei $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_d\}$. <u>Beh</u>: Für dieses δ ist $(*)$ erfüllt.

Sei $x \in X$ mit $d_X(a,x) < \delta$. $\Longrightarrow \forall j: d_X(a,x) < \delta_j$

$\Rightarrow \forall j: d_\infty(f_j(a), f(x)) < \varepsilon \Rightarrow d_\infty(f(a), f(x)) = \|f(x) - f(a)\|_\infty$

$= \max\{|f_j(x) - f_j(a)| \mid 1 \le j \le d\} < \varepsilon$ $\square$

Stetigkeit der Verknüpfungsabbildungen

Proposition (2.8)

Die folgenden Abbildungen $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$, $\mu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy$ und $\delta : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\times \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \frac{x}{y}$ sind stetig.

für

$< \gamma$.

$: \forall n \geq M:$

gilt.

$0. \Rightarrow$

$\square$

Beweis von Proposition 2.8.

geg.: $\alpha: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x + y$

$(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

z.zg.: α ist stetig in (x_0, y_0)

Verwende auf $\mathbb{R}^2$ die Metrik d_∞ induziert
durch $\|\cdot\|_\infty$. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. z.zg. $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$:
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2: d_\infty((x_0, y_0), (x, y)) < \delta \Rightarrow$
$|\alpha(x, y) - \alpha(x_0, y_0)| < \varepsilon$

Beh.: Die Aussage gilt für $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$.

Sei $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $d_\infty((x_0, y_0), (x, y)) < \frac{1}{2}\varepsilon$

$\Rightarrow \|(x,y)-(x_0,y_0)\|_\infty < \frac{1}{2}\varepsilon \Rightarrow \|(x-x_0, y-y_0)\|_\infty$
$< \frac{1}{2}\varepsilon \Rightarrow \max\{|x-x_0|, |y-y_0|\} < \frac{1}{2}\varepsilon \Rightarrow$
$|x-x_0|, |y-y_0| < \frac{1}{2}\varepsilon \Rightarrow |\alpha(x,y) - \alpha(x_0,y_0)|$
$= |(x+y)-(x_0,y_0)| = |(x-x_0)+(y-y_0)| \leq$
$|x-x_0| + |y-y_0| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$. $\square$

Stetigkeit zusammengesetzter Abbildungen

Folgerung (2.9)

Sei (X, d_X) ein metrischer Raum, und seien $f, g : X \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann sind auch die Funktionen

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) \qquad \text{und} \qquad (fg)(x) = f(x)g(x) \qquad \text{stetig.}$$

Gilt zusätzlich $g(x) \neq 0$ für alle $x \in X$, dann ist auch $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$ stetig.

Proposition (2.10)

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \dfrac{x^3y + 5xy}{x^2 + y^4 + 1}$ ist stetig.

Stetigkeit der Normabbildung

Lemma (2.11)

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum. Dann gilt

$$\big|\|v\| - \|w\|\big| \quad \leq \quad \|v - w\| \qquad \text{für alle} \quad v, w \in V.$$

Folgerung (2.12)

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum. Dann ist $V \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$ eine stetige Funktion.

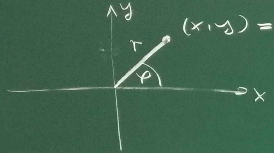
Definition der Polarkoordinaten

Satz (2.13)

(i) Die Abbildung $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\varphi \mapsto (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ ist stetig, und für jedes halboffene Intervall I der Länge 2π ist die eingeschränkte Abbildung $\varphi|_I$ eine stetige Bijektion auf ihre Bildmenge.

(ii) Die Abbildung $\rho_{\text{pol}} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $(r, \varphi) \mapsto (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$ wird Polarkoordinaten-Abbildung genannt. Für jedes Intervall I wie unter (i) ist auch $\rho_{\text{pol}}|_{\mathbb{R}^+ \times I}$ eine stetige Bijektion auf ihre Bildmenge.

Darstellung der Polarkoordinaten



$(x,y) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$

Es sind (r,φ) die Polarkoordinaten von (x,y).

Physikersprech: Ist $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ eine Fkt., dann ist $f_{pol} = f \circ p_{pol}$ „dieselbe" Funktion „in Polarkoordinaten".

Ist f symmetrisch bzgl. $(0,0)$, dann hat f_{pol} eine einfachere Form als f. Beispiel: $f(x,y) = (x^2+y^2)^2$

$\Rightarrow f_{pol}(r,\varphi) = (f \circ p_{pol})(r,\varphi) = f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) = r^4$

Beweis von Satz 2.13, nur Teil (i)

Da cos und sin stetige Fkt. sind, ist $\phi(\varphi) = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ stetig nach Proposition 2.7. Sei nun $I \subseteq \mathbb{R}$ ein halb-offenes Intervall der Länge 2π. Beh.: $\phi|_I$ ist injektiv.

Vor. $\Rightarrow \exists\, \varphi_0 \in \mathbb{R}$ mit $I = [\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi[$ oder $I =]\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi]$

Betrachte nur den ersten Fall. geg. $\varphi_1, \varphi_2 \in I$ mit $\phi(\varphi_1) = \phi(\varphi_2)$, also $\cos(\varphi_1) = \cos(\varphi_2)$ und $\sin(\varphi_1) = \sin(\varphi_2)$

z.zg. $\varphi_1 = \varphi_2$. Wähle $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ so, dass $\varphi_1' = \varphi_1 - 2\pi n_1$ und $\varphi_2' = \varphi_2 - 2\pi n_2$ beide in $[-\pi, \pi[$ liegen

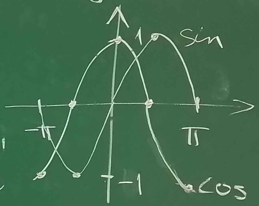
Dann gilt auch $\cos(\varphi_1') = \cos(\varphi_2')$ und $\sin(\varphi_1') = \sin(\varphi_2')$

Da φ_1 und φ_2 im selben Intervall der Länge 2π liegen, muss $n_1 = n_2$ gelten $\Rightarrow$

Es genügt, $\varphi_1' = \varphi_2'$ zu zeigen, daraus folgt $\varphi_1 = \varphi_2$

$\cos(\varphi_1') = \cos(\varphi_2') \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi_1' = \varphi_2'$ oder $\varphi_1' = -\varphi_2'$



Ang. $\varphi_1' = -\varphi_2'$, o.B.d.A. $\varphi_1' < 0$, $\varphi_2' > 0$

$\Rightarrow \sin(\varphi_1') < 0$, $\sin(\varphi_2') > 0$

↯ zu $\sin(\varphi_1') = \sin(\varphi_2')$ also:

$\varphi_1' = \varphi_2'$

$\square$

Definition der Zylinder- und Kugelkoordinaten

Satz (2.14)

Sei I ein halboffenes Intervall der Länge 2π.

(i) Die Abbildung $\rho_{\text{zyl}} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $(r, \varphi, h) \mapsto (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), h)$ ist stetig, und die Einschränkung $\rho_{\text{zyl}}|_{M_I}$ auf $M_I = \mathbb{R}^+ \times I \times \mathbb{R}$ ist eine stetige Bijektion auf ihre Bildmenge.

(ii) Die Abbildung $\rho_{\text{kug}} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$(r, \vartheta, \varphi) \quad \mapsto \quad (r\sin(\vartheta)\cos(\varphi), r\sin(\vartheta)\sin(\varphi), r\cos(\vartheta))$$

ist ebenfalls stetig, und die Einschränkung $\rho_{\text{kug}}|_{N_I}$ auf $N_I = \mathbb{R}^+ \times]0, \pi[\times I$ ist eine stetige Bijektion auf ihre Bildmenge.

Die Abbildung ρ_{zyl} wird Zylinderkoordinaten-Abbildung,die Abbildung ρ_{kug} Kugelkoordinaten-Abbildung genannt.

Kriterium für die Stetigkeit linearer Abbildungen

Satz (2.15)

Eine lineare Abbildung $\phi : V \to W$ zwischen normierten $\mathbb{R}$-Vektorräumen ist genau dann stetig, wenn eine Konstante $\gamma \in \mathbb{R}^+$ mit $\|\phi(v)\| \le \gamma \|v\|$ für alle $v \in V$ existiert.

Beweis von Satz 2.15:

geg: normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume $(V, \|\cdot\|)$, $(W, \|\cdot\|)$

$\phi : V \to W$ lineare Abb.

Beh: ϕ ist stetig $\Leftrightarrow \exists \gamma \in \mathbb{R}^+ : \forall v \in V : \|\phi(v)\| \leq \gamma v$

„$\Leftarrow$" geg. $a \in V$ z.zg.: ϕ ist stetig in a

Verwende das ε-δ-Kriterium. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. z.zg.:

$\exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \forall x \in V : \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|\phi(x) - \phi(a)\| < \varepsilon$

Setze $\delta := \frac{\varepsilon}{\gamma}$. Sei $x \in X$ mit $\|x - a\| < \delta \Rightarrow$

$$\|\phi(x) - \phi(a)\| = \|\phi(x - a)\| \leq \gamma \|x - a\| < \gamma \delta = \gamma \cdot \frac{\varepsilon}{\gamma} = \varepsilon$$

$\exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \forall x \in V : \|x-a\| < \delta \Rightarrow \|\phi(x)-\phi(a)\| < \varepsilon$

Setze $\delta := \frac{\varepsilon}{\gamma}$ Sei $x \in X$ mit $\|x-a\| < \delta \Rightarrow$

„$\Rightarrow$" ϕ ist stetig $\Rightarrow$ ϕ ist stetig in 0 $\Rightarrow$ Für $\varepsilon = 1$ gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}^+$, so dass aus $\|x-0\| < \delta$ jeweils $\|\phi(x)-\phi(0)\| < 1$ folgt, also: $\forall x \in V : \|x\| < \delta \overset{(*)}{\Rightarrow} \|\phi(x)\| \leq 1$

Sei nun $x \in V$ mit $x \neq 0_V$. Setze $y := \frac{\frac{1}{2}\delta}{\|x\|} \cdot x$

$\Rightarrow \|y\| = \frac{\frac{1}{2}\delta}{\|x\|} \cdot \|x\| = \frac{1}{2}\delta < \delta \overset{(*)}{\Rightarrow} \|\phi(y)\| \leq 1 \Rightarrow$

$\|\phi\left(\frac{\frac{1}{2}\delta}{\|x\|} \cdot x\right)\| \leq 1 \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}\delta}{\|x\|} \|\phi(x)\| \leq 1 \Rightarrow$

$\|\phi(x)\| \leq 2\delta^{-1} \cdot \|x\|$ Setzen wir $\gamma = 2\delta^{-1}$, dann gilt also $\|\phi(x)\| \leq \gamma\|x\|$ $\forall x \in V \setminus \{0_V\}$, und natürlich auch für den Vektor $x = 0_V$. $\square$

Beispiel für ein unstetige lineare Abbildung

Proposition (2.16)

Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynomfunktionen auf dem Intervall $[0,1]$, ausgestattet mit der Supremumsnorm

$$\|f\|_\infty \quad = \quad \sup\{\ |f(x)|\ |\ x \in [0,1]\}.$$

Dann ist die Ableitungsabbildung $\phi_1 : V \to V$, $f \mapsto f'$ unstetig.

Ang.: $\phi_1 : V \to V,\ f \mapsto f'$ ist stetig.

Satz 2.15 $\Rightarrow \exists \gamma \in \mathbb{R}^+ : \forall f \in V : \|f'\|_\infty \leq \gamma \|f\|$

$\Rightarrow \|f_n'\|_\infty \leq \gamma \|f_n\|_\infty \ \forall n \in \mathbb{N}$, wobei $f_n(x) = x^n$

<u>aber:</u> $\|f_n\|_\infty = \sup\{|x^n| \mid x \in [0,1]\} = 1$

$f_n'(x) = n \cdot x^{n-1} \Rightarrow \|f_n'\| = n$

einsetzen $\Rightarrow n \leq \gamma \cdot 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ $\lightning$