

# Der Banachsche Fixpunktsatz

Eine Abbildung  $\phi : X \rightarrow X$  wird **Kontraktion** genannt, wenn eine Konstante  $\gamma \in ]0, 1[$  existiert, so dass  $d(\phi(x), \phi(y)) \leq \gamma d(x, y)$  für alle  $x, y \in X$  erfüllt ist.

## Satz (1.20)

Sei  $(X, d)$  ein vollständiger metrischer Raum. Dann besitzt jede Kontraktion  $\phi : X \rightarrow X$  genau einen Fixpunkt. Es gibt also ein eindeutig bestimmtes  $z \in X$  mit  $\phi(z) = z$ .

## Proposition (1.21)

Für den Abstand der Folgenglieder zum Fixpunkt  $z$  hat man die „a priori“-Abschätzung  $d(x^{(n)}, z) \leq \frac{\gamma^n}{1-\gamma} d(x^{(0)}, x^{(1)})$ .

Anwendungsbeispiel: Berechnung von  $\sqrt{2}$

Betrachte die Funktion  $\phi: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$ .

Schranke  $\phi$  auf das Intervall  $[1, \frac{3}{2}]$  ein.

$\phi'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} \Rightarrow \phi'$  ist auf  $[1, \frac{3}{2}]$  monoton wachsend

$\Rightarrow \forall x \in ]1, \frac{3}{2}[$  gilt  $\phi'(x) \leq \phi'(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2} - (\frac{2}{3})^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9}$

$= \frac{9}{18} - \frac{8}{18} = \frac{1}{18} \Rightarrow \phi'(x) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{18}] \Rightarrow |\phi'(x)| \leq \frac{1}{2}$

Mittelwertsatz  $\Rightarrow$  Für alle  $x_0, x_1$  mit  $1 \leq x_0 < x_1 \leq \frac{3}{2}$

gibt es ein  $x' \in ]x_0, x_1[ \subseteq [1, \frac{3}{2}]$  mit  $\frac{\phi(x_1) - \phi(x_0)}{x_1 - x_0} = \phi'(x')$

$$\Rightarrow \phi(x_1) - \phi(x_0) = \phi'(x)(x_1 - x_0) \Rightarrow |\phi(x_1) - \phi(x_0)| = |\phi'(x)| |x_1 - x_0|$$

$$\leq \frac{1}{2} (x_1 - x_0) \quad \text{Sei } \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \text{ mit } \varepsilon \leq \frac{3}{2} - \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow [\sqrt{2} - \varepsilon, \sqrt{2} + \varepsilon] =: X \subseteq [1, \frac{3}{2}]$$

Beh.  $\phi|_X$  ist eine Kontraktion auf  $X$

$$\text{Es gilt } \phi(X) \subseteq X, \text{ denn } x \in [\sqrt{2} - \varepsilon, \sqrt{2} + \varepsilon] \Rightarrow |x - \sqrt{2}| \leq \varepsilon$$

$$\stackrel{\text{s.o.}}{\Rightarrow} |\phi(x) - \phi(\sqrt{2})| \leq \frac{1}{2} \varepsilon < \varepsilon \quad \phi(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \Rightarrow |\phi(x) - \sqrt{2}| \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \phi(x) \in ]\sqrt{2} - \varepsilon, \sqrt{2} + \varepsilon[ = X$$

Da außerdem  $|\phi(x) - \phi(y)| \leq \frac{1}{2} |x - y| \quad \forall x, y \in X$  gilt, ist  $\phi$  eine Kontraktion. Banachscher Fixpunktsatz  $\Rightarrow$  Die Folge

$(\phi^n(1))_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gegen  $\sqrt{2}$ .

## Definition (2.1)

Seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume. Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  wird **stetig** in einem Punkt  $a \in X$  bezüglich der Metriken  $d_X$  und  $d_Y$  genannt, wenn für jede Folge  $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  die Implikation

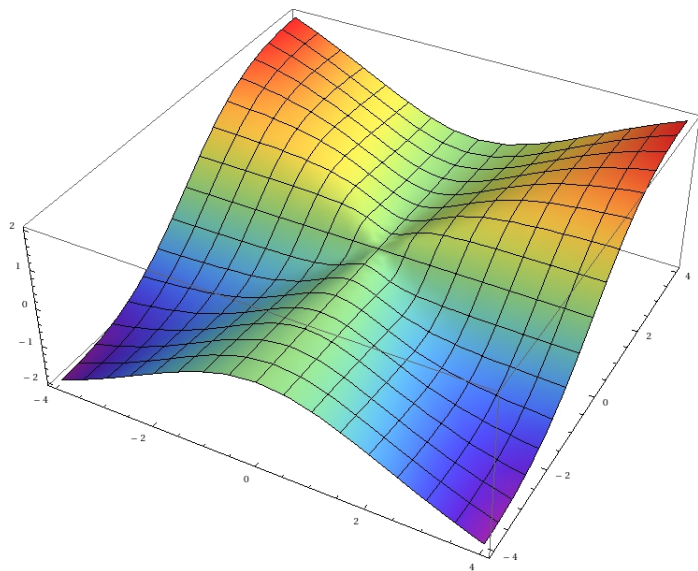
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = a \text{ in } (X, d_X) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x^{(n)}) = f(a) \text{ in } (Y, d_Y)$$

gilt. Wir bezeichnen  $f$  insgesamt als stetig, wenn  $f$  in jedem Punkt  $x \in X$  stetig ist.

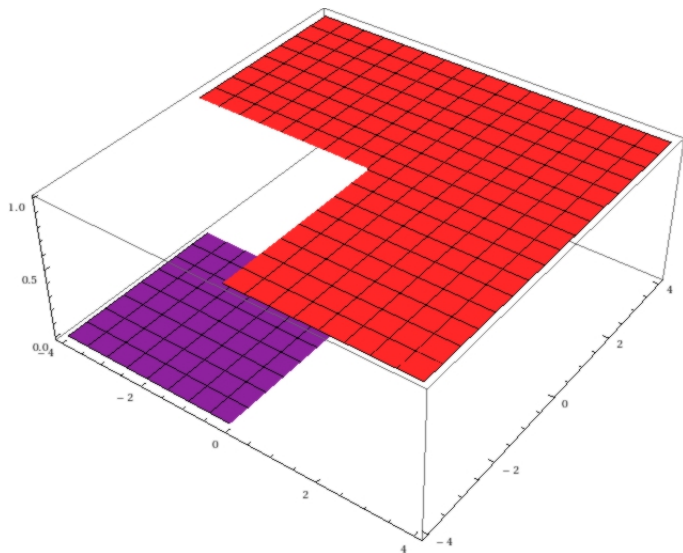
# Beziehung zum Stetigkeitsbegriff einer Variablen

- Eine Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem metrischen Raum  $(X, d_X)$  bezeichnen wir als **stetig**, wenn sie bezüglich  $d_X$  und der von der 1-Norm induzierten Metrik  $d_1(a, b) = |a - b|$  auf  $\mathbb{R}$  stetig ist.
- Ist auch  $X$  eine Teilmenge von  $\mathbb{R}$  und  $d_X = d_1|_{X \times X}$ , dann stimmt der Stetigkeitsbegriff mit dem Begriff aus der Analysis einer Variablen überein.
- Sind  $X$  und  $Y$  Teilmengen von endlich-dimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorräumen, dann bezeichnen wir eine Funktion  $f : X \rightarrow Y$  als **stetig** in einem Punkt  $a \in X$ , wenn sie bezüglich der induzierten Metriken von beliebig gewählten Normen auf  $X$  und  $Y$  stetig ist.

# Funktionsgraph einer stetigen Funktion



# Funktionsgraph einer unstetigen Funktion



Bsp. Betrachte die Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  geg durch

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \text{ und } y < 0 \\ 1 & \text{falls } x \geq 0 \text{ oder } y \geq 0 \end{cases}$$

Beh. i) Die Funktion  $f$  ist im Punkt  $(-1, 0)$  unstetig

ii) Sie ist im Punkt  $(-1, -1)$  stetig

zu ii) Betrachte die Folge  $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  geg durch

$$(x_n, y_n) = (-1, -\frac{1}{n}). \quad \text{Es gilt } \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (-1, 0).$$

Wäre  $f$  in  $(-1, 0)$  stetig, dann müsste  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = f(-1, 0)$  gelten, also  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = 1$

aber:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(-1, -\frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0 \neq 1$

Also ist  $f$  in  $(-1, 0)$  nicht stetig.

zu iii) Sei  $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (-1, -1)$ .

z.zg: Es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = f(-1, -1)$ , also  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = 0$ .

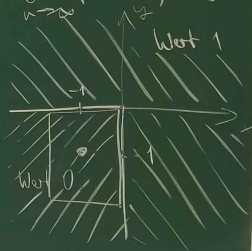
Betrachte auf  $\mathbb{R}^2$  die durch  $\|\cdot\|_\infty$  induzierte

Metrik. Für jedes  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$  sei  $B_\varepsilon(-1, -1)$  der offene Ball vom Radius  $\varepsilon$  um  $(-1, -1)$ .

$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (-1, -1) \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \cdot \forall n \geq N:$

$$(x_n, y_n) \in B_1(-1, -1) \Rightarrow \|(x_n, y_n) - (-1, -1)\|_\infty < 1$$

$$\forall n \geq N \Rightarrow \|(x_{n+1}, y_{n+1})\|_\infty < 1$$



$$\Rightarrow \max \{ |x_{n+1}|, |y_{n+1}| \} < 1 \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow |x_n - (-1)| < 1 \text{ und } |y_n - (-1)| < 1 \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow -2 < x_n < 0 \text{ und } -2 < y_n < 0 \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow f(x_n, y_n) = 0 \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = 0$$

□

## Proposition (2.2)

Seien  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  und  $(Z, d_Z)$  metrische Räume.

- (i) Jede konstante Funktion auf  $X$  ist stetig.
- (ii) Seien  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  Abbildungen und  $a \in X$  ein Punkt, so dass  $f$  in  $a$  und  $g$  in  $f(a)$  stetig ist. Dann ist auch  $g \circ f$  in  $a$  stetig.

Beweis von Prop. 2.2.

geg. metrische Räume  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$ ,  $(Z, d_Z)$

$f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow Z$  Abbildungen

zuli) Vor:  $f$  ist konstant, d.h.  $\exists y \in Y: \forall x \in X: f(x) = y$

Sei  $a \in X$ . z.zg:  $f$  ist stetig in  $a$ . Sei  $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = a$  in  $(X, d_X)$ . z.zg:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x^{(n)}) = f(a)$

Es gilt:  $\forall n \in \mathbb{N}: f(x^{(n)}) = y$ , d.h. die Folge der Funktionswerte ist konstant. bereits bekannt: Eine Folge mit konstantem Wert  $y$  konvergiert gegen  $y \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x^{(n)}) = y = f(a)$

Werte ist konstant bereits bekannt: Eine Folge mit konstantem Wert  $y$  konvergiert gegen  $y \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x^{(n)}) = y = f(a)$

z.ii) Vor:  $a \in X$ ,  $f$  stetig in  $a$  ( $*_1$ ),  $g$  stetig in  $f(a)$  ( $*_2$ )

Sei  $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $X$ , so dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = a$  in  $(X, d_X)$

z.zg.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (g \circ f)(x^{(n)}) = (g \circ f)(a)$  in  $(Z, d_Z)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = a \text{ in } (X, d_X) \xRightarrow{(*_1)} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x^{(n)}) = f(a) \xRightarrow{(*_2)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(f(x^{(n)})) = g(f(a)) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (g \circ f)(x^{(n)}) = (g \circ f)(a)$$



# Definition der Funktionsgrenzwerte

Sei  $(X, d_X)$  ein metrischer Raum und  $D \subseteq X$ . Wir bezeichnen einen Punkt  $a \in X$  als **Berührungspunkt** von  $D$ , wenn  $a \notin D$  gilt und eine Folge  $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  in  $D$  mit  $\lim_n x^{(n)} = a$  existiert.

## Definition (2.3)

Seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume,  $f : D \rightarrow Y$  eine Abbildung auf einer Teilmenge  $D \subseteq X$  und  $a$  ein Berührungspunkt von  $D$ . Wir bezeichnen  $b \in Y$  als **Grenzwert** von  $f$  für  $x \rightarrow a$ , wenn für jede Folge  $(x^{(n)})$  in  $D$  mit  $\lim_n x^{(n)} = a$  jeweils

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x^{(n)}) = b \quad \text{in } (Y, d_Y) \text{ erfüllt ist.}$$

# Definition der Homöomorphismen

## Definition (2.4)

Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen metrischen Räumen  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  wird **Homöomorphismus** genannt, wenn sie bijektiv, stetig und die Umkehrabbildung  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  ebenfalls stetig ist. Existiert ein solcher Homöomorphismus, dann bezeichnet man  $(Y, d_Y)$  als **homöomorph** zu  $(X, d_X)$ .

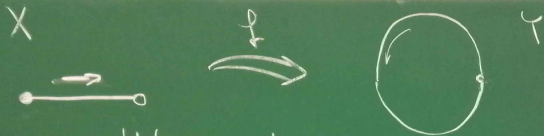
Hinweis: Für Abbildungen zwischen metrischen Räumen ist es im Allgemeinen nicht richtig, dass jede Umkehrfunktion eine bijektive stetigen Abbildung wieder stetig. Mit anderen Worten, nicht jede bijektive stetige Abb. ist ein Homöomorphismus.

Bsp.:  $X = [0, 2\pi[ \subseteq \mathbb{R}$  mit  $d_X(a, b) = |a - b|$

$Y = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \}$  (Einheitskreis)  
mit  $d_Y$  induziert durch eine beliebige Norm.

Betrachte  $f: X \rightarrow Y, t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ .

Betrachte  $f: X \rightarrow Y, t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ .



Herden zeigen: Weil  $\cos$  und  $\sin$  stetige Funktionen sind, ist auch  $f$  stetig. Ebenso wird noch gezeigt, dass  $f$  bijektiv.

$\Rightarrow$  Es existiert somit eine Umkehrabb.  $f^{-1}: Y \rightarrow X$ .

aber:  $f^{-1}$  ist im Punkt  $(1, 0)$  unstetig. denn: Betrachte in  $Y$  die Folge  $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$  geg. durch  $x_n = \cos(2\pi - \frac{1}{n})$ ,  $y_n = \sin(2\pi - \frac{1}{n})$ .

$$\begin{aligned} \text{Dann gilt } \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos(2\pi - \frac{1}{n}), \sin(2\pi - \frac{1}{n})) = \begin{matrix} \uparrow \cos, \sin \text{ stetig} \\ (\cos(2\pi), \sin(2\pi)) = (1, 0) \end{matrix} \end{aligned}$$

<  $\varepsilon$  Ang.  $f^{-1}$  ist stetig in  $(1, 0)$ . Dann folgt  
$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{-1}(x_n, y_n) = f^{-1}(1, 0) = f^{-1}(f(0)) = 0$$

□

$$\begin{aligned} \text{aber: } \lim_{n \rightarrow \infty} f^{-1}(x_n, y_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f^{-1}\left(\cos\left(2\pi - \frac{1}{n}\right), \sin\left(2\pi - \frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f^{-1}\left(f\left(2\pi - \frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2\pi - \frac{1}{n}\right) = 2\pi \end{aligned}$$

(Dies ist ein Grenzwert in  $\mathbb{R}$ . In  $(X, dx)$  ist  
die Folge  $(f^{-1}(x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$  nicht konvergent.)  
also:  $f^{-1}$  ist unstetig in  $(1, 0)$ .

## Proposition (2.5)

Die Abbildung  $\pi_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x_1, \dots, x_m) \mapsto x_i$  ist stetig, für  $1 \leq i \leq m$ .

Beweis von Prop. 2.5:

geg:  $\pi_i: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, x = (x_1, \dots, x_m) \mapsto x_i$

Sei  $a = (a_1, \dots, a_m)$ . z.zg:  $\pi_i$  ist stetig in  $a$ .

Betrachte auf  $\mathbb{R}^m$  die Metrik induziert durch  $\|\cdot\|_\infty$ .

Sei  $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{R}^m$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = a$ .

z.zg:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_i(x^{(n)}) = \pi_i(a)$ , dafür z.zg:

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |\pi_i(x^{(n)}) - \pi_i(a)| < \varepsilon$

Sei also  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = a \implies$

$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : x^{(n)} \in B_\varepsilon(a)$

$\implies \forall n \geq N : \|x^{(n)} - a\|_\infty < \varepsilon$

$$\Rightarrow \forall n \geq N : \max \{ |x_k^{(n)} - a_k| \mid 1 \leq k \leq m \} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall n \geq N : |x^{(n)} - a| < \varepsilon$$

$$\rightarrow \forall n \geq N : |\pi_i(x^{(n)}) - \pi_i(a)| < \varepsilon \quad \square$$

lim  
 $n \rightarrow \infty$

aber

=  $\lim_{n \rightarrow \infty}$

(Dies

die F

also,