Definition der Äquivalenz von Normen

Definition (1.5)

Zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V werden als äquivalent bezeichnet, wenn reelle Konstanten $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ mit der Eigenschaft

$$\gamma_1 \|x\| \quad \leq \quad \|x\|' \quad \leq \quad \gamma_2 \|x\| \qquad \text{für alle } x \in V \text{ existieren.}$$

Durch die Äquivalenz ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Normen auf V definiert.

Äquivalenz von Normen im Endlichdimensionalen

Satz (1.7)

Auf jedem endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V sind je zwei Normen äquivalent.

Konvergenz in metrischen Räumen

Eine Folge in einem metrischen Raum (X, d) ist eine Abbildung $\phi : \mathbb{N} \to X$. Wir verwenden die Schreibweise $x^{(n)} = \phi(n)$ für das n-te Folgenglied, und $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ als Notation für die Folge.

Definition (1.10)

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X und $a \in X$ ein Punkt. Man sagt, die Folge konvergiert in (X, d) gegen a und schreibt

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = a \quad ,$$

wenn für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $x \in B_\varepsilon(a)$ für alle $n \geq N$ gilt. Der Punkt a wird in diesem Fall ein Grenzwert der Folge genannt. Eine Folge, die gegen keinen Punkt von X konvergiert, bezeichnet man als divergent.

Beispiele für Konvergenz in metrischen Räumen

Im speziellen metrischen Raum $(\mathbb{R}, d_1)$ mit $d_1(x,y) = |x-y|$ ist die Konvergenz einer Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Punkt $a \in \mathbb{R}$ gleichbedeutend mit der „herkömmlichen“ Konvergenz aus dem ersten Semester.

Proposition (1.11)

Jede Folge in einem metrischen Raum hat höchstens einen Grenzwert.

Proposition (1.12)

Sei X eine beliebige Menge. Eine Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ im metrischen Raum (X, δ_X) ausgestattet mit der diskreten Topologie konvergiert genau dann gegen einen Punkt $a \in X$, wenn ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x^{(n)} = a$ für alle $n \geq N$ existiert.

Unabhängigkeit der Konvergenz von der Norm

Proposition (1.13)

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit zwei äquivalenten Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$, und seien d, d' die beiden von den Normen induzierten Metriken. Sei $a \in V$ und $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Genau dann konvergiert die Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a im metrischen Raum (V, d), wenn sie im metrischen Raum (V, d') gegen a konvergiert.

Sprechweise:

Wenn von „Konvergenz im $\mathbb{R}^n$“ die Rede ist, dann meint man damit die Konvergenz bezüglich einer beliebig gewählten Norm auf dem $\mathbb{R}^n$. Weil je zwei Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind, ist es gleichgültig, auf welche Norm man sich bezieht.

Beweis von Prop. 1.13:

geg: $\|\cdot\|, \|\cdot\|'$ äquivalente Normen auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V, d.h. $\exists\, \gamma, \delta \in \mathbb{R}^+$ mit
$\|v\|' \leq \gamma \|v\|$ und $\|v\| \leq \delta \|\cdot\|'$ $\forall v \in V$

außerdem: $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in V, $a \in V$

<u>Beh</u>: $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = a$ in (V, d) $\iff$ $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = a$ in (V, d'), wobei

d, d' definiert sind durch $d(v,w) = \|v-w\|$ und
$d'(v,w) = \|v-w\|'$ $\forall v, w \in V$

d, d' definiert sind durch $d(v,w) = \|v-w\|$ und

„$\Longrightarrow$" Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. z.zg.: $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : d'(a, x^{(n)}) < \varepsilon$

$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = a$ in $(V, d) \Longrightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : d(a, x^{(n)}) < \frac{\varepsilon}{\gamma}$

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$. Dann gilt $d'(a, x^{(n)}) = \|x^{(n)} - a\|' \leq$

$\gamma \cdot \|x^{(n)} - a\| = \gamma\, d(a, x^{(n)}) < \gamma \cdot \frac{\varepsilon}{\gamma} = \varepsilon$

„$\Longleftarrow$" Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. z.zg.: $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : d(a, x^{(n)}) < \varepsilon$

$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = a$ in $(V, d') \Longrightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : d'(a, x^{(n)}) < \frac{\varepsilon}{\delta}$

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$, erhalte $d(a, x^{(n)}) = \|x^{(n)} - a\| \leq$

$\delta \|x^{(n)} - a\|' = \delta\, d'(a, x^{(n)}) < \delta \cdot \frac{\varepsilon}{\delta} = \varepsilon$. $\square$

Komponentenweise Überprüfung der Konvergenz

Satz (1.14)

Sei $m \in \mathbb{N}$. Eine Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ im $\mathbb{R}^m$ konvergiert genau dann gegen einen Punkt $a \in \mathbb{R}^m$, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} x_k^{(n)} = a_k$ für $1 \leq k \leq m$ erfüllt ist.

$y^{(n)} = \left(\frac{1}{n}, (-1)^n\right)$

Wäre sie konvergent, dann müsste nach Satz 1.14 $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$

Beweis von Satz 1.14:

Sei d die durch die $\|\cdot\|_\infty$-Norm induzierte Metrik auf dem $\mathbb{R}^m$.

O.B.d.A. dürfen wir annehmen, dass im $\mathbb{R}^m$ mit „Konvergenz" die Konvergenz bzgl. d gemeint ist.

geg: Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ im $\mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^m$

Beh: $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = a \iff \lim\limits_{n\to\infty} x_k^{(n)} = a_k$ für $1 \leq k \leq m$

„$\Longrightarrow$" Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und $k \in \{1, \dots, m\}$. z.zg.: $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N$ $|x_k^{(n)} - a_k| < \varepsilon$. Vor. $\Longrightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : d(a, x^{(n)}) < \varepsilon$ $\Longrightarrow \forall n \geq N : \|x^{(n)} - a\|_\infty < \varepsilon \Longrightarrow \forall n \geq N : \max\{|x_1^{(n)} - a_1|, \dots, |x_m^{(n)} - a_m|\} < \varepsilon$, insb. $\forall n \geq N : |x_k^{(n)} - a_k| < \varepsilon$

ε

$, d)$

im

des

uchy -

$, d)$

ber

n Raum.

„$\Leftarrow$" Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. z.zg: $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \|x^{(n)} - a\|_\infty < \varepsilon$. Vor. $\Rightarrow \exists N_1, \dots, N_m \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N_k$ jeweils $|x_k^{(n)} - a_k| < \varepsilon$ gilt, für $1 \leq k \leq m$. Sei $N = \max\{N_1, \dots, N_m\}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ gilt dann insbesondere $n \geq N_k$ und somit $|x^{(n)} - a_k| < \varepsilon$.

$\Rightarrow \forall n \geq N : \max\{|x^{(n)} - a_1|, \dots, |x^{(m)} - a_m|\} < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall n \geq N : \|x^{(n)} - a\| < \varepsilon$ $\square$

Beispiel für eine konvergente Folge im $\mathbb{R}^2$:

$$x^{(n)} = \left(1+\frac{2}{n}, \frac{3n^2-7n+6}{4n^2-5}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right) = 1+0 = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-7n+6}{4n^2-5} = \lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{7}{n}+\frac{6}{n^2}}{4-\frac{5}{n^2}}$$

$$= \frac{3-0+0}{4-0} = 3/4 \xRightarrow{\text{Satz } 1.14} \lim_{n\to\infty} x^{(n)} = \left(1, \tfrac{3}{4}\right)$$

Beispiel für eine divergente Folge im $\mathbb{R}^2$:

$$y^{(n)} = \left(\frac{1}{n}, (-1)^n\right)$$

Wäre sie konvergent, dann müsste nach Satz 1.14 $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren. Wir wissen also, dass die Folge divergiert.

Cauchyfolgen in metrischen Räumen

Definition (1.15)

Eine Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ein einem metrischen Raum (X,d) wird Cauchyfolge genannt, wenn für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $d(x^{(m)}, x^{(n)}) < \varepsilon$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geq N$ gilt.

Bem: Jede konvergente Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum ist eine Cauchyfolge,

denn: Sei $a \in X$, setze $\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = a$ in (X,d) voraus. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgeg. Vor. $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq N: d(a, x^{(n)}) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n, m \geq N$. Dann gilt

$$d(x^{(m)}, x^{(n)}) \leq d(x^{(m)}, a) + d(a, x^{(n)})$$

$$= d(a, x^{(m)}) + d(a, x^{(n)}) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

in

folge.

n (X,d)

$\exists N \in \mathbb{N}$:

$\in \mathbb{N}$

)

$= \varepsilon$

<u>aber</u>: Im Allgemeinen ist nicht jede Cauchyfolge konvergent, d.h. es gibt unvollständige metrische Räume.

<u>Bsp.</u>: (X,d) mit $X = \mathbb{Q}$, $d(a,b) = |a-b|$

Sei $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $\mathbb{Q}$, die bzgl. des „herkömmlichen" Def. in $\mathbb{R}$ gegen $\sqrt{2}$ konvergiert.

$x^{(1)} = \frac{14}{10}$, $x^{(2)} = \frac{141}{100}$, $x^{(3)} = \frac{1414}{10^3}$, $x^{(4)} = \frac{14142}{10^4}$, ...

($\sqrt{2} \approx 1{,}4142135\ldots$) Da $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ als konvergente Folge auch eine Cauchyfolge ist, ist sie auch eine Cauchyfolge in (X,d), d.h. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists N \in \mathbb{N}$:

$\forall m,n \geq N: d(x^{(m)}, x^{(n)}) = |x^{(m)} - x^{(n)}| < \varepsilon$

Ang.: $a \in \mathbb{Q}$ ist Grenzwert der Folge in (X,d).
Dann wäre dies auch ein Grenzwert in $\mathbb{R}$ im gewöhnlichen Sinn. ↯ zur Eindeutigkeit des Grenzwerts in $\mathbb{R}$.

weiteres Beispiel: $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ ist Cauchy-folge im metrischen Raum $(]0,1], d)$ mit $d(a,b) = |a-b| \ \forall a,b \in \mathbb{R}$ aber keine konvergente Folge in diesem Raum.

Unabhängigkeit von der Wahl der Norm

Proposition (1.16)

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit zwei äquivalenten Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$, und seien d, d' die beiden von den Normen induzierten Metriken. Sei $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Genau dann ist die Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in (V, d), wenn sie eine Cauchyfolge im metrischen Raum (V, d') ist.

Vollständige metrische Räume, Banachräume

Definition (1.17)

Ein metrischer Raum (X, d) heißt vollständig, wenn jede Cauchyfolge in (X, d) konvergiert. Ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum, der vollständig bezüglich der induzierten Metrik ist, wird Banachraum genannt.

Satz (1.18)

Jeder normierte, endlich-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorraum $(V, \| \cdot \|)$ ist ein Banachraum.

Beweis von Satz 1.18:

1. Schritt: $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banachraum

geg. Cauchyfolge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ in diesem Raum

z.zg.: Die Folge konvergiert in diesem Raum.

<u>Beh.</u>: $(x_k^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ für $1 \leq k \leq d$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Vor. $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq N$:

$\|x^{(m)} - x^{(n)}\|_\infty < \varepsilon \Rightarrow \max\{|x_1^{(m)} - x_1^{(n)}|, \ldots, |x_d^{(m)} - x_d^{(n)}|\}$

$< \varepsilon \Rightarrow |x_k^{(m)} - x_k^{(n)}| < \varepsilon \ \forall k \in \{1, \ldots, d\} \ \forall m, n \geq N$

Daraus folgt die Beh.

bekannt aus der Analysis einer Variablen: Jede Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ konvergiert $\Rightarrow a_k = \lim_{n\to\infty} x_n^{(k)}$ existiert in $\mathbb{R}$ für $1 \leq k \leq d$. Aus Satz 1.14 folgt, dass $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ in $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$ gegen den Punkt $a = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ konvergiert.

Aus dem Satz 1.14 und Prop. 1.16 folgt, dass der $\mathbb{R}^d$ bzgl. jeder Norm ein Banachraum ist.

2. Schritt: Beweis der Aussage für bel. endl.-dim. $\mathbb{R}$-Vektorräume. geg: endl.-dim. $\mathbb{R}$-Vektorraum V mit Norm $\|\cdot\|$. Sei $d = \dim V$. $\rightsquigarrow \exists$ Isom. $\phi: V \to \mathbb{R}^d$ von $\mathbb{R}$-Vektorräumen. Betrachte auf $\mathbb{R}^d$ die Norm $\|\cdot\|'$ geg. durch $\|v\|' = \|\phi^{-1}(v)\|$.

überprüfe: Ist $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(V, \|\cdot\|)$, dann ist $(\phi(x^{(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|')$. s.o. $\Longrightarrow$

$\exists\, a \in \mathbb{R}^d$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \phi(x^{(n)}) = a$ in $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|')$

überprüfe: $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = \phi^{-1}(a)$ in $(V, \|\cdot\|)$.

$\square$

Der Banachsche Fixpunktsatz

Definition (1.19)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Abbildung $\phi : X \to X$ wird Kontraktion genannt, wenn eine Konstante $\gamma \in \,]0, 1[$ existiert, so dass $d(\phi(x), \phi(y)) \leq \gamma d(x, y)$ für alle $x, y \in X$ erfüllt ist.

Satz (1.20)

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Dann besitzt jede Kontraktion $\phi : X \to X$ genau einen Fixpunkt. Es gibt also ein eindeutig bestimmtes $z \in X$ mit $\phi(z) = z$.

Beweis von Satz 1.20:

Sei $x_0 \in X$ beliebig gewählt. Definiere $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}_0}$ rekursiv durch $x^{(0)} = x_0$ und $x^{(n+1)} = \phi(x^{(n)}) \ \forall n \geq 0$

<u>Beh.</u> $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge in (X, d). Sei $n \in \mathbb{N}_0$.

Zeige zunächst $d(x^{(n+p)}, x^{(n+p+1)}) \overset{(*)}{\leq} \gamma^p d(x^{(n)}, x^{(n+1)}) \ \forall p \in \mathbb{N}_0$

Für $p = 0$ ist das offensichtlich. Sei $p \in \mathbb{N}_0$, setze $(*)$ voraus. Dann folgt $d(x^{(n+p+1)}, x^{(n+p+2)}) =$

$$d(\phi(x^{(n+p)}), \phi(x^{(n+p+1)})) \leq \gamma d(x^{(n+p)}, x^{(n+p+1)})$$

$$\overset{\text{Ind-V.}}{\leq} \gamma \cdot \gamma^p d(x^{(n)}, x^{(n+1)}) = \gamma^{p+1} d(x^{(n)}, x^{(n+1)}).$$

$$d\left(\phi(x^{(n+p)}), \phi(x^{(n+p+1)})\right) \le \gamma\, d\left(x^{(n+p)}, x^{(n+p+1)}\right)$$

Ind-V.

Es folgt
$$d(x^{(n)}, x^{(n+p)}) \le \sum_{k=0}^{p-1} d(x^{(n+k)}, x^{(n+k+1)}) \overset{\text{s.o.}}{\le}$$
$$\left(\sum_{k=0}^{p-1} \gamma^k\right) d(x^{(n)}, x^{(n+1)}) = \frac{1-\gamma^p}{1-\gamma}\, d(x^{(n)}, x^{(n+1)})$$
$$\le \frac{1}{1-\gamma}\, d(x^{(n)}, x^{(n+1)})$$

Zum Nachweis der Cauchyfolgeneigenschaft sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgeg. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\frac{\gamma^N}{1-\gamma} \cdot d(x^{(0)}, x^{(1)}) < \varepsilon$, da $\lim_{n\to\infty} \gamma^n = 0$ wg. $\gamma \in]0,1[$ gilt, ist das möglich.

$$\Rightarrow \forall n \ge N,\ p \in \mathbb{N}:\ d(x^{(n)}, x^{(n+p)}) \le \frac{1}{1-\gamma}\, d(x^{(n)}, x^{(n+1)})$$
$$\le \frac{\gamma^n}{1-\gamma}\, d(x^{(0)}, x^{(1)}) \le \frac{\gamma^N}{1-\gamma}\, d(x^{(0)}, x^{(1)}) < \varepsilon \quad (\Rightarrow \text{Beh.})$$

Da (X, d) vollständig ist, konvergiert $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ ein $z \in X$. Beh.: z ist Fixpunkt von ϕ

Zunächst kann es nicht mehr als einen Fixpunkt geben, denn: Ang., z, z' sind beides Fixpunkte, mit $z \neq z'$, also $d(z, z') > 0$.

$\Rightarrow d(z, z') = d(\phi(z), \phi(z')) \leq \gamma\, d(z, z')$

$\Rightarrow d(z, z') < d(z, z')$ ↯

außerdem: $d(\phi(z), x^{(n+1)}) = d(\phi(z), \phi(x^{(n)}))$

$\leq \gamma\, d(z, x^{(n)}) \rightarrow 0$ für $n \to \infty$

$\Rightarrow \phi(z) = \lim_{n \to \infty} x^{(n+1)} = \lim_{n \to \infty} x^{(n)} = z$ $\square$