Definition der p-Normen auf dem $\mathbb{R}^n$

Satz (1.1)

Auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathbb{R}^n$ ist für jedes $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$ durch

$$\|x\|_p \quad = \quad \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p} \quad , \quad x = (x_1, ..., x_n) \in V$$

eine Norm definiert, die sogenannte p-Norm. Eine weitere Norm erhält man durch

$$\|x\|_\infty \quad = \quad \max\{|x_1|, ..., |x_n|\} \quad , \quad \text{die Supremumsnorm.}$$

Definition der Äquivalenz von Normen

Definition (1.5)

Zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V werden als äquivalent bezeichnet, wenn reelle Konstanten $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ mit der Eigenschaft

$$\gamma_1\|x\| \quad \leq \quad \|x\|' \quad \leq \quad \gamma_2\|x\| \qquad \text{für alle } x \in V \text{ existieren.}$$

Durch die Äquivalenz ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Normen auf V definiert.

Geometrische Interpretation der Äquivalenz

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum.
Sei außerden $a \in V$ und $r \in \mathbb{R}^+$.

- Definition des offenen Balls vom Radius r um a

$$B_{\|\cdot\|,r}(a) \quad = \quad \{x \in V \mid \|x - a\| < r\}$$

- Definition des abgeschlossenen Balls vom Radius r um a

$$\bar{B}_{\|\cdot\|,r}(a) \quad = \quad \{x \in V \mid \|x - a\| \leq r\}$$

Proposition (1.6)

Sei $\delta \in \mathbb{R}^+$. Dann ist die Ungleichung $\|x\|' \leq \delta\|x\|$ für alle $x \in V$ gleichbedeutend mit $B_{\|\cdot\|,r}(a) \subseteq B_{\|\cdot\|',\delta r}(a)$ für $a \in V$ und $r \in \mathbb{R}^+$. Eine entsprechende Aussage gilt auch für die abgeschlossenen Bälle.

Äquivalenz von Normen im Endlichdimensionalen

Satz (1.7)

Auf jedem endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V sind je zwei Normen äquivalent.

Beweis von Satz 1.7:

geg: $\mathbb{R}$-Vektorraum V der endl. Dimension d

$\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ Normen auf V

z.zg: Die Normen sind äquivalent.

Schritt 1: Es genügt, die Aussage für $V = \mathbb{R}^d$ zu beweisen.

Annahme: Die Aussage ist für $\mathbb{R}^d$ richtig.

z.zg: Dann gilt die Aussage auch für unser V.

bekannt aus der Linearen Algebra: V ist zu $\mathbb{R}^d$ isomorph, d.h. es gibt eine bijektive lineare Abb. $\phi: V \to \mathbb{R}^d$.

außerdem bekannt: Aus den geg. Normen $\|\cdot\|, \|\cdot\|'$ auf V erhält man durch $\|v\|_* = \|\phi^{-1}(v)\|$, $\|v\|'_* = \|\phi^{-1}(v)\|'$ zwei Normen auf $\mathbb{R}^d$. Laut Annahme sind $\|\cdot\|_*$, $\|\cdot\|'_*$ äquivalent. $\Rightarrow \exists$ Konstanten $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}^+$ mit $\|w\|'_* \leq \gamma_1 \|w\|_*$ und $\|w\|_* \leq \gamma_2 \|w\|'_*$ $\forall w \in \mathbb{R}^d$. Sei nun $v \in V$.

Dann gilt $\phi(v) \in \mathbb{R}^d \Rightarrow \|v\|' = \|\phi(v)\|'_* \leq \gamma_1 \|\phi(v)\|_* = \gamma_1 \|v\|$, $\|v\| = \|\phi(v)\|_* \leq \gamma_2 \|\phi(v)\|'_* = \gamma_2 \|v\|'$.

Also sind $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ äquivalent sind.

Setze von nun an $V = \mathbb{R}^d$ voraus.

<u>Schritt 2</u>: Es genügt zu zeigen, dass eine beliebige Norm $\|\cdot\|$ auf dem $\mathbb{R}^d$ äquivalent zur 1-Norm $\|\cdot\|_1$ ist.

(Erinnerung: $\|v\|_1 = |v_1| + |v_2| + \ldots + |v_d|$)

Grund: Die Äquivalenz von Normen ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Normen auf dem $\mathbb{R}^d$. Seien $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ zwei beliebige Normen auf dem $\mathbb{R}^d$. Annahme $\Longrightarrow$

$\|\cdot\|$ ist äquivalent zu $\|\cdot\|_1$ <u>und</u>

$\|\cdot\|'$ ist äquivalent zu $\|\cdot\|_1$

$\|\cdot\|$ äquivalent zu $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_1$ ist äquiv. zu $\|\cdot\|'$

$\Longrightarrow$ $\|\cdot\|$ äquivalent zu $\|\cdot\|'$

Sei also $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^d$.

z.zg.: $\|\cdot\|$ ist äquivalent zu $\|\cdot\|_1$.

$\Rightarrow \|\cdot\|$ äquivalent zu $\|\cdot\|$

<u>Schritt 3</u>: Es gibt eine Konstante $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$ mit $\|v\| \leq \delta_1 \|v\|_1 \; \forall v \in \mathbb{R}^d$.

Sei $v \in \mathbb{R}^d$, stelle v als Linearkomb. der Einheitsvektoren dar: $v = \sum_{k=1}^{d} v_k e_k$

$\|\cdot\|$ ist Norm $\Rightarrow \|v\| \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{d} \|v_k e_k\|}_{\Delta\text{-Ungl.}}$

$$= \sum_{k=1}^{d} |v_k| \|e_k\| \leq \sum_{k=1}^{d} |v_k| \max\{\|e_j\| \mid 1 \leq j \leq d\}$$

$$= \max\{\|e_j\| \mid 1 \leq j \leq d\} \cdot \|v\|_1$$

Setzen wir $\delta_1 = \max\{\|e_j\| \mid 1 \leq j \leq d\} \in \mathbb{R}^+$, dann gilt also $\|v\| \leq \delta_1 \|v\|_1 \; \forall v \in \mathbb{R}^d$

un

ige

$\|\cdot\|'$

$\mathbb{R}^d$.

Schritt 4: Betrachte die Menge

$S = \{ w \in \mathbb{R}^d \mid \|w\|_1 = 1 \}$. Es genügt zu zeigen, dass $\gamma = \inf \{ \|w\| \mid w \in S \}$ positiv ist.

Ang., dies ist erfüllt, zu zeigen: Es gibt ein $\delta_2 \in \mathbb{R}^+$ mit $\|w\|_1 \leq \delta_2 \|w\| \ \forall w \in \mathbb{R}^d$.

Sei $w \in \mathbb{R}^d \setminus \{0_{\mathbb{R}^d}\}$. Setze $\alpha = \|w\|_1 \in \mathbb{R}^+$ und $v = \alpha^{-1} w$ $\Rightarrow$ $\|v\|_1 = \|\alpha^{-1} w\|_1 = \alpha^{-1} \|w\|_1$ $= \alpha^{-1}\alpha = 1$ $\Rightarrow$ $v \in S$ $\Rightarrow$ erhalte $\gamma \leq \|v\|$ nach Def. von γ $\Rightarrow$ $\|\alpha^{-1} w\| \geq \gamma$ $\Rightarrow$ $\alpha^{-1} \|w\| \geq \gamma$ $\Rightarrow$

$\mathbb{R}^+$

Ein-

$\|$

$1 \leq j \leq d\}$

$\} \in \mathbb{R}^+$,

$\mathbb{R}^d$

und $v = \alpha^{-1} w \Rightarrow \|v\|_1 = \|\alpha^{-1} w\|_1 = \alpha^{-1} \|w\|_1$
$= \alpha^{-1}\alpha = 1 \Rightarrow v \in S \Rightarrow$ erhalte

$\|w\| \geq \gamma \alpha = \gamma \|w\|_1 \Rightarrow \|w\|_1 \leq \gamma^{-1} \|w\|$

Die Abschätzung ist auch für $0_{\mathbb{R}^d}$ erfüllt.

Setzen wir $\delta_2 = \gamma^{-1}$, dann gilt also $\|w\|_1 \leq \delta_2 \|w\|$ für alle $w \in \mathbb{R}^d$.

<u>Schritt 5:</u> $\gamma = \inf\{\|w\| \mid w \in S\}$ ist positiv

Widerspruchsannahme: $\gamma = 0$ Dann existiert eine Folge $(w^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ in S mit $\lim_{n \to \infty} \|w^{(n)}\| = 0$.

Betrachte die Folgen $(w_k^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$, für $1 \leq k \leq d$.

$w^{(n)} \in S \;\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{k=1}^{d} |w_k^{(n)}| = 1 \;\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow |w_k^{(n)}| \leq 1 \;\forall n \in \mathbb{N}$ und $1 \leq k \leq d$.

Jede der Folgen $(w_k^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ ist also <u>beschränkt</u>.

Satz von Bolzano-Weierstrass $\Rightarrow$ Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ besitzt eine konvergente Teilfolge. Daraus folgt, dass $(w^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ schrittweise so ausgedünnt werden kann, dass die Folgen $(\tilde{w}_k^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ alle konvergieren, also die Grenzwerte $a_k \overset{(*_1)}{=} \lim\limits_{n\to\infty} w_k^{(n)}$ existieren. Sei $a=(a_1,\dots,a_d)\in\mathbb{R}^d$.

Dreiecksungl. $\Rightarrow$ $\|a\| = \|a-\tilde{w}^{(n)}+\tilde{w}^{(n)}\| \le \|a-\tilde{w}^{(n)}\| + \|\tilde{w}^{(n)}\|$

für alle $n\in\mathbb{N}$. s.o. $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty}\|w^{(n)}\| = 0$

außerdem, Schritt 3 $\Rightarrow$ $\|a-w^{(n)}\| \le \gamma_1 \|a-w^{(n)}\|_1$

$= \gamma_1 \sum\limits_{k=1}^{d} |a_k - w_k^{(n)}| \quad \forall n\in\mathbb{N}$ $\quad (*_1) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_k - w_k^{(n)}| = 0$

Dreiecksungl. $\Rightarrow \|a\| = \|a - w^{(n)} + w^{(n)}\| \leq \|a - w^{(n)}\| + \|w^{(n)}\|$

für alle $n \in \mathbb{N}$. s.o. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|w^{(n)}\| = 0$

für $1 \leq k \leq d$ $\rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|a - w^{(n)}\| = 0$

Es folgt $\|a\| = 0 \overset{\|\cdot\|\text{ Norm}}{\Longrightarrow} a = 0_{\mathbb{R}^d}$

aber: $\|a\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{d} |a_k| = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{d} |w_k^{(n)}|$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \|w^{(n)}\|_1 \underset{w^{(n)} \in S}{=} \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1 \Rightarrow a \neq 0_{\mathbb{R}^d}$ $\lightning$

$\square$

Offene und abgeschlossene Bälle in metrischen Räumen

Definition (1.8)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für jeden Punkt $x \in X$ und jede Zahl $r \in \mathbb{R}^+$ bezeichnet man

$$B_r(x) \quad = \quad \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

als den offenen Ball und

$$\bar{B}_r(x) \quad = \quad \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}$$

als den abgeschlossenen Ball vom Radius r um den Punkt x.

Definition der diskreten Metrik

Definition (1.9)

Auf jeder Menge X ist die diskrete Metrik δ_X folgendermaßen definiert: Für alle $x \in X$ ist $\delta_X(x,x) = 0$, und für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ setzt man $\delta_X(x,y) = 1$.

Ist nun V ein mindestens eindimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, dann wird δ_V nicht durch eine Norm $\|\cdot\|$ auf V induziert.

offene und abgeschlossene Bälle bzgl. der diskreten Metrik $\delta_{\mathbb{R}^2}$ auf $\mathbb{R}^2$:

offene Bälle: $$B_r(x) = \{ y \in \mathbb{R}^2 \mid \delta_{\mathbb{R}^2}(x,y) < r \} = \begin{cases} \{x\} & \text{falls } r \leq 1 \\ \mathbb{R}^2 & \text{falls } r > 1 \end{cases}$$

abgeschlossene Bälle:
$$\bar{B}_r(x) = \begin{cases} \{x\} & \text{falls } r < 1 \\ \mathbb{R}^2 & \text{falls } r \geq 1 \end{cases}$$

($x \in \mathbb{R}^2$ bel. Punkt)

Konvergenz in metrischen Räumen

Eine Folge in einem metrischen Raum (X, d) ist eine Abbildung $\phi : \mathbb{N} \to X$. Wir verwenden die Schreibweise $x^{(n)} = \phi(n)$ für das n-te Folgenglied, und $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ als Notation für die Folge.

Definition (1.10)

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X und $a \in X$ ein Punkt. Man sagt, die Folge konvergiert in (X, d) gegen a und schreibt

$$\lim_{n \to \infty} x^{(n)} \quad = \quad a \quad ,$$

wenn für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $x \in B_\varepsilon(a)$ für alle $n \geq N$ gilt. Der Punkt a wird in diesem Fall ein Grenzwert der Folge genannt. Eine Folge, die gegen keinen Punkt von X konvergiert, bezeichnet man als divergent.

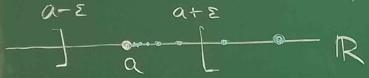
abgeschlossene Bälle:

$$\bar{B}_r(x) = \begin{cases} \{x\} & \text{falls } r < 1 \\ \ldots \end{cases}$$

Erinnerung: Konvergenz in $\mathbb{R}$

$\lim_{n \to \infty} x_n = a$ bedeutet: $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N :$
$|x_n - a| < \varepsilon$

in metrischen Räumen (X, d): $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N :$
$d(a, x^{(n)}) < \varepsilon$
(äquivalent dazu: $x^{(n)} \in B_\varepsilon(a)$)



Beispiele für Konvergenz in metrischen Räumen

Im speziellen metrischen Raum $(\mathbb{R}, d_1)$ mit $d_1(x, y) = |x - y|$ ist die Konvergenz einer Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Punkt $a \in \mathbb{R}$ gleichbedeutend mit der „herkömmlichen" Konvergenz aus dem ersten Semester.

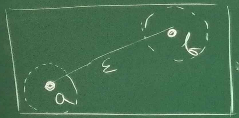
Proposition (1.13)

Jede Folge in einem metrischen Raum hat höchstens einen Grenzwert.

Proposition (1.14)

Sei X eine beliebige Menge. Eine Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ im metrischen Raum (X, δ_X) ausgestattet mit der diskreten Topologie konvergiert genau dann gegen einen Punkt $a \in X$, wenn ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x^{(n)} = a$ für alle $n \geq N$ existiert.

Beweis von Proposition 1.13:



(X, d)

gegeben: metrischer Raum (X, d)

Folge $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ in X, $a, b \in X$

mit $a \neq b$

Annahme: $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen a und gegen b

Sei $\varepsilon = d(a, b)$. $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a \Rightarrow$

$\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1 : d(a, x^{(n)}) < \frac{1}{2}\varepsilon$

$(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $b \Rightarrow \exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_2 : d(b, x^{(n)}) < \frac{1}{2}\varepsilon$

Sei $N = \max\{N_1, N_2\} \Rightarrow d(a, x^{(N)}) < \frac{1}{2}\varepsilon$ und $d(b, x^{(N)}) < \frac{1}{2}\varepsilon$

$\Rightarrow \varepsilon = d(a, b) \leq d(a, x^{(N)}) + d(x^{(N)}, b) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon \Rightarrow \varepsilon < \varepsilon$ ↯ $\square$

Beweis von Prop. 1.14

geg: Menge X, δ_X diskrete Metrik auf X

$(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in X, $a \in X$ Beh:

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = a \text{ in } (X, \delta_X) \iff \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : x^{(n)} = a$$

„$\Leftarrow$" Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. z.zg. $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \delta_X(a, x^{(n)}) < \varepsilon$.

Voraussetzung $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : x^{(n)} = a$

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$. $\Rightarrow \delta_X(a, x^{(n)}) = \delta_X(a,a) = 0 < \varepsilon$

„$\Rightarrow$" z.zg. $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : x^{(n)} = a$. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $\varepsilon \leq 1$. Vor. $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \delta_X(a, x^{(n)}) < \varepsilon$

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$. $\delta_X(a, x^{(n)}) < \varepsilon \overset{\delta_X(a,x^{(n)}) \in \{0,1\}}{\Longrightarrow}$

$\delta_X(a, x^{(n)}) = 0 \Rightarrow x^{(n)} = a$. $\square$