

Definition (14.10)

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit einer Orthogonalität $\perp$ und $V^\times = V \setminus \{0_V\}$. Eine **Winkelfunktion** bezüglich $(V, \|\cdot\|, \perp)$ ist eine Abbildung $\angle : V^\times \times V^\times \rightarrow [0, \pi]$, die für alle $v, w \in V^\times$ folgende Bedingungen erfüllt.

- (i) $\angle(v, v) = 0$ und $\angle(v, w) = \angle(w, v)$
- (ii) $\angle(v, w) = \angle(v, \lambda w)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}^+$
- (iii) $\angle(v, w) + \angle(w, -v) = \pi$
- (iv) Aus $v \perp w$ folgt $\angle(v, w) = \frac{1}{2}\pi$.
- (v) Aus $v \perp (w - v)$ folgt $\cos \angle(v, w) = \frac{\|v\|}{\|w\|}$.

Satz (14.11)

Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf dem $\mathbb{R}^n$, und sei $\perp$ eine Orthogonalität auf dem normierten $\mathbb{R}$ -Vektorraum $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ mit den Eigenschaften aus [Satz 14.9](#). Sei $\angle$ eine **Winkelfunktion** bezüglich $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|, \perp)$. Dann ist $\angle$ die **eindeutig bestimmte** Abbildung mit

$$\cos \angle(v, w) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} \quad \text{für alle } v, w \in (\mathbb{R}^n)^\times.$$

Beweis von Satz 14.11 (Abschluss)

geg $v, w \in (\mathbb{R}^n)^*$, z.zg: $\cos \angle(v, w) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}$

2. Fall: v, w linear unabhängig, $v \perp w \Rightarrow \langle v, w \rangle = 0$

Regel (iv): Aus $v \perp w$ folgt $\angle(v, w) = \frac{1}{2}\pi$

$$\Rightarrow \cos \angle(v, w) = \cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 0 = \frac{0}{\|v\| \cdot \|w\|} = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

3. Fall: v, w linear unabhängig, aber nicht $v \perp w$

Regel (v): Aus $v \perp (w-v)$ folgt $\cos \angle(v, w) = \frac{\|v\|}{\|w\|}$



Regel (iv): Aus $v \perp (w-v)$ folgt $\cos \angle(v, w) = \frac{\|v\|}{\|w\|}$

Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt die Äquivalenz

$$\begin{aligned} v \perp (w - \lambda v) &\Leftrightarrow \langle v, w - \lambda v \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle v, w \rangle - \lambda \langle v, v \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda \langle v, v \rangle = \langle v, w \rangle \Leftrightarrow \lambda = \frac{\langle v, w \rangle}{\langle v, v \rangle} \quad (*) \end{aligned}$$

Sei nun λ durch (*) definiert.

Fall 3.1: $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \cos \angle(v, w) &\stackrel{\lambda > 0}{=} \cos \angle(\lambda v, w) \stackrel{\substack{\text{Regel (v)} \\ \perp_{SO} (w - \lambda v) \perp v}}{=} \frac{\|\lambda v\|}{\|w\|} = |\lambda| \frac{\|v\|}{\|w\|} \\ &= \lambda \frac{\|v\|}{\|w\|} = \frac{\langle v, w \rangle}{\langle v, v \rangle} \cdot \frac{\|v\|}{\|w\|} = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|^2} \cdot \frac{\|v\|}{\|w\|} = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} \end{aligned}$$

Fall 3.2: $\lambda < 0$ Regel (iii): $\angle(v, w) + \angle(w, -v) = \pi$

Rechenregeln Kosinus: $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$, $\cos(-x) = \cos(x)$

$$\cos \angle(v, w) \stackrel{(iii)}{=} \cos(\pi - \angle(-v, w)) = -\cos(-\angle(-v, w)) =$$

$$-\cos(\angle(-v, w)) = -\cos(\angle((- \lambda)(-v), w))$$

$$\uparrow (-\lambda) > 0$$

$$= -\cos(\angle(\lambda v, w)) \stackrel{(v)}{=} -\frac{\|\lambda v\|}{\|w\|} = -|\lambda| \frac{\|v\|}{\|w\|}$$

$$= -(-\lambda) \frac{\|v\|}{\|w\|} = \lambda \frac{\|v\|}{\|w\|} = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} \quad \square$$

- über
(ii)
(iii)
(iv)

Lemma (14.12)

Sei V ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum und b eine symmetrische Bilinearform auf V . Seien $v, w \in V$ mit $b(v, v) \neq 0$ vorgegeben und

$$\lambda = \frac{b(v, w)}{b(v, v)}.$$

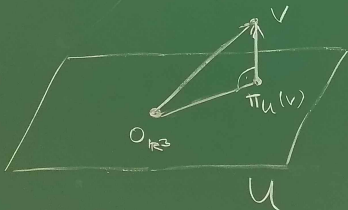
Dann gilt $b(v, w - \lambda v) = 0$. Wir bezeichnen den Vektor λv als die **Orthogonalprojektion** von w auf den Untervektorraum $\langle v \rangle_{\mathbb{R}}$ von V .

Beweis von Lemma 14.12:

$$\begin{aligned} b(v, w - \lambda v) &= b(v, w) - \lambda b(v, v) = \\ b(v, w) - \frac{b(v, w)}{b(v, v)} \cdot b(v, v) &= b(v, w) - b(v, w) = 0 \end{aligned}$$



Orthogonalprojektion auf einen Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$:



Definition der Orthogonalprojektionen

Sei V ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum und b eine symmetrische Bilinearform auf V . Wir definieren eine Relation $\perp_b$ auf der Menge der Teilmengen von V durch

$$A \perp_b B \quad \Leftrightarrow \quad b(v, w) = 0 \quad \forall v \in A, w \in B.$$

für beliebige $A, B \subseteq V$.

Definition (14.13)

Sei V ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum, b eine symmetrische Bilinearform auf V und U ein Untervektorraum von V . Eine **Orthogonalprojektion** von V auf U ist eine lineare Abbildung $\pi_U : V \rightarrow U$ mit der Eigenschaft

$$\pi_U|_U = \text{id}_U \quad \text{und} \quad (v - \pi_U(v)) \perp_b U$$

für alle $v \in V$.

Definition (14.14)

Sei V ein n -dimensionaler $\mathbb{R}$ -Vektorraum und b eine symmetrische Bilinearform auf V . Eine geordnete Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V wird **Orthonormalbasis** (kurz *ON-Basis*) genannt, wenn

$$b(v_k, v_\ell) = \delta_{k\ell} \quad \text{für } 1 \leq k, \ell \leq n \text{ erfüllt ist.}$$

Proposition (14.15)

Sei (V, b) ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform. Sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum der endlichen Dimension n und $(u_1, \dots, u_n)$ eine ON-Basis von U . Dann ist durch

$$\pi_U(v) = \sum_{k=1}^n b(u_k, v) u_k$$

eine Orthogonalprojektion auf U definiert.

Beweis von Prop. 14.15

V $\mathbb{R}$ -Vektorraum, b symm. Bilinearform auf V

$n \in \mathbb{N}$, $U \subseteq V$ n -dim Untervektorraum von V

$B = (u_1, \dots, u_n)$ ON-Basis von U

Beh.: $\pi: V \rightarrow U$, $v \mapsto \sum_{k=1}^n b(u_k, v) \cdot u_k$
ist eine Orthogonalprojektion auf U .

überprüfe: (i) π ist lineare Abb. $\checkmark$

(ii) $\forall v \in V: (v - \pi(v)) \perp u_k$, für $1 \leq k \leq n$ $\checkmark$

(iii) $\forall v \in V: (v - \pi(v)) \perp U$ $\checkmark$

(iv) $\forall u \in U: \pi(u) = u$ $\checkmark$

zu (i) Seien $v, w \in V$ und $\lambda \in V$. zu zeigen:

$$\pi(v+w) = \pi(v) + \pi(w), \quad \pi(\lambda v) = \lambda \pi(v)$$

$$\begin{aligned} \pi(v+w) &= \sum_{k=1}^n b(u_k, v+w) \cdot u_k = \sum_{k=1}^n (b(u_k, v) + b(u_k, w)) \cdot u_k = \sum_{k=1}^n b(u_k, v) \cdot u_k + \\ &\sum_{k=1}^n b(u_k, w) \cdot u_k = \pi(v) + \pi(w) \quad \text{ebenso} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi(\lambda v) &= \sum_{k=1}^n b(u_k, \lambda v) u_k = \sum_{k=1}^n \lambda b(u_k, v) u_k = \\ &\lambda \sum_{k=1}^n b(u_k, v) \cdot u_k = \lambda \pi(v) \end{aligned}$$

zu (ii) Sei $v \in V$ und $k \in \{1, \dots, n\}$. z.zg: $b(v - \pi(v), u_k) = 0$

$$\begin{aligned} b(v - \pi(v), u_k) &= b(v, u_k) - b(\pi(v), u_k) = \\ &b(v, u_k) - b\left(\sum_{l=1}^n b(u_l, v) u_l, u_k\right) = \end{aligned}$$

$$b(v, u_k) - \sum_{l=1}^n b(b(u_l, v) u_l, u_k) = b(v, u_k) - \sum_{l=1}^n b(u_l, v) \cdot b(u_l, u_k)$$

$$= b(v, u_k) - \sum_{l=1}^n b(u_l, v) \cdot \delta_{lk} = b(v, u_k) - b(u_k, v) \cdot 1$$

$$= b(v, u_k) - b(v, u_k) = 0$$

zu (iii) Seien $v \in V, u \in U$. ~~z.z.~~ $(v - \pi(v)) \perp u$

gleichbed. $b(v - \pi(v), u) = 0$. $u \in U \Rightarrow u \in \langle u_1, \dots, u_n \rangle_{\mathbb{R}}$

$$\Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \text{ mit } u = \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k \rightarrow b(v - \pi(v), u)$$

$$= b(v - \pi(v), \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k) = \sum_{k=1}^n \lambda_k b(v - \pi(v), u_k) \stackrel{(ii)}{=}$$

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \text{ mit } u = \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k \Rightarrow b(v - \pi(v), u) \\ = b(v - \pi(v), \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k) = \sum_{k=1}^n \lambda_k b(v - \pi(v), u_k) \stackrel{(ii)}{=} 0$$

zu (iv) Sei $u \in U$ z.z.g.: $\pi(u) = u$. Ang., die Gleichung ist für $u = u_k$ mit $k \in \{1, \dots, n\}$ erfüllt. Schreibe $u = \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow$ erhalte $\pi(u) = \pi\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k u_k\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \pi(u_k) \stackrel{\substack{\text{Lin. Abb.} \\ \text{Annahme}}}{=} \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k = u$.

Sei nun $k \in \{1, \dots, n\}$. Dann gilt $\pi(u_k) = \sum_{l=1}^n b(u_l, u_k) \cdot u_l = \sum_{l=1}^n \delta_{lk} u_l = 1 \cdot u_k = u_k$. □

Die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung

Satz (14.16)

Sei (V, b) ein euklidischer $\mathbb{R}$ -Vektorraum, und sei $\|\cdot\|_b : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ die Funktion definiert durch $\|v\|_b = \sqrt{b(v, v)}$ für $v \in V$. Dann gilt für alle $v, w \in V$

(i) die sog. **Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung**

$$|b(v, w)| \leq \|v\|_b \|w\|_b,$$

(ii) die Dreiecksungleichung $\|v + w\|_b \leq \|v\|_b + \|w\|_b$.

Dabei ist die Ungleichung (i) genau dann mit Gleichheit erfüllt, wenn v, w **linear abhängig** sind. Darüber hinaus ist durch $\|\cdot\|_b$ eine Norm auf V definiert. Man nennt sie die von b **induzierte Norm**.

Beweis von Satz 14.16

geg: euklidischer Vektorraum z.zg:

$$(1) \quad \forall v, w \in V : |\langle v, w \rangle| \leq \|v\|_G \cdot \|w\|_G$$

$$(2) \quad \forall v, w \in V : |\langle v, w \rangle| = \|v\|_G \cdot \|w\|_G \iff v, w \text{ lin abhängig}$$

$$(3) \quad \forall v, w \in V : \|v + w\|_G \leq \|v\|_G + \|w\|_G$$

$$(4) \quad \|\cdot\|_G \text{ ist eine Norm auf } V$$

zu (1) Betrachte zunächst den Fall $v = 0_V$.

Dann gilt $|\langle v, w \rangle| = |\langle 0_V, w \rangle| = |0| = 0$, ebenso

$$\|0_V\|_G \cdot \|w\|_G = 0 \cdot \|w\|_G = 0.$$

Fall $w = 0_V$: analog. Seien nun $v, w \in V \setminus \{0_V\}$.

zu (1) Betrachte zunächst den Fall $v = 0_V$.

Dann gilt $|b(v, w)| = |b(0_V, w)| = |0| = 0$, ebenso

Setze $\lambda = \frac{b(v, w)}{b(v, v)}$ b positiv definit $\Rightarrow b(w - \lambda v, w - \lambda v) \stackrel{(*)}{\geq} 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{gilt } b(w - \lambda v, w - \lambda v) &= b(w, w - \lambda v) - \lambda b(v, w - \lambda v) = \\ &= b(w, w) - \lambda b(w, v) - \lambda b(v, w) + \lambda^2 b(v, v) = \\ &= b(w, w) - \lambda b(v, w) - \lambda b(v, w) + \lambda^2 b(v, v) = \\ &= b(w, w) - 2\lambda b(v, w) + \lambda^2 b(v, v) = b(w, w) - 2 \frac{b(v, w)}{b(v, v)} \cdot b(v, w) \\ &+ \frac{b(v, w)^2}{b(v, v)^2} b(v, v) = b(w, w) - 2 \frac{b(v, w)^2}{b(v, v)} + \frac{b(v, w)^2}{b(v, v)} = b(w, w) - \frac{b(v, w)^2}{b(v, v)} \end{aligned}$$

$$\text{Einsetzen in } (*) \Rightarrow b(w, w) - \frac{b(v, w)^2}{b(v, v)} \geq 0 \Rightarrow b(w, w) \geq \frac{b(v, w)^2}{b(v, v)} \rightarrow$$

$$b(v, w)^2 \leq b(v, v) \cdot b(w, w) \Rightarrow b(v, w)^2 \leq \|v\|_b^2 \cdot \|w\|_b^2$$

$$\sqrt{\quad} \Rightarrow |b(v, w)| \leq \|v\|_b \cdot \|w\|_b$$

zu (2) Ist $v = 0_V$ oder $w = 0_V$, dann sind v, w linear abhängig, und die Cauchy-Schwarz Ungleichung ist erfüllt (s.o., beide Seiten null).

Seien nun $v, w \in V \setminus \{0_V\}$ " $\Leftarrow$ " v, w linear

abh. $\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^*$ mit $w = \lambda v$ Es folgt

$$|b(v, w)| = |b(v, \lambda v)| = |\lambda \cdot b(v, v)| = |\lambda| \cdot b(v, v) \\ = |\lambda| \cdot \|v\|_b^2 = |\lambda| \cdot \|v\|_b \cdot \|v\|_b$$

$$\|w\|_b^2 = b(w, w) = b(\lambda v, \lambda v) = \lambda^2 \cdot b(v, v) = \lambda^2 \cdot \|v\|_b^2$$

$$\sqrt{\quad} \Rightarrow \|w\|_b = |\lambda| \cdot \|v\|_b \quad \text{Setze dies oben ein}$$

$$\Rightarrow |b(v, w)| = \|v\|_b \cdot \|w\|_b$$

$\Rightarrow$ "Vor. $|b(v, w)| = \|v\|_E \|w\|_E$ Ausföhrung
 des Schrittes unter (1) in umgekehrter Reihen-
~~folge~~ liefert $b(w - \lambda v, w - \lambda v) = 0$, wobei
 $\lambda = \frac{b(v, w)}{b(v, v)}$. Da b positiv definit ist,

folgt $w - \lambda v = 0_V \Rightarrow \lambda v = w \Rightarrow v, w$ sind
 linear abhängig.

zu (3) Seien $v, w \in V$

$$\begin{aligned}
 \|v+w\|_E^2 &= b(v+w, v+w) = b(v, v+w) + b(w, v+w) \\
 &= b(v, v) + b(v, w) + b(w, v) + b(w, w) \\
 &= b(v, v) + 2b(v, w) + b(w, w) \leq \underbrace{\quad}_{\text{Cauchy-Schwarz}} \\
 &= b(v, v) + 2\|v\|_E \|w\|_E + b(w, w)
 \end{aligned}$$

$$\|v\|_G^2 + 2\|v\|_G \|w\|_G + \|w\|_G^2 = (\|v\|_G + \|w\|_G)^2$$

$$\sqrt{\cdot} \Rightarrow \|v+w\|_G \leq \|v\|_G + \|w\|_G$$

zu (4) Seien $v, w \in V$. zu überprüfen:

(i) $\|v\|_G = 0 \iff v = 0_V$ (ii) $\|\lambda v\|_G = |\lambda| \cdot \|v\|_G$

(iii) $\|v+w\|_G \leq \|v\|_G + \|w\|_G$

Teil (iii) ist bereits erledigt, (ii) auch, unter (2)

zu (i) „ $\Rightarrow$ “ $\|v\|_G = 0 \Rightarrow \|v\|_G^2 = 0 \Rightarrow G(v, v) = 0$

„ $\Leftarrow$ “ $v = 0_V$ „ $\Leftarrow$ “ $\|0_V\|_G = \sqrt{G(0_V, 0_V)} = \sqrt{0} = 0$
 v positiv def.

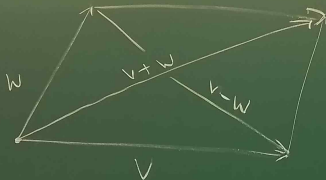
□

Satz (14.17)

Sei V ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Eine Norm $\|\cdot\|$ auf V wird genau dann durch ein Skalarprodukt b induziert, wenn für alle $v, w \in V$ die sog. **Parallelogrammgleichung**

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2) \quad \text{erfüllt ist.}$$

g es- ind u, v+w) nach- schwarz Voanschaulichung der Parallelogrammgleichung.



" $\Rightarrow$ " Vor: Es gibt ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V
 mit $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} \quad \forall v \in V$. Für bel. $v, w \in V$ gilt
 dann $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = \langle v+w, v+w \rangle +$
 $\langle v-w, v-w \rangle = \langle v, v \rangle + 2\langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle +$
 $\langle v, v \rangle - 2\langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2 +$
 $\|v\|^2 + \|w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$