
09.06.2025


09.06.2025


09.06.2025


09.06.2025


09.06.2025


09.06.2025


09.06.2025


09 . 06 . 2025


09. 06. 2025

Definition der Normen auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum

Definition (14.1)

Eine Norm auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V ist eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_+$, die folgende Bedingungen erfüllt.

(i) Für alle $v \in V$ gilt $\|v\| = 0$ genau dann, wenn $v = 0_V$ ist.

(ii) Es gilt $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v \in V$.

(iii) Für alle $v, w \in V$ gilt $\|v + w\| \le \|v\| + \|w\|$.

Das Paar $(V, \|\cdot\|)$ bezeichnet man als normierten Vektorraum.

Die Ungleichung (iii) in der Normdefinition wird Dreiecks-Ungleichung genannt.

Definition der Metriken

Definition (14.2)

Sei X eine Menge. Eine Metrik auf X ist eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ mit den folgenden Eigenschaften.

(i) Für alle $x, y \in X$ gilt $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$ ist.

(ii) Es gilt $d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x, y \in X$.

(iii) Für alle x, y, z gilt $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Das Paar (X, d) bezeichnet man als metrischen Raum.

Jede Norm induziert eine Metrik

Proposition (14.3)

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum und $X \subseteq V$ eine Teilmenge. Dann ist durch die Definition

$$d(x,y) \quad = \quad \|x-y\| \quad \text{für} \quad x,y \in X$$

eine Metrik auf X gegeben. Man nennt sie die von der Norm $\|\cdot\|$ *induzierte* Metrik.

Orthogonalitätsrelationen auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum

Definition (14.4)

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum, so bezeichnen wir eine Relation $\perp$ auf V als Orthogonalität, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

(i) Die Relation ist symmetrisch.

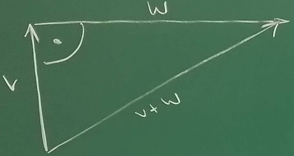
(ii) Sind $u, v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann folgt aus $u \perp v$ und $u \perp w$ jeweils $u \perp (v + w)$ und $u \perp (\lambda v)$.

(iii) Es gilt $v \perp w \Leftrightarrow \|v\|^2 + \|w\|^2 = \|v + w\|^2$ für alle $v, w \in V$.

Die Bedingung (iv) wird auch als Satz des Pythagoras bezeichnet.

$$\Rightarrow v_k^2 > 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} v_j^2 > 0 \Rightarrow \langle v, v \rangle > 0 \qquad \square$$

zu Definition 14.4 (iii)



Satz des Pythagoras:

$$\|v\|^2 + \|w\|^2 = \|v+w\|^2$$

Bem: Ist $b: V \times V \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform, dann gilt $b(v, 0_V) = 0 \ \forall v \in V$, ebenso $b(0_V, v) = 0 \ \forall v \in V$.

Sei $v \in V$. Beweis der ersten Gleichung:

$$b(v, 0_V) = b(v, 0 \cdot 0_V) \overset{(iii)}{=} 0 \cdot b(v, 0_V) = 0$$

(Insbesondere gilt $b(0_V, 0_V) = 0$.)

Definition der Bilinearformen

Definition (14.5)

Eine Bilinearform auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V ist eine Abbildung $b : V \times V \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass für alle $v, v', w, w' \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(i) $b(v + v', w) = b(v, w) + b(v', w)$

(ii) $b(v, w + w') = b(v, w) + b(v, w')$

(iii) $b(\lambda v, w) = b(v, \lambda w) = \lambda b(v, w)$

Man bezeichnet die Bilinearform b als symmetrisch, wenn $b(v, w) = b(w, v)$ für alle $v, w \in V$ gilt, und als positiv definit, wenn außerdem $b(v, v) > 0$ für alle $v \in V$ mit $v \neq 0_V$ gilt.

Definition (14.6)

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Ein Skalarprodukt auf V ist eine symmetrische, positiv definite Bilinearform b auf V. Ein Paar (V, b) bestehend aus einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V und einem Skalarprodukt b auf V nennt man einen euklidischen Vektorraum.

Euklidisches Standard-Skalarprodukt

Proposition (14.7)

Sei $n \in \mathbb{N}$, und sei $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Abbildung definiert durch

$$\langle v, w \rangle \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} v_j w_j$$

für $v = (v_1, ..., v_n)$, $w = (w_1, ..., w_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Man bezeichnet es als das euklidische Standard-Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$.

Beweis von Prop. 14.7 (teilweise)

Seien $v, w, v', w' \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. zu überprüfen:

(i) $\langle v+v', w\rangle = \langle v, w\rangle + \langle v', w\rangle$, $\langle \lambda v, w\rangle = \lambda \langle v, w\rangle$

(ii) $\langle v, w+w'\rangle = \langle v, w\rangle + \langle v, w'\rangle$, $\langle v, \lambda w\rangle = \lambda \langle v, w\rangle$

(iii) $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$ (iv) $\langle v, v\rangle > 0$ falls $v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$

<u>zu (i)</u>, 1. Gl.: $\langle v+v', w\rangle = \sum_{j=1}^{n} (v_j + v_j') w_j = \sum_{j=1}^{n} (v_j w_j + v_j' w_j)$

$= \sum_{j=1}^{n} v_j w_j + \sum_{j=1}^{n} v_j' w_j = \langle v, w\rangle + \langle v', w\rangle$

<u>zu (iv)</u> Sei $v \in \mathbb{R}^n$ mit $v \neq 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow \exists k \in \{1, \dots, n\} : v_k \neq 0$

$\Rightarrow v_k^2 > 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} v_j^2 > 0 \Rightarrow \langle v, v\rangle > 0$ $\square$

Übertragung von Normen durch Isomorphismen

Lemma (14.8)

Sei $\phi : V \to W$ ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräumen, und sei $\| \cdot \|$ eine Norm auf V. Dann ist durch $\|w\|_W = \|\phi^{-1}(w)\|$ eine Norm auf W definiert.

Beweis von Lemma 14.8:

Erinnerung: Mit ϕ ist auch $\phi^{-1}: W \to V$ eine lineare Abb.,
d.h. es gilt $\phi^{-1}(w+w') = \phi^{-1}(w) + \phi^{-1}(w')$, $\phi^{-1}(\lambda w) = \lambda \phi^{-1}(w)$
$\forall w, w' \in W$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. <u>Beh</u>: $\| \ \|_W$ ist eine Norm

Seien $w, w' \in W$, $\lambda \in \mathbb{R}$ zu überprüfen (i) $\|w\|_W = 0 \Leftrightarrow w = 0_W$
(ii) $\|\lambda w\|_W = |\lambda| \cdot \|w\|_W$ (iii) $\|w + w'\|_W \leq \|w\|_W + \|w'\|_W$

<u>zu (i)</u> „$\Rightarrow$" $\|w\|_W = 0 \Rightarrow \|\phi^{-1}(w)\| = 0 \overset{\| \ \| \text{ Norm}}{\Longrightarrow} \phi^{-1}(w) = 0_V \Rightarrow$
$w = \phi(\phi^{-1}(w)) = \phi(0_V) \overset{\phi \text{ linear}}{=} 0_W$ „$\Leftarrow$" $\|0_W\|_W = \|\phi^{-1}(0_W)\| =$
$\|\phi^{-1}(\phi(0_V))\| = \|0_V\| \underset{\text{auf } V}{\overset{\| \ \| \text{ Norm}}{=}} 0$

$\square$

<u>zu (ii)</u>, <u>(iii)</u> siehe Skript

Eindeutigkeit von Norm und Orthogonalität

Satz (14.9)

Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf dem $\mathbb{R}^n$, und sei $\perp$ eine Orthogonalität auf dem normierten $\mathbb{R}$-Vektorraum $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ mit folgenden zusätzlichen Eigenschaften:

- $\|e_j\| = 1$ für $1 \leq j \leq n$
- $e_j \perp e_k$ für $1 \leq j < k \leq n$

Dann sind die Norm und die Orthogonalität auf dem $\mathbb{R}^n$ gegeben durch $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ und $v \perp w \Leftrightarrow \langle v, w\rangle = 0$.

geg. Norm $\|\cdot\|$ und Orthogonalität auf dem $\mathbb{R}^n$, außerdem
$\|e_j\| = 1$ für $1 \leq j \leq n$, $e_j \perp e_k$ für $1 \leq j < k \leq n$

<u>Beh.</u>: $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ $\forall v \in \mathbb{R}^n$ $v \perp w \iff \langle v, w \rangle = 0$ $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$
wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Standard-Skalarprod. bezeichnet

Bew. durch vollst. Ind. über n:

Ind.-Anf. $n = 1$ Sei $v \in \mathbb{R}^1$ $\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}: v = \lambda e_1$
Dann gilt einerseits $\|v\| = \|\lambda \cdot e_1\| = |\lambda| \cdot \|e_1\| = |\lambda| \cdot 1 = |\lambda|$
andererseits $\langle v, v \rangle = \langle \lambda e_1, \lambda e_1 \rangle = \lambda \langle e_1, \lambda e_1 \rangle = \lambda^2 \langle e_1, e_1 \rangle$
$= \lambda^2 \cdot 1 = \lambda^2 \Rightarrow \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{\lambda^2} = |\lambda|$, insgesamt also
$\|v\| = |\lambda| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

Seien $v, w \in \mathbb{R}^1$ z.zg.: $v \perp w \iff \langle v, w \rangle = 0$

Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $v = \lambda e_1$, $w = \mu e_1$. $\Rightarrow \langle v, w \rangle = \langle \lambda e_1, \mu e_1 \rangle$

$= \lambda \mu \langle e_1, e_1 \rangle = \lambda \mu$. „$\Leftarrow$" $\langle v, w \rangle = 0 \Rightarrow \lambda \mu = 0 \Rightarrow$

$\lambda = 0$ oder $\mu = 0 \Rightarrow v = 0_{\mathbb{R}^1}$ oder $w = 0_{\mathbb{R}^1}$

Im 1. Fall gilt $\|v + w\|^2 = \|0_{\mathbb{R}^1} + w\|^2 = \|w\|^2 = 0 + \|w\|^2$

$= \|v\|^2 + \|w\|^2 \overset{\text{Pythagoras}}{\Longrightarrow} v \perp w$ 2. Fall: $w = 0_{\mathbb{R}^1}$ analog

„$\Rightarrow$" $v \perp w \Rightarrow \|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 \Rightarrow \langle v + w, v + w \rangle =$

$\langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle \Rightarrow \langle v, v + w \rangle + \langle w, v + w \rangle = \langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle$

$\Rightarrow \cancel{\langle v, v \rangle} + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle + \cancel{\langle w, w \rangle} = \cancel{\langle v, v \rangle} + \cancel{\langle w, w \rangle}$

$\Rightarrow \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle = 0 \Rightarrow \langle v, w \rangle + \langle v, w \rangle = 0$

$\Rightarrow \langle v, w \rangle = 0$

Ind-Schritt $n \to n+1$: geg. $\|\cdot\|$, $\perp$ auf $\mathbb{R}^{n+1}$

Betrachte die lineare Abb. $\pi: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ geg. durch $(v_1, \dots, v_{n+1}) \mapsto (v_1, \dots, v_n)$. Definiere $(\mathbb{R}^{n+1})^0 = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid v_{n+1} = 0\}$.

Dann ist $\phi = \pi|_{(\mathbb{R}^{n+1})^0} : (\mathbb{R}^{n+1})^0 \to \mathbb{R}^n$ eine bijektive Abb.,

insgesamt ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräumen.

Lemma 14.8 $\Rightarrow$ erhalte durch $\|v\|_n := \|\phi^{-1}(v)\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$

Leicht zu sehen: $\|e_j\|_n = 1$ für $1 \leq j \leq n$, $e_j \perp_n e_k$ für $1 \leq j \leq n$,

wobei die Relation $\perp_n$ auf $\mathbb{R}^n$ definiert ist durch

$$v \perp_n w \Leftrightarrow \phi^{-1}(v) \perp \phi^{-1}(w)$$

(Offenbar ist $\perp_n$ eine Orthogonalität auf $\mathbb{R}^n$)

Induktionsvoraussetzung $\Rightarrow$ $\|v\|_n = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ und

(Offenbar ist $\perp_n$ eine Orthogonalität auf $\mathbb{R}^n$)

Induktionsvoraussetzung $\Rightarrow \|v\|_n = \sqrt{\langle v,v\rangle}$ und

$\langle v,w\rangle = 0 \Leftrightarrow v \perp_n w$ für alle $v,w \in \mathbb{R}^n$

Sei $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ z.zg.: $\sqrt{\langle v,v\rangle} = \|v\|$

Es gilt $v = v' + \lambda e_{n+1}$, wobei $v' \in (\mathbb{R}^{n+1})^0$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist

Dann ist $\langle v,v\rangle = \langle v' + \lambda e_{n+1}, v' + \lambda e_{n+1}\rangle = \langle v', v' + \lambda e_{n+1}\rangle$
$+ \lambda \langle e_{n+1}, v' + \lambda e_{n+1}\rangle = \langle v', v'\rangle + \lambda \langle v', e_{n+1}\rangle +$
$\lambda \langle e_{n+1}, v'\rangle + \lambda^2 \langle e_{n+1}, e_{n+1}\rangle = \langle v', v'\rangle + 2\lambda\langle v', e_{n+1}\rangle + \lambda^2$

Schreibe $v' = \sum_{k=1}^{n} v_k' e_k \Rightarrow 2\lambda\langle v', e_{n+1}\rangle = 2\lambda \left\langle \sum_{k=1}^{n} v_k' e_k, e_{n+1}\right\rangle$
$= \sum_{k=1}^{n} \lambda v_k' \langle e_k, e_{n+1}\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow \langle v,v\rangle = \langle v', v'\rangle + \lambda^2$

andererseits:

$e_{n+1} \perp e_k$ für $1 \leq k \leq n$, $v' = \sum_{k=1}^{n} v_k' e_k \Longrightarrow$ Eigenschaften von $\perp$

$e_{n+1} \perp v' \Longrightarrow \lambda e_{n+1} \perp v'$ Satz des Pythagoras

$\Rightarrow \|v\|^2 = \|v' + \lambda e_{n+1}\|^2 = \|v'\|^2 + \|\lambda e_{n+1}\|^2$

$= \|v'\|^2 + |\lambda|^2 \|e_{n+1}\|^2 = \|v'\|^2 + \lambda^2 =$

$\|\phi(v')\|_n^2 + \lambda^2 \underset{\text{siehe oben}}{=} \langle v', v' \rangle + \lambda^2$

insgesamt: $\|v\|^2 = \langle v', v' \rangle + \lambda^2 = \langle v, v \rangle$

$\rightarrow \|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$

Die Äquivalenz $\langle v, w \rangle = 0 \Longleftrightarrow v \perp w$

zeigt man wie im Fall $n = 1$ mit dem Satz des Pythagoras $\square$

zu

zu R

Defin

$\cos \alpha$

Definition der Winkelfunktionen

Definition (14.10)

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum mit einer Orthogonalität $\perp$ und $V^\times = V \setminus \{0_V\}$. Eine Winkelfunktion bezüglich $(V, \|\cdot\|, \perp)$ ist eine Abbildung $\angle : V^\times \times V^\times \to [0, \pi]$, die für alle $v, w \in V^\times$ folgende Bedingungen erfüllt.

(i) $\angle(v, v) = 0$ und $\angle(v, w) = \angle(w, v)$

(ii) $\angle(v, w) = \angle(v, \lambda w)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}^+$

(iii) $\angle(v, w) + \angle(w, -v) = \pi$

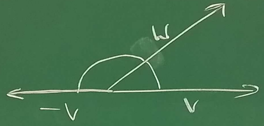
(iv) Aus $v \perp w$ folgt $\angle(v, w) = \frac{1}{2}\pi$.

(v) Aus $v \perp (w - v)$ folgt $\cos\angle(v, w) = \frac{\|v\|}{\|w\|}$.

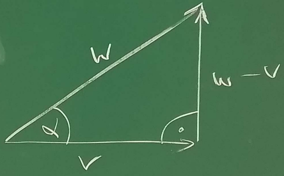
schaf-
on ⊥
goras
W
des

Umrechnung Winkel in Grad $\mapsto$ Winkel im Bogenmaß: k° („k Grad") $\mapsto \frac{k\pi}{180}$

zu Regel (iii)



zu Regel (v):



Definition des Kosinus:

$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{\|v\|}{\|w\|}$$

Eindeutigkeit der Winkelfunktion

Satz (14.11)

Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf dem $\mathbb{R}^n$, und sei $\perp$ eine Orthogonalität auf dem normierten $\mathbb{R}$-Vektorraum $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ mit den Eigenschaften aus Satz 14.9. Sei $\angle$ eine Winkelfunktion bezüglich $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|, \perp)$. Dann ist $\angle$ die eindeutig bestimmte Abbildung mit

$$\cos\angle(v, w) \quad = \quad \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\|w\|} \qquad \text{für alle} \quad v, w \in (\mathbb{R}^n)^\times.$$

Beweis von Satz 14.11 (teilweise)

Seien $v, w \in V^\times$. z.zg.: $\cos \sphericalangle(v,w) = \dfrac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|}$

1. Fall: v, w sind linear abhängig

$\Longrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^\times$ mit $w = \lambda v$.

Fall 1.1 $\lambda > 0$

$$\cos \sphericalangle(v,w) = \cos \sphericalangle(v,\lambda v) = \cos \sphericalangle(v,v)$$

$$= \cos 0 = 1, \text{ andererseits:}$$

$$\frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|} = \frac{\langle v,\lambda v\rangle}{\|v\|\cdot\|\lambda v\|} = \frac{\cancel{\lambda}\langle v,v\rangle}{\|v\|\cdot\cancel{|\lambda|}\cdot\|v\|} \overset{\lambda>0}{\underset{|\lambda|=\lambda}{=}} \frac{\langle v,v\rangle}{\|v\|^2}$$

$$\overset{(14.9)}{=} \frac{\|v\|^2}{\|v\|^2} = 1$$

Fall 1.2: $\lambda < 0$

$$\cos \sphericalangle(v,w) = \cos \sphericalangle(v,\lambda v) = \cos\left(\pi - \sphericalangle(v,(-\lambda) v)\right)$$

$$= -\cos\left(- \sphericalangle(v,(-\lambda)v)\right) = -\cos \sphericalangle(v,(-\lambda)v) \underset{-\lambda > 0}{\overset{\lambda < 0}{=}}$$

$\cos(\alpha+\pi) = -\cos(\alpha)$

$$= -\cos \sphericalangle(v,v) = -\cos 0 = -1$$

$$\frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|} = \frac{\langle v,\lambda v\rangle}{\|v\|\,\|\lambda v\|} = \frac{\lambda\langle v,v\rangle}{|\lambda|\,\|v\|^2} \underset{\lambda=-|\lambda|}{\overset{\lambda<0}{=}} -\frac{\langle v,v\rangle}{\|v\|^2} = -1$$