

Definition (13.16)

Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, dann bezeichnen wir mit $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ die Matrix $D = (d_{ij})$ mit den Einträgen

$$d_{ij} = \begin{cases} \lambda_k & \text{falls } i = j = k \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Eine Matrix dieser Form wird **Diagonalmatrix** genannt. Man bezeichnet eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ als **diagonalisierbar**, wenn sie ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist.

Definition der Diagonalisierbarkeit

Definition (13.16)

Eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ wird **diagonalisierbar** genannt, wenn sie ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist.

Definition (13.17)

Einen Endomorphismus ϕ eines endlich-dimensionalen K -Vektorraums V heißt **diagonalisierbar**, wenn eine Basis von V existiert, so dass die Darstellungsmatrix von ϕ bezüglich dieser Basis eine Diagonalmatrix ist.

Proposition (13.18)

Sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum, $\phi \in \text{End}_K(V)$ und $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ die Darstellungsmatrix von ϕ bezüglich einer geordneten Basis von V . **Genau dann** ist A diagonalisierbar, wenn der Endomorphismus ϕ diagonalisierbar ist.

Definition (13.23)

Sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum, ϕ ein Endomorphismus von V und $\lambda \in K$ ein Eigenwert von ϕ .

- (i) Die Vielfachheit $\mu(\chi_\phi, \lambda)$ von λ als Nullstelle des Polynoms χ_ϕ bezeichnet man als **algebraische** Vielfachheit $\mu_a(\phi, \lambda)$ des Eigenwerts λ .
- (ii) Die Eigenraum-Dimension $\mu_g(\phi, \lambda) = \dim \text{Eig}(\phi, \lambda)$ nennt man die **geometrische** Vielfachheit von λ .

Hauptsatz zur Diagonalisierbarkeit

Satz (13.25)

Sei $n \in \mathbb{N}$, V ein n -dimensionaler K -Vektorraum, ϕ ein Endomorphismus von V und $\chi \in K[x]$ sein charakteristisches Polynom. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) Der Endomorphismus ϕ ist diagonalisierbar.
- (ii) Der Vektorraum V besitzt eine Basis bestehend aus Eigenvektoren von ϕ .
- (iii) Das Polynom χ_ϕ zerfällt in Linearfaktoren, und für jeden Eigenwert λ von ϕ stimmen algebraische und geometrische Vielfachheit überein.
- (iv) Es gibt $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$, so dass $V = \text{Eig}(\phi, \lambda_1) \oplus \dots \oplus \text{Eig}(\phi, \lambda_r)$ gilt.

Beweis von Satz 13.25

geg. endl.-dim. K -Vektorraum V , $\phi \in \text{End}_K(V)$

Bereits erledigt: (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iv)

"(i) $\Rightarrow$ (iii)" Von (i) $\Rightarrow \exists$ Basis B von V , so dass

$A = M_B(\phi)$ eine Diagonalmatrix ist, $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

mit $n = \dim V$ z.zg. (1) χ_ϕ zerfällt in Linearfaktoren

(2) $\mu_B(\phi, \lambda) = \mu_A(\phi, \lambda)$ für jeden Eigenwert λ von ϕ

zu (1) Es gilt $\chi_\phi = \chi_A = \det \text{diag}(x - \lambda_1, \dots, x - \lambda_n)$

$$= \prod_{j=1}^n (x - \lambda_j) \quad (\Rightarrow \text{Beh.})$$

$$\text{zu (1)} \quad \text{Es gilt } \chi_\phi = \chi_A = \det \operatorname{diag}(x - \lambda_1, \dots, x - \lambda_n) \\ = \prod_{j=1}^n (x - \lambda_j) \quad (\Rightarrow \text{Beh.})$$

zu (2) Sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von ϕ . Betrachte
 $S(\lambda) = \{j \in \{1, \dots, n\} \mid \lambda_j = \lambda\}$ Wegen $\chi_\phi = \prod_{j=1}^n (x - \lambda_j)$
 gilt dann $|S(\lambda)| = \mu_A(\phi, \lambda)$.

Sei $B = (v_1, \dots, v_n)$. Nach Def. der Darstellungsmatrix gilt
 $\phi(v_j) = \lambda_j v_j$ für $1 \leq j \leq n \Rightarrow \forall j \in S(\lambda) : \phi(v_j) = \lambda v_j$
 $\Rightarrow v_j \in \operatorname{Eig}(\phi, \lambda)$ Daraus folgt, dass $\operatorname{Eig}(\phi, \lambda)$ ein
 linear unabh. System bestehend aus $|S(\lambda)|$ Vektoren
 enthält $\Rightarrow \mu_B(\phi, \lambda) = \dim \operatorname{Eig}(\phi, \lambda) \geq |S(\lambda)|$
 $= \mu_A(\phi, \lambda)$ Da $\mu_B(\phi, \lambda) \leq \mu_A(\phi, \lambda)$ bereits bekannt ist,
 folgt daraus die Gleichheit.

"(iii) $\Rightarrow$ (iv)" Vor: χ_ϕ zerfällt in Linearfaktoren und $\mu_g(\phi, \lambda) = \mu_a(\phi, \lambda)$ für jeden Eigenwert λ z.zg. V ist direkte Summe der Eigenräume.

χ_ϕ zerfällt in Linearfaktoren $\Rightarrow \exists r \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$, $\mu_1, \dots, \mu_r \in \mathbb{N}$ mit

$$\chi_\phi = \prod_{j=1}^r (x - \lambda_j)^{\mu_j} \quad (*)$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ verschieden sind.

Nach Def. der alg. Vielfachheit gilt

$$\mu_a(\phi, \lambda_j) = \mu_j \text{ für } 1 \leq j \leq r$$

Be

Ziel

χ_A

$(x+2)$

-40 d

Sei $U_j = \text{Eig}(\phi, \lambda_j)$ für $1 \leq j \leq r$.

$\mu_g(\phi, \lambda_j) = \mu_a(\phi, \lambda_j) = \mu_j \Rightarrow \dim U_j = \mu_j$
für $1 \leq j \leq r$. Setze $U = \sum_{j=1}^r U_j$.

Prop. 13.21 $\Rightarrow U_j \cap \left(\sum_{k \neq j} U_k \right) = \{0\}$ für

$1 \leq j \leq r \Rightarrow U$ ist direkte Summe, d. h.

$U = \bigoplus_{j=1}^r U_j$, und $\dim U = \sum_{j=1}^r \dim U_j$

$= \sum_{j=1}^r \mu_j$, außerdem wegen (*) $\sum_{j=1}^r \mu_j =$

$\text{grad}(\chi_\phi) = \dim V$ $U \subseteq V$, $\dim U = \dim V$

$\Rightarrow V = U = \bigoplus_{j=1}^r \text{Eig}(\phi, \lambda_j)$ □

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -10 & 0 & -40 \\ -24 & -13 & -8 & -68 \\ 15 & 30 & 3 & 120 \\ 6 & 4 & 2 & 20 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$$

Ziel: Untersuche A auf Diagonalisierbarkeit

$$\chi_A = \det \begin{pmatrix} x+2 & 10 & 0 & 40 \\ 24 & x+13 & 8 & 68 \\ -15 & -30 & x-3 & -120 \\ -6 & -4 & -2 & x-20 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Laplace 1. Zeile} \\ \leftarrow \\ = \end{array}$$

$$(x+2) \det \begin{pmatrix} x+13 & 8 & 68 \\ -30 & x-3 & -120 \\ -4 & -2 & x-20 \end{pmatrix} - 10 \det \begin{pmatrix} 24 & 8 & 68 \\ -15 & x-3 & -120 \\ -6 & -2 & x-20 \end{pmatrix}$$

$$- 40 \det \begin{pmatrix} 24 & x+13 & 8 \\ -15 & -30 & x-3 \\ -6 & -4 & -2 \end{pmatrix} = x^4 - 8x^3 + 13x^2 + 30x - 72$$

Einsetzen von $0, \pm 1, \pm 2, \dots \Rightarrow -2$ ist Nullstelle

Polynomdivision $\Rightarrow \chi_A = (x+2)(x^3 - 10x^2 + 33x - 36)$

Einsetzen $\Rightarrow 3$ ist Nullst. von $x^3 - 10x^2 + 33x - 36$

Polynomdivision $\Rightarrow x^3 - 10x^2 + 33x - 36 = (x-3)(x^2 - 7x + 12)$

p-q-Formel $\Rightarrow x^2 - 7x + 12$ hat 3 und 4 als

Nullst. $\Rightarrow x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4)$, insgesamt

$\chi_A = (x+2)(x-3)^2(x-4) \Rightarrow$ Eigenwerte von A sind $-2, 3$ und 4 , und χ_A zerfällt in Linearfaktoren

noch zu überprüfen: $\mu_g(A, \lambda) = \mu_a(A, \lambda)$ für alle $\lambda \in \{-2, 3, 4\}$ Für $\lambda \in \{-2, 4\}$ gilt

$$1 \leq \mu_g(A, \lambda) \leq \mu_a(A, \lambda) = 1 \Rightarrow \mu_g(A, \lambda) = \mu_a(A, \lambda)$$

für $\lambda = -2$ und $\lambda = 4$



$$A - 3E^{(4)} = \begin{pmatrix} -5 & -10 & 0 & -40 \\ -24 & -16 & -8 & -68 \\ 15 & 30 & 0 & 120 \\ 6 & 4 & 2 & 17 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 8 \\ -6 & -4 & -2 & -17 \\ 1 & 2 & 0 & 8 \\ 6 & 4 & 2 & 17 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 8 \\ 6 & 4 & 2 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{rg}(A - 3E^{(4)}) = 2 \Rightarrow \mu_g(A, 3)$$

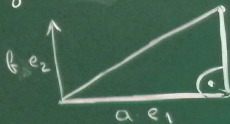
↳ Dimensionssatz

$$= \dim \operatorname{Eig}(A, 3) = \dim \ker(A - 3E^{(4)})$$

$$= 4 - \operatorname{rg}(A - 3E^{(4)}) = 4 - 2 = 2$$

$$\Rightarrow \mu_g(A, 3) = 2 = \mu_a(A, 3) \quad \text{insgesamt: } A \text{ ist diagonalisierbar}$$

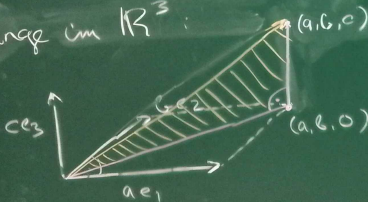
Länge eines Vektors $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$: $\left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{a^2 + b^2}$



Satz des Pythagoras $\Rightarrow$

$$\left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\|^2 = \|a e_1\|^2 + \|b e_2\|^2 = a^2 + b^2$$

Länge im $\mathbb{R}^3$:



Wende den Satz des Pythagoras an auf das rechtwinklige Dreieck mit den Eckpunkten

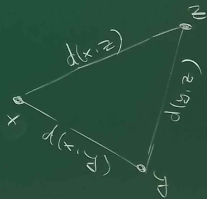
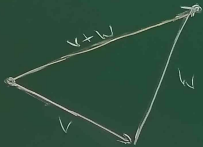
$$0 \in \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\left\| \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \right\|^2 = (a^2 + b^2) + c^2$$

$$\Rightarrow \left\| \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Interpretation der Dreiecksungleichung

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$



Definition der Normen auf einem $\mathbb{R}$ -Vektorraum

Definition (14.1)

Eine **Norm** auf einem $\mathbb{R}$ -Vektorraum V ist eine Abbildung $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}_+$, die folgende Bedingungen erfüllt.

- (i) Für alle $v \in V$ gilt $\|v\| = 0$ genau dann, wenn $v = 0_V$ ist.
- (ii) Es gilt $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v \in V$.
- (iii) Für alle $v, w \in V$ gilt $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Das Paar $(V, \| \cdot \|)$ bezeichnet man als **normierten Vektorraum**.

Die Ungleichung (iii) in der Normdefinition wird **Dreiecks-Ungleichung** genannt.

Definition (14.2)

Sei X eine Menge. Eine Metrik auf X ist eine Abbildung $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit den folgenden Eigenschaften.

- (i) Für alle $x, y \in X$ gilt $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$ ist.
- (ii) Es gilt $d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x, y \in X$.
- (iii) Für alle x, y, z gilt $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Das Paar (X, d) bezeichnet man als metrischen Raum.

Jede Norm induziert eine Metrik

Proposition (14.3)

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{R}$ -Vektorraum und $X \subseteq V$ eine Teilmenge. Dann ist durch die Definition

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad \text{für } x, y \in X$$

eine Metrik auf X gegeben. Man nennt sie die von der Norm $\|\cdot\|$ **induzierte** Metrik.

Beweis von Proposition 14.3

geg.: normierter $\mathbb{R}$ -Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$

$X \subseteq V$, $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ geg. durch $d(x, y) = \|x - y\|$

für alle $x, y \in X$ Beh. d ist Metrik auf X

Seien $x, y, z \in X$. zu überprüfen:

$$\text{(i) } x = y \iff d(x, y) = 0 \quad \text{(ii) } d(x, y) = d(y, x)$$

$$\text{(iii) } d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

$$\begin{aligned} \text{zu (i)} \quad " \implies " \quad x = y &\Rightarrow d(x, y) = \|x - y\| = \|x - x\| \\ &= \|0_V\| = 0 \end{aligned}$$

$$= \|0_V\| = 0$$

$$\begin{aligned} \text{"}\Leftarrow\text{" } d(x, y) = 0 &\Rightarrow \|x - y\| = 0 \Rightarrow x - y = 0_V \\ &\Rightarrow x = y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{zu (ii)} \quad d(x, y) &= \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1| \cdot \|y - x\| \\ &= \|y - x\| = d(y, x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{zu (iii)} \quad d(x, z) &= \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| \\ &= d(x, y) + d(y, z) \quad \square \end{aligned}$$

Bem. Sei X eine Menge und

$\delta_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ definiert durch

$$\delta_X(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist δ_X eine Metrik, die sog. diskrete
Metrik auf X . denn. Seien $x, y, z \in X$.

überprüfe: i) $x = y \iff \delta_X(x, y) = 0$

ii) $\delta_X(x, y) = \delta_X(y, x)$

iii) $\delta_X(x, z) \leq \delta_X(x, y) + \delta_X(y, z)$

zu i) klar, gilt nach Def.

zu ii) 1. Fall: $x=y$ $\delta_X(x,y) = 0 = \delta_X(y,x)$

2. Fall: $x \neq y$ $\delta_X(x,y) = 1 = \delta_X(y,x)$

zu iii) Im Fall $x \neq y$ oder $y \neq z$ gilt

$\delta_X(x,y) = 1$ oder $\delta_X(y,z) = 1$, also

$$\delta_X(x,y) + \delta_X(y,z) \geq 1 \geq \delta_X(x,z).$$

Ansonsten gilt $x=y=z$, und es folgt

$$\delta_X(x,z) = 0 = 0 + 0 = \delta_X(x,y) + \delta_X(y,z)$$

Selbst wenn X ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum ist,
ist δ_X im Fall $|X| > 1$ keine induzierte
Metrik, denn: Ang. δ_X wird durch
eine Norm $\|\cdot\|$ auf X induziert.

$|X| > 1 \Rightarrow X \neq \{0_X\}$, wobei $0_X = \text{Nullvektor}$

Sei $x \in X \setminus \{0_X\} \Rightarrow \delta_X(x, 0_X) = 1$ wegen

$x \neq 0_X$. Betrachte nun $y = 2x$

einerseits: $\delta_X(y, 0_X) = 1$ wg. $y \neq 0_X$

andererseits: $\delta_X(y, 0_X) = \|0_X - y\| = \|y\| = \|2x\|$

$$= 2\|x\| = 2\|0_X - x\| = 2\delta_X(x, 0_X) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$\rightarrow 2 = \delta_X(x, 0_X) = 1 \quad \downarrow$$

Korrektur: In der letzten Zeile muss es $2 = \delta_X(y, 0_X) = 1$ heißen.