Eigenwerte und charakteristisches Polynom

Definition (13.11)

Für jede Matrix $A \in \mathscr{M}_{n,K}$ nennt man

$$\chi_A \quad = \quad (-1)^n \det(A - xE^{(n)}) \quad = \quad \det(xE^{(n)} - A) \quad \in K[x]$$

das charakteristische Polynom von A.

Satz (13.12)

Die Eigenwerte einer Matrix $A \in \mathscr{M}_{n,K}$ sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms χ_A.

Das charakteristische Polynom eines Endomorphismus

Definition (13.13)

Ist V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$ und $A \in \mathscr{M}_{n,K}$ die Darstellungsmatrix von V bezüglich einer beliebig gewählten Basis, dann bezeichnen wir $\chi_\phi = \chi_A$ als charakteristisches Polynom von ϕ.

Proposition (13.14)

Das charakteristische Polynom χ_ϕ ist unabhängig von der gewählten Basis des Vektorraums V.

Folgerung (13.15)

Auch für jeden Endomorphismus $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$ eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums V gilt: Die Eigenwerte von ϕ sind genau die Nullstellen des Polynoms χ_ϕ.

Definition der Diagonalisierbarkeit

Definition (13.16)

Sind $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$, dann bezeichnen wir mit $\mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ die Matrix $D = (d_{ij})$ mit den Einträgen

$$d_{ij} \quad = \quad \begin{cases} \lambda_k & \text{falls } i = j = k \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Eine Matrix dieser Form wird Diagonalmatrix genannt. Man bezeichnet eine Matrix $A \in \mathscr{M}_{n,K}$ als diagonalisierbar, wenn sie ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist.

Diagonalisierbarkeit von Endomorphismen

Definition (13.17)

Einen Endomorphismus ϕ eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums V heißt diagonalisierbar, wenn eine Basis von V existiert, so dass die Darstellungsmatrix von ϕ bezüglich dieser Basis eine Diagonalmatrix ist.

Proposition (13.18)

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$ und $A \in \mathscr{M}_{n,K}$ die Darstellungsmatrix von ϕ bezüglich einer geordneten Basis von V. Genau dann ist A diagonalisierbar, wenn ϕ diagonalisierbar ist.

Lemma (13.19)

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $\mathscr{A}$ eine geordnete Basis von V und $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ eine invertierbare Matrix. Dann gibt es eine geordnete Basis $\mathscr{B}$ von V mit $T = \mathscr{T}^{\mathscr{A}}_{\mathscr{B}}$.

Beweis von Lemma 13.19 (Vervollständigung)

geg. $n \in \mathbb{N}$, n-dim. K-Vektorraum V

$\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ geordnete Basis von V, $T \in GL_n(K)$

Beh: Es gibt eine geordn. Basis $\mathcal{B}$ von V mit der Eigenschaft $T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} = T$.

Ansatz: Setze $C = (c_{ij}) = T^{-1}$, $T = (t_{ij})$.

Definiere $w_j = \sum_{k=1}^{n} c_{kj} v_k$, $1 \leq j \leq n$. (*)

<u>Beh.</u> $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_n)$ ist geordnete Basis von V

Ansatz: Setze $C = (c_{ij}) = \ldots$, $T = (t_{ij})$.

(Ist dies der Fall ist, dann zeigt (*), dass $C = T^{B}_{A}$ gilt, und es folgt $T = C^{-1} = T^{A}_{B}$.)

Für $1 \le i \le n$ gilt

$$\sum_{j=1}^{n} t_{ji} w_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} t_{ji} c_{kj} v_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{kj} t_{ji} v_k$$

$\sum_{j=1}^{n} c_{kj} t_{ji}$ ist Eintrag von CT an der Stelle (i,k) und $CT = E^{(n)}$

durchläuft i-te Spalte von T

durchläuft k-te Zeile von C

$$= \sum_{k=1}^{n} \delta_{ki} v_k = v_i$$

Somit sind $v_1, \ldots, v_n$ Linearkombinationen von $w_1, \ldots, w_n$. $\Rightarrow \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq \langle w_1, \ldots, w_n \rangle$

$\Rightarrow V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle_K \subseteq \langle w_1, \dots, w_n \rangle_K$

Also ist $\{w_1, \dots, w_n\}$ ein Erzeugendensystem des K-Vektorraums V. $\dim V = n \Rightarrow \{w_1, \dots, w_n\}$ ist Basis von $V \Rightarrow \mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ ist geordnete Basis. $\square$

Ein erstes Kriterium zur Diagonalisierbarkeit

Proposition (13.20)

Sei $V \neq \{0_V\}$ ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) Der Endomorphismus ϕ ist diagonalisierbar.

(ii) Der Vektorraum V besitzt eine Basis bestehend aus Eigenvektoren von ϕ.

Beweis von Proposition 13.20.

„(i) $\Rightarrow$ (ii)" Vor. $\Rightarrow$ $\exists$ geordnete Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V, so dass $M_\mathcal{B}(\phi) = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ für geeignete $\lambda_j \in K$ $(1 \leq j \leq n)$. Def. von $M_\mathcal{B}(\phi)$ $\Rightarrow$

$$\Phi_\mathcal{B}(\phi(v_j)) = M_\mathcal{B}(\phi)\,\Phi_\mathcal{B}(v_j) = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\, e_j$$

$$= \lambda_j e_j = \lambda_j \Phi_\mathcal{B}(v_j) = \Phi_\mathcal{B}(\lambda_j v_j) \overset{\Phi_\mathcal{B}^{-1}}{\Longrightarrow} \phi(v_j) = \lambda_j v_j$$

$\Rightarrow$ v_j ist Eigenvektor zum Eigenwert λ_j, für $1 \leq j \leq n$.

„(ii) $\Rightarrow$ (i)" Vor. $\Rightarrow$ $\exists$ geordn. Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$, wobei v_j jeweils Eigenvektor zu einem $\lambda_j \in K$ ist, für $1 \leq j \leq n$.

$$\phi(v_j) = \lambda_j v_j \Rightarrow \Phi_\mathcal{B}(\phi(v_j)) = \Phi_\mathcal{B}(\lambda_j v_j) \Rightarrow$$

].

)

te

den

). Für

B,

$$\Rightarrow M_{\mathcal{B}}(\phi)\,\Phi_{\mathcal{B}}(v_j) = \lambda_j\,\Phi_{\mathcal{B}}(v_j)$$

$$\Rightarrow M_{\mathcal{B}}(\phi)\,e_j = \lambda_j e_j \quad (1 \le j \le n)$$

$\Rightarrow$ Die Spalten von $M_{\mathcal{B}}(\phi)$ sind Vielfache der Einheitsvektoren $e_1, \dots, e_n$. $\Rightarrow M_{\mathcal{B}}(\phi)$ ist Diagonalmatrix $\Rightarrow \phi$ ist diagonalisierbar. $\square$

Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten

Proposition (13.21)

Sei $r \in \mathbb{N}$, ϕ ein Endomorphismus eines K-Vektorraums V, und seien $\lambda_1, ..., \lambda_r$ verschiedene Elemente des Körpers K. Dann gilt

$$\mathrm{Eig}(\phi, \lambda_k) \cap \left(\sum_{\ell \neq k} \mathrm{Eig}(\phi, \lambda_\ell) \right) \quad = \quad \{0_V\} \qquad \text{für} \quad 1 \leq k \leq r.$$

Beweis von Prop. 13.21

V K-Vektorraum, $r \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ verschieden, $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$

Beh. Für $k \in \{1, \ldots, r\}$ gilt jeweils

$$\mathrm{Eig}(\phi, \lambda_k) \cap \Big(\sum_{j \neq k} \mathrm{Eig}(\phi, \lambda_j) \Big) = \{0_V\}$$

Beweis durch vollst. Induktion.

Ind.-Anf. $r = 1$

In diesem Fall ist $\sum_{j \neq 1} \mathrm{Eig}(\phi, \lambda_j) = \{0_V\}$, erhalte $\mathrm{Eig}(\phi, \lambda_1) \cap \{0_V\} = \{0_V\}$

Ind.-Schritt: geg: $\lambda_1, \dots, \lambda_{r+1} \in K$ verschieden. Es genügt zu zeigen, dass

$$\mathrm{Eig}(\phi, \lambda_{r+1}) \cap \left(\sum_{j=1}^{r} \mathrm{Eig}(\phi, \lambda_j) \right) = \{0_V\}.$$

Ind.-V. $\Rightarrow$ $\mathrm{Eig}(\phi, \lambda_k) \cap \left(\sum_{\substack{j \neq k \\ 1 \le j \le r}} \mathrm{Eig}(\phi, \lambda_j) \right) = \{0_V\}$ für $1 \le k \le r$.

Daraus folgt (siehe §10), dass die direkte Summe $U = \bigoplus_{j=1}^{r} \mathrm{Eig}(\phi, \lambda_j)$ gebildet werden kann. Sei B_j eine Basis von $\mathrm{Eig}(\phi, \lambda_j)$, für $1 \le j \le r$. Dann ist $B = B_1 \cup \dots \cup B_r$ nach §10 eine Basis von U.

Sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_m)$ $(m = \dim U)$.

Weil die Elemente aus $\mathcal{B}$ Eigenvektoren sind, existiert für $1 \le k \le m$ jeweils ein $\mu_k \in K$ mit $\phi(v_k) = \mu_k v_k$, und $\mu_k \in \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$.

Angenommen, es gibt ein $v \neq 0_V$ im Durchschnitt $U \cap \mathrm{Eig}(\phi, \lambda_{r+1})$. $\mathcal{B}$ Basis von $U \Rightarrow$ $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$ mit $v = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k v_k$.

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \mu_k v_k = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \phi(v_k) =$$

$$\phi\left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k v_k\right) = \phi(v) = \lambda_{r+1} v = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \lambda_{r+1} v_k$$

r].

)

elte

erden

$_j$), für

$\cup B_r$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(\mu_k - \lambda_{r+1}) v_k = 0_V$$

$$\xRightarrow[\text{linear unabh.}]{v_1, \dots, v_m} \alpha_k(\mu_k - \lambda_{r+1}) = 0_K \text{ für } 1 \leq k \leq m$$

$$\xRightarrow[\mu_k \neq \lambda_{r+1}\ \forall k]{} \alpha_k = 0_K \text{ für } 1 \leq k \leq m \Rightarrow v = 0_V \quad \lightning$$

$\square$

Proposition (13.22)

Sei $V \neq \{0_V\}$ endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) Der Endomorphismus ϕ ist diagonalisierbar.

(ii) Es gibt verschiedene Elemente $\lambda_1, ..., \lambda_r \in K$, so dass

$$V \quad = \quad \bigoplus_{\ell=1}^{r} \mathrm{Eig}(\phi, \lambda_\ell) \qquad \text{erfüllt ist.}$$

Algebraische und geometrische Vielfachheit

Definition (13.23)

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, ϕ ein Endomorphismus von V und $\lambda \in K$ ein Eigenwert von ϕ.

(i) Die Vielfachheit $\mu(\chi_\phi, \lambda)$ von λ als Nullstelle des Polynoms χ_ϕ bezeichnet man als algebraische Vielfachheit $\mu_a(\phi, \lambda)$ des Eigenwerts λ.

(ii) Die Eigenraum-Dimension $\mu_g(\phi, \lambda) = \dim \mathrm{Eig}(\phi, \lambda)$ nennt man die geometrische Vielfachheit von λ.

Beispiel für die algebraische und die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2,\mathbb{R}}$, $\phi_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $v \mapsto Bv$

(i) algebraische Vielfachheit: $\chi_{\phi_B} = \chi_B =$

$\det \begin{pmatrix} x-1 & -1 \\ 0 & x-1 \end{pmatrix} = (x-1)^2 \Rightarrow \mu_a(\phi_B, 1) = 2$, weil

1 eine doppelte Nullstelle von χ_{ϕ_B} ist

(ii) geometrische Vielfachheit:

$\mu_g(\phi_B, 1) = \dim \mathrm{Eig}(\phi_B, 1) = \dim \mathrm{Eig}(B, 1)$

$= \dim \ker \left(B - 1 \cdot E^{(2)}\right) = \dim \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 - \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\dim \ker C + \operatorname{rg} C = 2$ für alle $C \in M_{2, \mathbb{R}}$

$2 - \dim \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} = 2 - 1 = 1$

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \chi_E = \det \begin{pmatrix} x-1 & 0 \\ 0 & x-1 \end{pmatrix} = (x-1)^2$

$\Rightarrow \mu_a(E, 1) = 2$

$\mu_g(E, 1) = \dim \ker (E - 1 \cdot E) = \dim \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \dim \mathbb{R}^2 = 2$

Beziehung zwischen den Vielfachheiten

Proposition (13.24)

Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, $\phi : V \to V$ ein Endomorphismus und $\lambda \in K$ ein Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit μ_a und geometrischer Vielfachheit μ_g. Dann gilt $1 \leq \mu_g \leq \mu_a$.

Beweis von Prop 13.24:

(i) Ungleichung $\mu_g \geq 1$: λ Eigenwert von $\phi \Rightarrow$
$\mathrm{Eig}(\phi, \lambda) \neq \{0_V\} \Rightarrow \mu_g = \dim \mathrm{Eig}(\phi, \lambda) \geq 1$

(ii) Ungleichung $\mu_g \leq \mu_a$: Sei $r = \mu_g$ und $(v_1, \ldots, v_r)$ eine geordnete Basis von $\mathrm{Eig}(\phi, \lambda)$. Erweitere diese durch $v_{r+1}, \ldots, v_n$ zu einer geordn. Basis $\mathcal{B}$ von V ($n = \dim V$).

Für $1 \leq j \leq r$ gilt $\phi(v_j) = \lambda v_j \Rightarrow M_{\mathcal{B}}(\phi) e_j =$
$M_{\mathcal{B}}(\phi) \Phi_{\mathcal{B}}(v_j) = \Phi_{\mathcal{B}}(\phi(v_j)) = \Phi_{\mathcal{B}}(\lambda v_j) = \lambda \Phi_{\mathcal{B}}(v_j)$
$= \lambda e_j \Rightarrow \lambda e_1, \ldots, \lambda e_r$ sind die ersten r Spalten von $M_{\mathcal{B}}(\phi)$.

$M_{\mathcal{B}}(\varphi)\,\Phi_{\mathcal{B}}(v_j) = \Phi_{\mathcal{B}}(\varphi(v_j)) = \Phi_{\mathcal{B}}(\lambda v_j) = \lambda \Phi_{\mathcal{B}}(v_j)$

$= \lambda e_j \Rightarrow \lambda e_1, \dots, \lambda e_r$ sind die ersten r Spalten von $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$

$\Rightarrow M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ hat die Form $\begin{pmatrix} \lambda E^{(r)} & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ mit

$B \in M_{r \times (n-r), K}$ und $C \in M_{n-r, K}$.

$$\Rightarrow \chi_\varphi = \det\left(x \cdot E^{(n)} - M_{\mathcal{B}}(\varphi)\right) = \det \begin{pmatrix} (x-\lambda)E^{(r)} & -B \\ 0 & x \cdot E^{(n-r)} - C \end{pmatrix}$$

$$= \det\left((x-\lambda) E^{(r)}\right) \cdot \det\left(x \cdot E^{(n-r)} - C\right)$$

$= (x-\lambda)^r \cdot \chi_C$ Dies zeigt, dass λ mindestens eine r-fache Nullstelle von χ_φ ist. $\Rightarrow \mu_a \geq r = \mu_g$. $\square$

Hauptsatz zur Diagonalisierbarkeit

Satz (13.25)

Sei $n \in \mathbb{N}$, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, ϕ ein Endomorphismus von V und $\chi \in K[x]$ sein charakteristisches Polynom. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) Der Endomorphismus ϕ ist diagonalisierbar.

(ii) Der Vektorraum V besitzt eine Basis bestehend aus Eigenvektoren von ϕ.

(iii) Das Polynom χ_ϕ zerfällt in Linearfaktoren, und für jeden Eigenwert λ von ϕ stimmen algebraische und geometrische Vielfachheit überein.

(iv) Es gibt $\lambda_1, ..., \lambda_r \in K$, so dass $V = \mathrm{Eig}(\phi, \lambda_1) \oplus ... \oplus \mathrm{Eig}(\phi, \lambda_r)$ gilt.

Formulierung des Hauptsatzes für Endomorphismen

Folgerung (13.26)

Für jede Matrix $A \in \mathscr{M}_{n,K}$ sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) Die Matrix A ist diagonalisierbar.

(ii) Der Vektorraum K^n besitzt eine Basis bestehend aus Eigenvektoren von A.

(iii) Das Polynom χ_A zerfällt in Linearfaktoren, und es gilt $\chi_a(A, \lambda) = \chi_g(A, \lambda)$ für jeden Eigenwert λ von A.

(iv) Es gibt $\lambda_1, ..., \lambda_r \in K$, so dass $K^n = \mathrm{Eig}(A, \lambda_1) \oplus ... \oplus \mathrm{Eig}(A, \lambda_r)$ gilt.

(Dies ergibt sich durch Anwendung von Satz 13.25 auf den Endomorphismus $\phi = \phi_A$ von $V = K^n$.)

Anwendungsbeispiel zu Folgerung 13.26:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2,\mathbb{R}}$$

Es ist $\chi_C = \det \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix} = x^2 + 1$.

Dieses Polynom hat in $\mathbb{R}$ keine Nullstellen, zerfällt also auch nicht in Linearfaktoren

$\overset{(13.26)}{\Longrightarrow}$ C ist <u>nicht</u> diagonalisierbar aber: Betrachtet man C als Matrix in $M_{2,\mathbb{C}}$, dann gilt $\chi_C = x^2 + 1 = (x-i)(x+i)$. Auf Grund von Prop. 13.24 gilt $\mu_g(C,i) = \mu_a(C,i) = 1$ und $\mu_g(C,-i) = \mu_a(C,-i) = 1$. Da χ_C außerdem in Linearfaktoren zerfällt, ist C nach Folgerung 13.26 in $M_{2,\mathbb{C}}$ diagonalisierbar.