

Eigenwerte und Eigenvektoren eines Endomorphismus

Definition (13.1)

Sei V ein K -Vektorraum und ϕ ein Endomorphismus von V , also eine lineare Abbildung $V \rightarrow V$. Man nennt

- (i) $\lambda \in K$ einen **Eigenwert** von ϕ , wenn es ein $v \in V$ mit $v \neq 0_V$ und $\phi(v) = \lambda v$ gibt, und
- (ii) $v \in V$ einen **Eigenvektor** von ϕ , wenn $v \neq 0_V$ ist und ein $\lambda \in K$ mit $\phi(v) = \lambda v$ existiert.

Seien nun $v \in V$ und $\lambda \in K$ vorgegeben. Man nennt v einen **Eigenvektor zum Eigenwert λ** , wenn $v \neq 0_V$ und die Gleichung $\phi(v) = \lambda v$ erfüllt ist.

Die Eigenräume eines Endomorphismus

Definition (13.2)

Sei V ein K -Vektorraum und $\phi \in \text{End}_K(V)$. Für jedes $\lambda \in K$ bezeichnet man die Menge $\text{Eig}(\phi, \lambda) = \{v \in V \mid \phi(v) = \lambda v\}$ als den **Eigenraum** von ϕ zum Wert $\lambda \in K$. Er besteht aus dem Nullvektor 0_V und den Eigenvektoren zum Eigenwert λ .

Ähnlichkeit von Matrizen

Definition (13.4)

Zwei Matrizen $A, B \in \mathcal{M}_{n,K}$ werden **ähnlich** genannt, wenn eine invertierbare Matrix $T \in \text{GL}_n(K)$ mit $B = TAT^{-1}$ existiert. Zwei Matrizen $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n, K}$ bezeichnet man als **äquivalent**, wenn Elemente $S \in \text{GL}_m(K)$ und $T \in \text{GL}_n(K)$ mit $B = SAT$ existieren.

Ähnliche Matrizen sind also stets äquivalent zueinander, aber die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch.

Proposition (13.5)

Sei V ein n -dimensionaler K -Vektorraum, und sei $\phi \in \text{End}_K(V)$. Sind $A, B \in \mathcal{M}_{n,K}$ Darstellungsmatrizen von ϕ bezüglich unterschiedlicher Basen von V , dann sind A und B **ähnlich**.

Proposition (13.6)

Sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum, $\phi \in \text{End}_K(V)$ und $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ die Darstellungsmatrix von ϕ bezüglich einer beliebigen Basis $\mathcal{A}$ von V . Genau dann ist $v \in V$ ein Eigenvektor von ϕ zu einem Eigenwert $\lambda \in K$, wenn der Koordinatenvektor $\Phi_{\mathcal{A}}(v)$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist.

Satz (13.7)

Seien $f, g \in K[x]$, wobei g nicht-konstant ist. Dann gibt es $q, r \in K[x]$ mit $f = qg + r$, wobei $r = 0_K$ ist oder zumindest $\text{grad}(r) < \text{grad}(g)$ gilt.

Satz (13.8)

Sei $f \in K[x]$ und $a \in K$. Genau dann gilt $f(a) = 0_K$, wenn $x - a$ ein Linearfaktor von f ist.

Beweis von Satz 13.8

geg. Körper K , $a \in K$, $f \in K[x]$

Beh.: $f(a) = 0_K \iff x-a$ teilt f (d.h. $f = (x-a)g$
für ein $g \in K[x]$)

" $\Leftarrow$ " Vor: $f = (x-a)g$ für ein $g \in K[x]$

$$\Rightarrow f(a) = (a-a)g(a) = 0_K \cdot g(a) = 0_K$$

" $\Rightarrow$ " Division mit Rest $\Rightarrow f, q, r \in K[x]$ mit
" $f = (x-a)q + r$ mit $r = 0_K$ oder $\text{grad}(r) < \text{grad}(x-a)$
Fall $r = 0_K$, sind wir fertig. Ang. $r \neq 0_K$.
 $\text{grad}(r) < 1 \Rightarrow \text{grad}(r) = 0 \Rightarrow r \in K^\times$

$$r = (a-a)q(a) + r = f(a) \Rightarrow f(a) \neq 0_K \quad \nmid \quad \square$$

Vielfachheit von Nullstellen

Definition (13.9)

Sei $f \in K[x]$ mit $f \neq 0_K$ und $a \in K$ eine Nullstelle von f . Das maximale $r \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass $(x - a)^r$ ein Teiler von f ist, wird die **Vielfachheit** $\mu(f, a)$ der Nullstelle a genannt.

Proposition (13.10)

Sei $f \in K[x]$ ein Polynom mit einer Zerlegung $f = (x - a)^r g$, wobei $r \in \mathbb{N}_0$ und $g(a) \neq 0_K$ ist. Dann gilt $r = \mu(f, a)$.

Beweis von Prop. 13.10

Vor: K Körper, $r \in \mathbb{N}$, $f, g \in K[x]$ mit

$$f = (x-a)^r g \text{ und } g(a) \neq 0_K. \text{ Beh. } r = \mu(f, a)$$

Weil $(x-a)^r$ ein Teiler von f ist, gilt $\mu(f, a) \geq r$.

Ang. $\mu(f, a) \geq r+1 \Rightarrow (x-a)^{r+1}$ teilt $f \Rightarrow$

$$\exists h \in K[x] \text{ mit } f = (x-a)^{r+1} h \Rightarrow$$

$$(x-a)^r g = (x-a)^{r+1} h \xRightarrow[\text{durch } (x-a)^r]{\text{Division}} g = (x-a) h$$

$$g(a) = (a-a) h(a) = 0_K \nleftrightarrow \text{zu } g(a) \neq 0_K.$$

□

Definition (13.11)

Für jede Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ nennt man

$$\chi_A = (-1)^n \det(A - xE^{(n)}) = \det(xE^{(n)} - A) \in K[x]$$

das **charakteristische Polynom** von A .

Satz (13.12)

Die Eigenwerte einer Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms χ_A .

$$(x-a) \cdot g = (x-a) \cdot h \Rightarrow \text{durch } (x-a)^{-1} \quad g = (x-a) \cdot h$$

$$g(a) = (a-a) \cdot h(a) = 0 \quad h(a) = \dots$$

Beispiel: Bestimmung des Eigenwerte von

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 10 \\ -20 & -17 & 40 \\ -10 & -10 & 23 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A = \det(xE^{(3)} - A) = \det \begin{pmatrix} x+2 & 5 & -10 \\ 20 & x+17 & -40 \\ 10 & 10 & x-23 \end{pmatrix} =$$

$$(x+2)(x+17)(x-23) + 5 \cdot (-40) \cdot 10 + (-10) \cdot 20 \cdot 10$$

$$- 10 \cdot (x+17) \cdot (-10) - 10 \cdot (-40) \cdot (x+2) - (x-23) \cdot 20 \cdot 5 =$$

$$(x+2)(x^2 - 6x - 391) - 2000 - 2000$$

$$+ 100 \cdot (x+17) + 400 \cdot (x+2) - 100 \cdot (x-23) =$$

$$\cancel{x^3} - \cancel{6x^2} - 391x + \cancel{3x^2} - 12x - 782 - 4000$$

$$+ 400x + 4800 = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$$

Probeweises Einsetzen liefert die Nullstelle
 -2 von $\chi_A \Rightarrow x+2$ ist Teiler von χ_A

$$(x^3 - 4x^2 - 3x + 18) : (x+2) = x^2 - 6x + 9$$

$$\begin{array}{r} -6x^2 - 3x \\ 6x^2 + 12x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9x + 18 \\ -9x - 18 \\ \hline 0 \end{array}$$

p-q-Formel $\Rightarrow 3$ ist
doppelte Nullstelle von
 $x^2 - 6x + 9$

insgesamt:

$$\chi_A = (x+2)(x-3)^2$$

$\Rightarrow -2, 3$ sind Eigenwerte von A

weitere Rechnung ergibt

$$\text{Eig}(A, -2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}, \quad \text{Eig}(A, 3) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

Beweis von Satz 13.12:

geg: Körper K , $n \in \mathbb{N}$, $A \in M_{n,K}$, $\lambda \in K$

Beh. λ ist Eigenwert von $A \iff \chi_A(\lambda) = 0_K$

Nach Def. ist $\chi_A = \det(x \cdot E^{(n)} - A)$. Es gilt also

$$\chi_A(\lambda) = 0_K \iff \det(\lambda E^{(n)} - A) = 0 \quad \underline{\text{§ 12}}$$

$$\text{rg}(\lambda E^{(n)} - A) < n \quad \xrightarrow{\text{§ 10}} \quad n - \dim \ker(\lambda E^{(n)} - A) < n$$

$$\text{rg}(B) + \dim \ker(B) = n \\ \forall B \in M_{n,K}$$

$$\iff \dim \ker(\lambda E^{(n)} - A) > 0 \iff \ker(\lambda E^{(n)} - A) \neq \{0_K^n\}$$

$$\iff \dim \ker(\lambda E^{(n)} - A) > 0 \iff \ker(\lambda E^{(n)} - A) \neq \{0_{K^n}\} \quad \forall B \in M_{n,K}$$

$$\iff \text{Eig}(A, \lambda) \neq \{0_{K^n}\} \stackrel{\text{Def.}}{\iff} \lambda \text{ ist Eigenwert von } A$$

$$\text{Eig}(A, \lambda) = \ker(A - \lambda E^{(n)})$$

$$= \ker(\lambda E^{(n)} - A)$$



Das charakteristische Polynom eines Endomorphismus

Definition (13.13)

Ist V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum, $\phi \in \text{End}_K(V)$ und $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ die Darstellungsmatrix von V bezüglich einer beliebig gewählten Basis, dann bezeichnen wir $\chi_\phi = \chi_A$ als **charakteristisches Polynom** von ϕ .

Proposition (13.14)

Das charakteristische Polynom χ_ϕ ist unabhängig von der gewählten Basis des Vektorraums V .

Folgerung (13.15)

Auch für jeden Endomorphismus $\phi \in \text{End}_K(V)$ eines endlich-dimensionalen K -Vektorraums V gilt: Die Eigenwerte von ϕ sind genau die Nullstellen des Polynoms χ_ϕ .

Beweis von Prop. 13.14

geg: endl-dim. K -Vektorraum V , $\phi \in \text{End}_K(V)$

A, B geordnete Basen von V , $A = M_A(\phi)$, $B = M_B(\phi)$

zu zeigen: $\chi_A = \chi_B$ Transformationsformel $\Rightarrow$

$B = T A T^{-1}$, wobei $T = T_B^A \in GL_n(K)$

$$\begin{aligned} \text{Es gilt } \chi_B &= \det(x E^{(n)} - B) = \det(x E^{(n)} - T A T^{-1}) \\ &= \det(x E^{(n)} T T^{-1} - T A T^{-1}) = \det(T x E^{(n)} T^{-1} - T A T^{-1}) \\ &= \det(T(x E^{(n)} T^{-1} - A) T^{-1}) = \det(T(x E^{(n)} - A) T^{-1}) \\ &= \det(T) \det(x E^{(n)} - A) \det(T^{-1}) \stackrel{(*)}{=} \det(T) \det(T^{-1}) = \det(T T^{-1}) = 1 \end{aligned}$$

$$\det(I) \det(xE^n - A) \det(T^{-1}) = \det(xE^n - A) = \chi_A$$

$$\triangle \det(T) \det(T^{-1}) = \det(TT^{-1}) = \det(I) = 1$$

$$\det(T) \det(xE^n - A) \det(T)^{-1} = \det(xE^n - A) = \chi_A$$



Beispiel für eine Diagonalmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \text{diag}(1, -2, 3, 5)$$

Beweis von Folgerung 13.15:

geg: endl.-dim. K -Vektorraum V , $\phi \in \text{End}_K(V)$

$\lambda \in K$ z.zy: $\chi_\phi(\lambda) = 0 \iff \lambda$ Eigenwert von ϕ

Sei A eine geordnete Basis von V und $A = M_A(\phi)$

" $\Leftarrow$ " λ Eigenwert von $\phi \Rightarrow \exists$ Eigenvektor v
von ϕ zum Eigenwert $\lambda \xrightarrow{\text{Prop B.6}} \Phi_A(v)$ ist Eigen-
vektor von A zum Eigenwert $\lambda \Rightarrow \lambda$ ist Eigenwert
von $A \Rightarrow \chi_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \chi_\phi(\lambda) = 0$ (weil χ_ϕ
und χ_A übereinstimmen)

" $\Rightarrow$ " Vss: $\chi_\phi(\lambda) = \chi_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda$ ist Eigen-
wert von A . Sei $w \in K^n$ ein zugeh. Eigenvektor

$\Phi_A: V \rightarrow K^n$ ist Isom $\Rightarrow \exists v \in V, v \neq 0$

mit $\Phi_A(v) = w$ Prop 13.6 $\Rightarrow v$ ist Eigen-
vektor von ϕ zum Eigenwert $\lambda \Rightarrow \lambda$ ist
Eigenwert von ϕ . □

$\in \text{End}_K(V)$

)

nali-

r

Basiz

Diagonal-

Darstel-

lich

Matrix

Definition (13.16)

Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, dann bezeichnen wir mit $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ die Matrix $D = (d_{ij})$ mit den Einträgen

$$d_{ij} = \begin{cases} \lambda_k & \text{falls } i = j = k \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Eine Matrix dieser Form wird **Diagonalmatrix** genannt. Man bezeichnet eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ als **diagonalisierbar**, wenn sie ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist.

Diagonalisierbarkeit von Endomorphismen

Definition (13.17)

Einen Endomorphismus ϕ eines endlich-dimensionalen K -Vektorraums V heißt **diagonalisierbar**, wenn eine Basis von V existiert, so dass die Darstellungsmatrix von ϕ bezüglich dieser Basis eine Diagonalmatrix ist.

Proposition (13.18)

Sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum, $\phi \in \text{End}_K(V)$ und $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ die Darstellungsmatrix von ϕ bezüglich einer geordneten Basis von V . Genau dann ist A diagonalisierbar, wenn ϕ diagonalisierbar ist.

Lemma (13.19)

Sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum, $\mathcal{A}$ eine geordnete Basis von V und $T \in \text{GL}_n(K)$ eine invertierbare Matrix. Dann gibt es eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V mit $T = \mathcal{T}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$.

Beweis von Prop. 13.19:

geg. endl.-dim. K -Vektorraum V , $\phi \in \text{End}_K(V)$

A geordnete Basis von V , $A = M_A(\phi)$

Beh. A diagonalisierbar $\iff \phi$ diagonalisierbar

" $\Leftarrow$ " ϕ diagonalisierbar $\Rightarrow \exists$ geordnete Basis B von V , so dass $D = M_B(\phi)$ eine Diagonalmatrix ist. Weil A und D beides Darstellungsmatrizen von ϕ sind, sind sie ähnlich $\Rightarrow A$ ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix.

$\Rightarrow$ "A ist diagonalisierbar $\Rightarrow$ A ist ähnlich
zu einer Diagonalmatrix D $\Rightarrow \exists T \in GL_n(K)$
mit $D = TAT^{-1}$ Lemma 13.18 $\Rightarrow$

$\exists$ geordnete Basis B mit $T = J_B^A$

$$\Rightarrow D = J_B^A M_A(\phi) J_A^B = M_B(\phi)$$

$\uparrow$ Transf.-formel

$\Rightarrow \exists$ geordnete Basis B , so dass $M_B(\phi)$
eine Diagonalmatrix ist $\Rightarrow \phi$ ist diagonalisierbar.



Beweis von Lemma 13.18:

geg: endl. dim. K -Vektorraum V , $A = (v_1, \dots, v_n)$ geordnete Basis, $T \in GL_n(K)$ z.zg: $\exists$ geordnete Basis B mit

$$T = J_B^A \quad \text{Sei } C = (c_{ij}) = T^{-1} \in GL_n(K)$$

Es gilt die Äquivalenz (für eine bel. geordnete Basis B):

$$T \stackrel{(*)}{=} J_B^A \iff C \stackrel{(**)}{=} J_A^B \quad \text{Die } j\text{-te Spalte von } C$$

gibt die Darstellung von w_j in A -Koordinaten an, falls

$$B = (w_1, \dots, w_n), \text{ also } w_j \stackrel{(*)}{=} \sum_{k=1}^n c_{kj} v_k \quad \text{für } 1 \leq j \leq n$$

$\leadsto$ Ansatz: Definiere $B = (w_1, \dots, w_n)$ durch $(*)$, wo $(*)$ $(**)$ offensichtlich prüfe, dass eine Basis von V vorliegt. Dann ist $(*)$ erfüllt (siehe Skript) $\square$

(Beweis wird nächstes Mal noch zu Ende geführt.)