

Bem. Es gilt zwar $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ für bel.

Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2,K}$ (K Körper), aber nicht

$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A) \det(D) - \det(B) \det(C)$ für Matrizen

$A, B, C, D \in M_{2,K}$. Gegenbeispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) \det(D) - \det(B) \det(C) =$$

$$1 \cdot 3 - (-2)(-1) = 1 \neq 0 = \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Bem. Aus Prop. 12.27 ergibt sich für Matrizen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

in $GL_2(K)$ die Formel $A^{-1} = (\det A)^{-1} \tilde{A} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Notation zum Laplace'schen Entwicklungssatz II

Mit $A_{ij} \in \mathcal{M}_{n-1,K}$ bezeichnen wir die Matrix, die aus A durch **Streichung der i -ten Zeile und j -ten Spalten** zu Stande kommt, also

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Definition der komplementären Matrix

Definition (12.25)

Sei $A \in \mathcal{M}_{n,K}$. Die Matrix $\tilde{A} \in \mathcal{M}_{n,K}$ mit den Einträgen

$$\tilde{a}_{ij} = \det(A'_{ji}) = (-1)^{i+j} \det(A_{ji})$$

wird die zu A **komplementäre** oder **adjunkte** Matrix genannt.

Proposition (12.27)

Sei $\tilde{A}$ die zu $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ komplementäre Matrix. Dann gilt

$$\tilde{A}A = A\tilde{A} = \det(A)E^{(n)}.$$

Satz (12.28)

Sei $A \in \mathcal{M}_{n,K}$.

(i) Für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$.

(ii) Für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ gilt $\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$.

Wird die Determinante von A mittels (i) berechnet, spricht man von einer **Entwicklung zur i -ten Zeile**. Die Berechnung mittels (ii) bezeichnet man als Entwicklung zur j -ten Spalte.

Beweis von Satz 12.28

zu i) Sei $i \in \{1, \dots, n\}$. Betrachte die Matrix $A \tilde{A} = \det(A) E^{(n)}$ an der Stelle (i, i) . Rechts steht der Eintrag $\det(A) \cdot 1 = \det(A)$. Auf der linken Seite steht $\sum_{j=1}^n a_{ij} \tilde{a}_{ji} = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \det A_{ij}$.
 $\Rightarrow$ erhalte $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$.

zu ii) analog, betrachte $\tilde{A} A = \det(A) E^{(n)}$ an der Stelle (i, i) . □

Satz (12.29)

Sei $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ invertierbar und $b \in K^n$. Für $1 \leq j \leq n$ bezeichnen wir mit $A^{(j)} \in \mathcal{M}_{n,K}$ die Matrix, die dadurch entsteht, dass man in A die j -te Spalte durch b ersetzt. Dann ist der Vektor $v = (v_1, \dots, v_n) \in K^n$ mit den Komponenten

$$v_j = \frac{\det A^{(j)}}{\det A} \quad \text{für } 1 \leq j \leq n$$

die eindeutig bestimmte Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

$$\det A^{(1)} = \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} = 14$$

Beweis von Satz 12.29

Sei $j \in \{1, \dots, n\}$. Entwickle die Determinante von $A^{(j)}$ zur j -ten

$$\begin{aligned} \text{Spalte} &\Rightarrow \det A^{(j)} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} b_i \cdot \det(A^{(j)})_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} b_i \det A_{ij} \\ &\quad \uparrow \text{ nach Def. von } A^{(j)} \end{aligned}$$

Definiere $v \in k^n$ durch $v_j = \frac{\det A^{(j)}}{\det A}$. Betrachte die i -te

Komponente von Av , für $1 \leq i \leq n$. $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \text{erhalte } (Av)_i &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{1}{\det(A)} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} b_k \det A_{kj} \\ &= \frac{1}{\det(A)} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_k (-1)^{k+j} a_{ij} \det A_{kj} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_k a_{ij} \tilde{a}_{jk}$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \sum_{k=1}^n b_k (A \tilde{A})_{ik}$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \sum_{k=1}^n b_k \delta_{ik} \det(A) = b_i$$

$\Rightarrow v$ ist Lösung von $Ax = b$.



Anwendung der Cramerschen Regel

$$3x - 2y + 2z = 1$$

$$-2x + 5y - 6z = 0$$

$$4x + 3y - 2z = 3$$

$$\text{Koeff.-matrix } A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -6 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 28$$

$$\det A^{(1)} = \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} = 14$$

$$\det A^{(2)} = \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -6 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} = 14, \quad \det A^{(3)} = \det \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 7$$

$$\Rightarrow \text{eindeutige Lösung: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \leftarrow \frac{\det A^{(i)}}{\det A}$$

Eigenwerte und Eigenvektoren eines Endomorphismus

Definition (13.1)

Sei V ein K -Vektorraum und ϕ ein Endomorphismus von V , also eine lineare Abbildung $V \rightarrow V$. Man nennt

- (i) $\lambda \in K$ einen **Eigenwert** von ϕ , wenn es ein $v \in V$ mit $v \neq 0_V$ und $\phi(v) = \lambda v$ gibt, und
- (ii) $v \in V$ einen **Eigenvektor** von ϕ , wenn $v \neq 0_V$ ist und ein $\lambda \in K$ mit $\phi(v) = \lambda v$ existiert.

Seien nun $v \in V$ und $\lambda \in K$ vorgegeben. Man nennt v einen **Eigenvektor zum Eigenwert λ** , wenn $v \neq 0_V$ und die Gleichung $\phi(v) = \lambda v$ erfüllt ist.

Beispiele für Eigenvektoren

i) Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ hat e_1, e_2, e_3 als Eigenvektoren, denn $A e_1 = e_1$,

$A e_2 = 2 e_2$, $A e_3 = 3 e_3$. Dagegen ist

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ kein Eigenvektor, denn $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$,

und $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist kein Vielfaches von $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

ii)

$$B = \begin{pmatrix} -2 & -10 & 0 & -40 \\ -24 & -13 & -8 & -68 \\ 15 & 30 & 3 & 120 \\ 6 & 4 & 2 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -10 & 0 & -40 \\ -24 & -13 & -8 & -68 \\ 15 & 30 & 3 & 120 \\ 6 & 4 & 2 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = (-2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ -31 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 0 \\ -96 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad B \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenräume eines Endomorphismus

Definition (13.2)

Sei V ein K -Vektorraum und $\phi \in \text{End}_K(V)$. Für jedes $\lambda \in K$ bezeichnet man die Menge $\text{Eig}(\phi, \lambda) = \{v \in V \mid \phi(v) = \lambda v\}$ als den **Eigenraum** von ϕ zum Wert $\lambda \in K$. Er besteht aus dem Nullvektor 0_V und den Eigenvektoren zum Eigenwert λ .

Die Untervektorraum-Eigenschaft der Eigenräume

Proposition (13.3)

Sei V ein K -Vektorraum und $\phi \in \text{End}_K(V)$. Für jedes $\lambda \in K$ ist der Eigenraum gegeben durch

$$\text{Eig}(\phi, \lambda) = \ker(\phi - \lambda \text{id}_V).$$

Das Element λ ist ein Eigenwert von ϕ genau dann, wenn $\text{Eig}(\phi, \lambda) \neq \{0_V\}$ gilt.

Die Proposition zeigt also, dass $\text{Eig}(\phi, \lambda)$ für jedes $\lambda \in K$ und jedes $\phi \in \text{End}_K(V)$ ein **Untervektorraum** von V ist.

Beweis von Prop. 13.3

geg. K -Vektorraum V , $\phi \in \text{End}_K(V)$, $\lambda \in K$

Beh. (i) $\text{Eig}(\phi, \lambda) = \ker(\phi - \lambda \text{id}_V)$

(ii) λ ist Eigenwert von $\phi \iff \text{Eig}(\phi, \lambda) \neq \{0_V\}$

zu (i) Sei $v \in V$. Dann gilt die Äquivalenz

$$v \in \ker(\phi - \lambda \text{id}_V) \iff (\phi - \lambda \cdot \text{id}_V)(v) = 0_V \iff$$

$$\phi(v) - \lambda \cdot \text{id}_V(v) = 0_V \iff \phi(v) - \lambda v = 0_V$$

$$\iff \phi(v) = \lambda v \iff v \in \text{Eig}(\phi, \lambda)$$

zu (ii) „ $\Rightarrow$ “ λ ist Eigenwert von $\phi \Rightarrow \exists v \in V$ mit
 $v \neq 0_V$ und $\phi(v) = \lambda v$. Dieses v ist ein Element von
 $\text{Eig}(\phi, \lambda) \setminus \{0_V\} \Rightarrow \text{Eig}(\phi, \lambda) \neq \{0_V\}$

„ $\Leftarrow$ “ $\text{Eig}(\phi, \lambda) \neq \{0_V\}, \{0_V\} \subseteq \text{Eig}(\phi, \lambda) \Rightarrow \{0_V\} \subsetneq \text{Eig}(\phi, \lambda)$
 $\Rightarrow \exists v \in \text{Eig}(\phi, \lambda)$ Für dieses v gilt $\phi(v) = \lambda v$ und
 $v \neq 0_V \Rightarrow v$ ist Eigenvektor zum Eigenwert λ . $\square$

Eigenwerte und -vektoren im Matrixkalkül

Sei $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ eine quadratische Matrix.

- Wir bezeichnen $v \in K^n$ als einen **Eigenvektor von A** , wenn v ein Eigenvektor der Abbildung $\phi_A : K^n \rightarrow K^n$, $v \mapsto Av$ ist.
- Die **Eigenwerte von A** nach Definition die Eigenwerte des Endomorphismus ϕ_A .
- Für jedes $\lambda \in K$ definieren wir

$$\text{Eig}(A, \lambda) = \text{Eig}(\phi_A, \lambda) = \{v \in K^n \mid Av = \lambda v\}.$$

Wiederum besteht $\text{Eig}(A, \lambda)$ aus den Eigenvektoren von A zum Eigenwert λ und dem Nullvektor 0_{K^n} , und darüber hinaus gilt

$$\text{Eig}(A, \lambda) = \ker(A - \lambda E^{(n)}).$$

Darstellungsmatrizen von Endomorphismen

Erinnerung: Ist $\mathcal{A}$ eine Basis von V und $\mathcal{B}$ eine Basis von W , dann bezeichnet

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\phi)$$

die Darstellungsmatrix von ϕ bezüglich der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$. Für alle $v \in V$ gilt

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\phi)\Phi_{\mathcal{A}}(v) = \Phi_{\mathcal{B}}(\phi(v)).$$

Ist ϕ nun ein **Endomorphismus** von V , also $V = W$, dann braucht man nur noch **eine** Basis von V , um ϕ zu beschreiben. Wir setzen

$$\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\phi) = \mathcal{M}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\phi)$$

und nennen diese quadratische Matrix die **Darstellungsmatrix** von ϕ bezüglich der Basis $\mathcal{A}$.

Ähnlichkeit von Matrizen

Definition (13.4)

Zwei Matrizen $A, B \in \mathcal{M}_{n,K}$ werden **ähnlich** genannt, wenn eine invertierbare Matrix $T \in \text{GL}_n(K)$ mit $B = TAT^{-1}$ existiert. Zwei Matrizen $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n, K}$ bezeichnet man als **äquivalent**, wenn Elemente $S \in \text{GL}_m(K)$ und $T \in \text{GL}_n(K)$ mit $B = SAT$ existieren.

Ähnliche Matrizen sind also stets äquivalent zueinander, aber die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch.

Proposition (13.5)

Sei V ein n -dimensionaler K -Vektorraum, und sei $\phi \in \text{End}_K(V)$. Sind $A, B \in \mathcal{M}_{n,K}$ Darstellungsmatrizen von ϕ bezüglich unterschiedlicher Basen von V , dann sind A und B **ähnlich**.

Beweis von Prop. 13.5

geg. K -Vektorraum V der Dimension $n \in \mathbb{N}$

$\phi \in \text{End}_K(V)$ Seien A, B geordnete Basen von V
und $A = M_A(\phi)$, $B = M_B(\phi)$.

Beh.: A und B sind ähnlich. Setze $T = T_B^A$.

bekannt: $T \in \text{Gl}_n(K)$, außerdem: Satz vom Basiswechsel

$$\Rightarrow B = M_B^B(\phi) = T_B^A M_A^A(\phi) T_A^B = T A T^{-1}$$

$\Rightarrow A, B$ sind ähnlich □

Bestimmung von Eigenvektoren durch Darstellungsmatrizen

Proposition (13.6)

Sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum, $\phi \in \text{End}_K(V)$ und $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ die Darstellungsmatrix von ϕ bezüglich einer beliebigen Basis $\mathcal{A}$ von V . Genau dann ist $v \in V$ ein Eigenvektor von ϕ zu einem Eigenwert $\lambda \in K$, wenn der Koordinatenvektor $\Phi_{\mathcal{A}}(v)$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist.

zusammen $T \in \text{GL}_n(K)$, außerdem: Satz vom Basiswechsel

$$\Rightarrow B = M_B^B(\phi) = J_B^A M_A^A(\phi) J_A^B = T A T^{-1}$$

Beweis von Prop. 13.6

geg. $n \in \mathbb{N}$, n -dim. K -Vektorraum V , A geordnete Basis
und $v \in V$. Sei $A = M_A^A(\phi)$. Dann gilt $A \Phi_A(v) = \Phi_A(\phi(v))$

Sei $\lambda \in K$. Beh.:

v ist Eigenvektor zum Eigenwert λ $\iff \Phi_A(v)$ ist Eigenvektor von A zum Eigenwert λ

$\Phi_A(v)$ Eigenvektor von A zum Eigenwert λ $\iff \Phi_A(v) \neq 0_K$ und $A \Phi_A(v) = \lambda \Phi_A(v)$ $\iff \Phi_A(v) + \Phi_A(0_V)$ und $\Phi_A(\phi(v)) = \Phi_A(\lambda v)$

$\iff \Phi_A$ bijektiv $v \neq 0_V$ und $\phi(v) = \lambda v$ $\iff v$ ist Eigenvektor zum Eigenwert λ $\square$

Berechnung der Eigenvektoren einer Matrix zu einem Eigenwert λ

$$\text{Es gilt } \boxed{\text{Eig}(A, \lambda) = \ker(A - \lambda E^{(n)})}$$

Beispiel: Berechnung von $\text{Eig}(A, -2)$

$$\text{für die Matrix } A = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 10 \\ -20 & -17 & 40 \\ -10 & -10 & 23 \end{pmatrix}$$

$$\text{Eig}(A, -2) = \ker(A + 2E^{(3)})$$

$$A + 2E^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 10 \\ -20 & -15 & 40 \\ -10 & -10 & 25 \end{pmatrix}$$

$$\text{Eig}(A, -2) = \ker(A + 2E)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -5 & 10 \\ -20 & -15 & 40 \\ -10 & -10 & 25 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -4 & -3 & 8 \\ 1 & 1 & -5/2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5/2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5/2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5/2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

normierte ZSF, Kennzahlen $r=2, j_1=1, j_2=2$

$$S = \{1, 2, 3\} \setminus \{j_1, j_2\} = \{3\}$$

$$\Rightarrow \text{ein Basisvektor: } b_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Ergebnis: } \text{Eig}(A, -2) = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$