Definition der Determinantenfunktionen

Definition (12.2)

Eine Abbildung $d : \mathscr{M}_{n,K} \to K$ bezeichnet man als Determinantenfunktion, wenn sie, aufgefasst als Abbildung auf $(K^n)^n$, multilinear und alternierend ist und außerdem $d(E^{(n)}) = 1$ gilt, wobei $E^{(n)}$ die Einheitsmatrix bezeichnet.

Das Signum einer Permutation

Definition (12.7)

Sei $\sigma \in S_n$ ein beliebiges Element. Eine zweielementige Teilmenge $\{i, j\}$ von M_n wird Fehlstand von σ genannt, wenn $i < j$, aber $\sigma(i) > \sigma(j)$ gilt. Ist $k \in \mathbb{N}_0$ die Anzahl der Fehlstände von σ, dann nennt man $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^k$ das Signum oder Vorzeichen der Permutation.

Berechnung des Signums

Satz (12.12)

(i) Ist τ eine Transposition, dann gilt $\mathrm{sgn}(\tau) = -1$.

(ii) Ist σ als Produkt von r Transpositionen darstellbar, dann gilt $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^r$.

Zur Eindeutigkeit der Determinantenfunktion

Folgerung (12.13)

Sei $d : \mathscr{M}_{n,K} \to K$ eine Determinantenfunktion. Dann gilt

$$d(P_\sigma) \quad = \quad \mathrm{sgn}(\sigma) \qquad \text{für alle} \quad \sigma \in S_n.$$

Folgerung (12.14)

Sei $d : \mathscr{M}_{n,K} \to K$ eine Determinantenfunktion und $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,K}$. Dann gilt

$$d(A) \quad = \quad \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)}.$$

Definition der Determinante

Definition (12.15)

Sei $A = (a_{ij})_{n \in \mathbb{N}} \in \mathscr{M}_{n,K}$. Dann nennen wir

$$\det(A) \quad = \quad \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)}$$

die Determinante der Matrix A.

Man bezeichnet die Summe rechts als Leibniz-Formel für die Determinante. Ein wichtiger Spezial ist die Sarrus-Regel für $n = 3$. Zu beachten: Das Analogon zur Sarrus-Regel für $n = 4$ bestehend aus acht Summanden ist falsch.

Leibniz-Formel für $n = 3$ (Sarrus-Regel)

Es ist $S_3 = \{ \mathrm{id}, (12), (13), (23), \sigma, \tau \}$ mit
$\sigma = (123)$, $\tau = (132) = \sigma^{-1}$.

Sei $A \in M_{3,K}$, $A = (a_{ij})$. Dann gilt

$$\det(A) = \sum_{\rho \in S_3} \mathrm{sgn}(\rho)\, a_{1\rho(1)} a_{2\rho(2)} a_{3\rho(3)} =$$

$$\mathrm{sgn}(\mathrm{id})\, a_{11} a_{12} a_{13} + \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} +$$

$$\mathrm{sgn}(\tau)\, a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} a_{3\tau(3)} + \mathrm{sgn}((12))\, a_{12} a_{21} a_{33}$$

$$+ \mathrm{sgn}((13))\, a_{13} a_{22} a_{31} + \mathrm{sgn}((23))\, a_{11} a_{23} a_{32} =$$

$[\ \mathrm{sgn}(\mathrm{id}) = 1,\ \mathrm{sgn}((12)) = \mathrm{sgn}((13)) = \mathrm{sgn}((23)) = -1$

$[\ \mathrm{sgn}(\mathrm{id}) = 1,\ \mathrm{sgn}((12)) = \mathrm{sgn}((13)) = \mathrm{sgn}((23)) = -1$

$$(123) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (12)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (12)(23) \underset{(\text{gerade})}{\overset{2\ \text{Transp.}}{\Longrightarrow}} \mathrm{sgn}(\sigma) = 1$$

$$(132) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (13)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (13)(23) \Rightarrow \mathrm{sgn}(\tau) = 1\ ]$$

$$\Rightarrow \det(A) = \underline{a_{11}a_{22}a_{33}} + \underline{a_{12}a_{23}a_{31}} + \underline{a_{13}a_{21}a_{32}}$$
$$- \underline{a_{12}a_{21}a_{33}} - \underline{a_{13}a_{22}a_{31}} - \underline{a_{11}a_{23}a_{32}}$$

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 1\cdot 5\cdot 9 + 2\cdot 6\cdot 7 + 3\cdot 4\cdot 8 - 7\cdot 5\cdot 3 - 8\cdot 6\cdot 1$$
$$- 9\cdot 4\cdot 2 = \underbrace{45 + 84 + 96}_{225} \underbrace{-105 - 48 - 72}_{225} = 0$$

Die alternierende Gruppe

Proposition (12.16)

Sei $A_n = \{\sigma \in S_n \mid \mathrm{sgn}(\sigma) = 1\}$ und $\tau \in S_n$ ein beliebiges Element mit $\mathrm{sgn}(\tau) = -1$.

- Dann ist durch $S_n = A_n \cup (A_n \circ \tau)$ mit $A_n \circ \tau = \{\sigma \circ \tau \mid \sigma \in A_n\}$ eine Darstellung von S_n als disjunkte Vereinigung gegeben.
- Zwischen A_n und $A_n \circ \tau$ ist durch $\sigma \mapsto \sigma \circ \tau$ eine Bijektion definiert.

Man nennt A_n die alternierende Gruppe. Aus der Proposition folgt $|A_n| = \frac{1}{2}|S_n| = \frac{1}{2}n!$.

Beweis von Prop. 12.6:

geg.: $n \in \mathbb{N}$, $\tau \in S_n$ mit $\operatorname{sgn}(\tau) = -1$ ($\Rightarrow n \geq 2$)

z. zg.: (i) $S_n = A_n \cup A_n \circ \tau$

(ii) $A_n \cap A_n \circ \tau = \emptyset$

(iii) $\phi : A_n \to A_n \circ \tau,\ \sigma \mapsto \sigma \circ \tau$ ist bijektiv

zu (i) „$\supseteq$" klar nach Def. „$\subseteq$" Sei $\rho \in S_n$.

1. Fall: $\operatorname{sgn}(\rho) = 1 \Rightarrow \rho \in A_n \Rightarrow \rho \in A_n \cup A_n \circ \tau$

2. Fall: $\operatorname{sgn}(\rho) = -1$ Sei $\sigma = \rho \circ \tau^{-1}$. Dann gilt

$\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\rho)\operatorname{sgn}(\tau^{-1}) = \operatorname{sgn}(\rho)\operatorname{sgn}(\tau) = (-1)(-1)$

$= 1 \Rightarrow \sigma \in A_n \Rightarrow \rho = \sigma \circ \tau \in A_n \circ \tau$

$\operatorname{sgn}(\delta) = \operatorname{sgn}(\rho)\operatorname{sgn}(\tau^{-1}) = \operatorname{sgn}(\rho)\operatorname{sgn}(\tau) = (-1)(-1)$
$= 1 \Rightarrow \delta \in A_n \Rightarrow \rho = \delta \circ \tau \in A_n \circ \tau$

$\Rightarrow \rho \in A_n \cup A_n \circ \tau$

<u>zu (ii)</u> Für alle $\rho \in A_n \circ \tau$ gilt $\operatorname{sgn}(\rho) = -1$, denn: $\rho \in A_n \circ \tau$
$\Rightarrow \exists\, \delta \in A_n : \rho = \delta \circ \tau \Rightarrow \operatorname{sgn}(\rho) = \operatorname{sgn}(\delta)\operatorname{sgn}(\tau) =$
$1 \cdot (-1) = -1$

Ang $\delta \in A_n \cap A_n \circ \tau \overset{\text{s.o.}}{\Rightarrow} \operatorname{sgn}(\delta) = 1$ und $\operatorname{sgn}(\delta) = -1$ ↯

<u>zu (iii)</u> Sei $\psi : A_n \circ \tau \to S_n$ geg. durch $\psi(\delta) = \delta \circ \tau$ für
alle $\delta \in A_n \circ \tau$. Für jedes $\delta \in A_n \circ \tau$ gilt: $\exists\, \rho \in A_n$ mit
$\delta = \rho \circ \tau \Rightarrow \psi(\delta) = \psi(\rho \circ \tau) = \rho \circ \tau \circ \tau^{-1} = \rho \in A_n$
$\Rightarrow \psi$ ist Abb. $A_n \circ \tau \to A_n$. $\forall \delta \in A_n : (\psi \circ \phi)(\delta) =$
$\psi(\delta \circ \tau) = \delta \circ \tau \circ \tau^{-1} = \delta \Rightarrow \psi \circ \phi = \mathrm{id}_{A_n}$ zeige genauso:
$\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{A_n \circ \tau} \Rightarrow \psi$ ist Umkehrabb. von ϕ. $\Rightarrow \phi$ ist bijektiv. $\square$

Zur Existenz von Determinantenfunktionen

Satz (12.17)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\det : \mathscr{M}_{n,K} \to K$ eine Determinantenfunktion.

Beweis von Satz 12.17:

ges: $\det : M_{n,K} \to K,\ A = (a_{ij}) \longmapsto$

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{k\sigma(k)}$$ z.zg.:

Die Fkt. det ist (i) multilinear (ii) alternierend (iii) normiert, d.h. $\det(E_n) = 1$

zu (iii) $E_n = (\delta_{ij}) \Longrightarrow$

$$\det(E_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^{n} \delta_{k\sigma(k)}$$

Sei $\sigma \in S_n \setminus \{id\}$ und $i \in M_n$ mit $\sigma(i) \neq i$.

$\Rightarrow \delta_{i\sigma(i)} = 0 \Rightarrow \prod_{k=1}^{n} \delta_{k\sigma(k)} = 0$

$$\Rightarrow \det(E_n) = \operatorname{sgn}(\mathrm{id}) \prod_{k=1}^{n} \delta_{kk} = 1$$

zu (i) Seien $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ in $M_{n,K}$ vorgeg., außerdem $i \in M_n$, $\lambda \in K$. Setze voraus, dass B aus A dadurch entsteht, dass die i-te Zeile von A mit λ multipliziert wird.

zu überprüfen: $\det(B) = \lambda \cdot \det(A)$

$$\det(B) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^{n} b_{k\sigma(k)} =$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, b_{i\sigma(i)} \prod_{k \neq i} b_{k\sigma(k)} \underset{\text{Def. von } A,\, B}{=}$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) (\lambda a_{i\sigma(i)}) \prod_{k \neq i} a_{k\sigma(k)}$$

λ

Sei

M_n

$A,$

i-te

a_i

$+ d$

det(

k

ze

t, dass

wird.

vn A, B

$$\lambda \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{i,\sigma(i)} \prod_{k \neq i} a_{k,\sigma(k)} =$$

$$\lambda \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{k,\sigma(k)} = \lambda \det(A)$$

Seien $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ in $M_{n,K}$ vorgeg. Es sei $i \in M_n$, so dass A, B, C in allen Zeilen mit Ausnahme der i-ten übereinstimmen und außerdem $a_{i\circ} = b_{i\circ} + c_{i\circ}$ z.zg: $\det(A) = \det(B) + \det(C)$

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{k\sigma(k)} =$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{i\sigma(i)} \prod_{k \neq i} a_{k\sigma(k)} =$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \left(b_{i\sigma(i)} + c_{i\sigma(i)} \right) \prod_{k \neq i} a_{k\sigma(k)} =$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, b_{i\sigma(i)} \prod_{k \neq i} b_{k\sigma(k)} +$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, c_{i\sigma(i)} \prod_{k \neq i} c_{k\sigma(k)} =$$

$$\det(B) + \det(C)$$

zu (ii) Sei $A = (a_{ij}) \in M_{n,K}$ und $k, l \in M_n$ mit $k < l$ und $a_{k\bullet} = a_{l\bullet}$ z.zg. $\det(A) = 0$

Prop. 12.16 $\Rightarrow$ $\exists$ disjunkte Zerlegung $S_n = A_n \cup A_n \circ (k\,l)$

$$\Rightarrow \det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{k\sigma(k)} =$$

$$\sum_{\sigma \in A_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} + \sum_{\sigma \in A_n \circ (k\,l)} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} =$$

$$\sum_{\sigma \in A_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} - \sum_{\sigma \in A_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i(\sigma \circ (k\,l))(i)}$$

Sei $\sigma \in A_n$. Wenn wir zeigen können, dass die Produkte

$\sigma \in A_n \quad i=1 \qquad\qquad \sigma \in A_n \quad i=1$

Sei $\sigma \in A_n$. Wenn wir zeigen können, dass die Produkte

$$\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} = \prod_{i=1}^{n} a_{i(\sigma\circ(kl))(i)}$$

gilt, dann folgt $\det(A) = 0$.

$$\prod_{i=1}^{n} a_{i(\sigma\circ(kl))(i)} = a_{k(\sigma\circ(kl))(k)}\, a_{l(\sigma\circ(kl))(l)} \prod_{i\neq k,l} a_{i(\sigma\circ(kl))(i)}$$

$$a_{k\sigma(l)}\, a_{l\sigma(k)} \prod_{i\neq k,l} a_{i\sigma(i)} \underset{a_{k\cdot}=a_{l\cdot}}{=} a_{l\sigma(l)}\, a_{k\sigma(k)} \prod_{i\neq k,l} a_{i\sigma(i)}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

$\square$

Rechenregeln für Determinanten

Satz (12.18)

Man bezeichnet eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,K}$ als obere Dreiecksmatrix, wenn $a_{ij} = 0$ für alle $i, j \in \{1, ..., n\}$ mit $i > j$ erfüllt ist. Für jede Matrix dieser Form gilt

$$\det(A) \quad = \quad a_{11} \cdot a_{22} \cdot ... \cdot a_{nn}.$$

Satz (12.19)

Für alle $A \in \mathscr{M}_{n,K}$ gilt $\det(A) = \det({}^{\mathrm{t}}A)$.

Lemma (12.20)

Ist $T, A \in \mathscr{M}_{n,K}$ und T eine Elementarmatrix, dann gilt

$$\det(TA) \quad = \quad \det(T)\det(A).$$

Beweis von Satz 12.18:

Zeige zunächst: Ist $\sigma \in S_n \setminus \{id\}$, dann gibt es ein $k \in M_n$ mit $\sigma(k) < k$.

Ang.: $\sigma \neq id$ und $\sigma(k) \geq k \ \forall k \in M_n$. Sei $k \in M_n$ maximal mit $\sigma(k) > k$. $\Rightarrow \sigma(\sigma(k)) = \sigma(k)$ ↯ zur Injektivität von σ.

Für jedes $\sigma \in S_n \setminus \{id\}$ existiert also ein k mit $\sigma(k) < k$, und weil A obere Dreiecksmatrix ist, folgt $a_{k\sigma(k)} = 0$ und $\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} = 0$.

$i>1$

$$\Rightarrow \det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{k\sigma(k)} = \operatorname{sgn}(id) \prod_{k=1}^{n} a_{k\, id(k)}$$

$$= a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

$\square$

Verfahren zur Determinantenberechnung

Sei $A \in \mathscr{M}_{n,K}$ vorgegeben.

(1) Forme A mit Hilfe des Gaußverfahrens in eine Matrix B in Zeilenstufenform um.

(2) Bestimme anhand der durchgeführten Zeilenumformungen den Faktor $\mu \in K^\times$ mit $\det(B) = \mu \det(A)$.

(3) Berechne $\det(B)$ durch Multiplikation der Diagonalelemente $b_{11},...,b_{nn}$ von B.

Das Endergebnis der Rechnung ist dann $\det(A) = \mu^{-1} \det(B)$.

Beispiel für eine Determinantenberechnung mit dem Gaußverfahren:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & 3 & 6 & 16 \end{pmatrix} \xmapsto{(-\frac{1}{2})}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 12 \end{pmatrix} \xmapsto{(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -9 & -20 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{pmatrix} = B$$

$$\det(B) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 13 = 13$$

Auf Grund der Zeilenumformungen gilt

$\det(B) = \mu \det(A)$, wobei $\mu = (-\frac{1}{2})(-1)(-1)$

$= -\frac{1}{2} \Rightarrow \det(A) = (-2) \det(B) = -26$