

Definition der Determinantenfunktionen

Wir identifizieren jede Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ mit dem Tupel ihrer Zeilenvektoren

$$(a_{1\bullet}, a_{2\bullet}, \dots, a_{n\bullet}).$$

Für $1 \leq k \leq n$ gilt $a_{k\bullet} \in K^n$. Der K -Vektorraum $\mathcal{M}_{n,K}$ kann also mit dem $(K^n)^n$ gleichgesetzt werden.

Definition (12.2)

Eine Abbildung $d : \mathcal{M}_{n,K} \rightarrow K$ bezeichnet man als **Determinantenfunktion**, wenn sie, aufgefasst als Abbildung auf $(K^n)^n$, **multilinear** und **alternierend** ist und außerdem $d(E^{(n)}) = 1$ gilt, wobei $E^{(n)}$ die **Einheitsmatrix** bezeichnet.

Definition der symmetrischen Gruppen

Proposition (12.3)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $M_n = \{1, \dots, n\}$ die Menge der Zahlen von 1 bis n . Dann bilden die bijektiven Abbildungen $\sigma : M_n \rightarrow M_n$ mit der Komposition von Abbildungen als Verknüpfung eine Gruppe. Wir nennen sie die symmetrische Gruppe in n Elementen und bezeichnen sie mit S_n .

Proposition (12.4)

Sei $d : \mathcal{M}_{n,K} \rightarrow K$ eine Determinantenfunktion und $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,K}$. Dann gilt

$$d(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} d(P_\sigma).$$

Dabei bezeichnet man für $\sigma \in S_n$ jeweils die Matrix

$$P_\sigma = (e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \dots, e_{\sigma(n)})$$

als **Permutationsmatrix** zum Element σ .

Lemma (12.5)

Sei $d : \mathcal{M}_{n,K} \rightarrow K$ eine Determinantenfunktion, und seien $A, B \in \mathcal{M}_{n,K}$. Entsteht B aus A durch Vertauschung zweier Zeilen, dann gilt $d(B) = -d(A)$.

Das Signum einer Permutation

Proposition (12.6)

Jedes Element aus S_n ist darstellbar als Produkt von Transpositionen.

Definition (12.7)

Sei $\sigma \in S_n$ ein beliebiges Element. Eine zweielementige Teilmenge $\{i, j\}$ von M_n wird **Fehlstand** von σ genannt, wenn $i < j$, aber $\sigma(i) > \sigma(j)$ gilt. Ist $k \in \mathbb{N}_0$ die Anzahl der Fehlstände von σ , dann nennt man $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^k$ das **Signum** oder **Vorzeichen** der Permutation.

Beispiel zu Prop. 12.6 :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 7 & 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} = (15) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 5 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$(15) \circ (24) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 7 & 5 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$(15) \circ (24) \circ (37) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$(15) \circ (24) \circ (37) \circ (45) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= (15) \circ (24) \circ (37) \circ (45) \circ (67)$$

$$(15) \circ (24) \circ (37) \circ (45) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Beispiel: Bestimmung des Signums von $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in S_4$

Paar	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,3)	(2,4)	(3,4)
Fehlstand	ja*	** nein	ja	nein	ja	ja

(*) da $\sigma(1) = 3 > 2 = \sigma(2)$

(**) da $\sigma(1) = 3 < 4 = \sigma(3)$

Anzahl der Fehlstände: 4 $\Rightarrow \text{sgn}(\sigma) = (-1)^4 = 1$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (13) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (13) \circ (34)$$

Eine Produktformel für das Signum

Lemma (12.8)

Für jede Transposition τ gibt es ein Element $\sigma \in S_n$ mit $\tau = \sigma \circ (1 \ 2) \circ \sigma^{-1}$.

Lemma (12.9)

Für jedes $\sigma \in S_n$ gilt die **Produktformel** $\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{i < j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$.

Beweis von Lemma 12.8:

geg: $n \in \mathbb{N}$, Transposition $\tau = (k \ l)$ (wobei $1 \leq k < l \leq n$)

Sei $\sigma \in S_n$ ein beliebiges Element mit $\sigma(1) = k$
und $\sigma(2) = l$. Beh.: $\tau = \sigma \circ (1 \ 2) \circ \sigma^{-1}$

Sei $x \in M_n$. z.zg.: $(\sigma \circ (1 \ 2) \circ \sigma^{-1})(x) = \tau(x)$

1. Fall: $x = k$ $(\sigma \circ (1 \ 2) \circ \sigma^{-1})(k) = (\sigma \circ (1 \ 2))(1)$
 $= \sigma(2) = l = \tau(k)$

2. Fall: $x = l$ $(\sigma \circ (1 \ 2) \circ \sigma^{-1})(l) = (\sigma \circ (1 \ 2))(2) =$
 $= \sigma(1) = k = \tau(l)$

3. Fall: $x \notin \{k, l\}$ Beh: Dann gilt $\sigma^{-1}(x) \notin \{1, 2\}$.

Ang. $\sigma^{-1}(x) = 1 \Rightarrow \sigma(1) = x \nmid$ zu $\sigma(1) = k$

Ang. $\sigma^{-1}(x) = 2 \Rightarrow \sigma(2) = x \nmid$ zu $\sigma(2) = l$

$$\text{also: } (\sigma \circ (12) \circ \sigma^{-1})(x) = (\sigma \circ (12))(\sigma^{-1}(x)) \stackrel{\sigma^{-1}(x) \notin \{1, 2\}}{=} \sigma(\sigma^{-1}(x)) \\ = x = \tau(x) \quad \square$$

Beweis von Lemma 12.9 :

Sei $\sigma \in S_n$ und $m \in \mathbb{N}_0$ die Anzahl der Fehlstände von σ . ($\rightarrow \operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^m$)

Es gilt

$$\begin{aligned} \prod_{i < j} (\sigma(j) - \sigma(i)) &= \prod_{\substack{i < j \\ \sigma(i) < \sigma(j)}} (\sigma(j) - \sigma(i)) \prod_{\substack{i < j \\ \sigma(i) > \sigma(j)}} (\sigma(j) - \sigma(i)) \\ &= \prod_{\substack{i < j \\ \sigma(i) < \sigma(j)}} (\sigma(j) - \sigma(i)) \cdot (-1)^m \prod_{i < j} |\sigma(j) - \sigma(i)| \\ &= (-1)^m \prod_{i < j} |\sigma(j) - \sigma(i)| \end{aligned}$$

Sei J die Menge der zweielementigen Teilmengen von $M_n = \{1, \dots, n\}$. Für jedes $S \in J$ setze $r_S = |j-i|$ falls $S = \{i, j\}$. außerdem:
 Setze $\sigma(S) = \{\sigma(i), \sigma(j)\}$. Dann ergibt unsere
 Rechnung $\prod_{i < j} (\sigma(j) - \sigma(i)) = (-1)^m \prod_{S \in J} r_{\sigma(S)}$

Mit S durchläuft auch $\sigma(S)$ die gesamte Menge $J \Rightarrow$

$$\prod_{i < j} (\sigma(j) - \sigma(i)) = (-1)^m \prod_{S \in J} r_S$$

$$= (-1)^m \prod_{i < j} |j-i| = (-1)^m \prod_{i < j} (j-i) \Rightarrow$$

$$\prod_{i < j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j-i} = (-1)^m = \text{sgn}(\sigma) \quad \square$$

Multiplikativität des Signums

Proposition (12.10)

Für beliebige Elemente $\sigma, \tau \in S_n$ gilt $\operatorname{sgn}(\tau \circ \sigma) = \operatorname{sgn}(\tau)\operatorname{sgn}(\sigma)$.

Folgerung (12.11)

Für jede Permutation $\sigma \in S_n$ gilt $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma^{-1})$.

Beweis von Prop. 12.10 :

geg: $\sigma, \tau \in S_n$ z.z: $\text{sgn}(\tau \circ \sigma) = \text{sgn}(\tau) \text{sgn}(\sigma)$

$$\text{sgn}(\tau \circ \sigma) = \prod_{i < j} \frac{(\tau \circ \sigma)(j) - (\tau \circ \sigma)(i)}{j - i} =$$

$$\prod_{i < j} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)} \cdot \prod_{i < j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} =$$

$$\underbrace{\prod_{i < j} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)}}_{(*)} \cdot \text{sgn}(\sigma) \quad \text{noch zu zeigen:}$$

$$(*) = \text{sgn}(\tau)$$

$$\prod_{i < j} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)} = \prod_{\substack{i < j \\ \sigma(i) < \sigma(j)}} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)} \cdot \prod_{\substack{i < j \\ \sigma(i) > \sigma(j)}} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)}$$

$$= \prod_{\substack{i < j \\ \sigma(i) < \sigma(j)}} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)} \prod_{\substack{j < i \\ \sigma(j) > \sigma(i)}} \frac{\tau(\sigma(i)) - \tau(\sigma(j))}{\sigma(i) - \sigma(j)} \quad \begin{array}{l} \text{(Bezeichnungen} \\ \text{von } i \text{ und } j \\ \text{vertauscht)} \end{array}$$

$$= \prod_{\substack{i < j \\ \sigma(i) < \sigma(j)}} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)} \prod_{\substack{j < i \\ \sigma(i) < \sigma(j)}} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)}$$

$$= \prod_{\sigma(i) < \sigma(j)} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)} = \prod_{i < j} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j - i} = \operatorname{sgn}(\tau)$$

Die Umformung an der Stelle (!) ist erlaubt,
weil über dieselbe Menge von Paaren natürlicher
Zahlen multipliziert wird. dafür zu
überprüfen:

$$\{(i, j) \mid i, j \in M_n, i < j\} = \{(\sigma(k), \sigma(l)) \mid k, l \in M_n \\ \text{und } \sigma(k) < \sigma(l)\}$$

" $\supseteq$ " Sind $k, l \in M_n$ mit $\sigma(k) < \sigma(l)$ geg.,
dann setze $i = \sigma(k)$, $j = \sigma(l) \Rightarrow (i, j)$ liegt
in der Menge links.

" $\subseteq$ " Sind $i, j \in M_n$ mit $i < j$ geg. dann
setze $k = \sigma^{-1}(i)$, $l = \sigma^{-1}(j) \Rightarrow \sigma(k) < \sigma(l)$
 $\Rightarrow (i, j) = (\sigma(k), \sigma(l))$ liegt in der Menge rechts. $\square$

Beweis von Folgerung 12.11:

geg $\sigma \in S_n$ (12.10) $\Rightarrow \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) =$
 $\operatorname{sgn}(\sigma \cdot \sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\operatorname{id})$ Da id keine Fehlstände
hat, gilt $\operatorname{sgn}(\operatorname{id}) = (-1)^0 = 1 \Rightarrow \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma^{-1})$
 $= 1 \Rightarrow$
 $\operatorname{sgn}(\sigma), \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) \in \{ \pm 1 \} \quad \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma). \quad \square$

Satz (12.12)

- (i) Ist τ eine Transposition, dann gilt $\operatorname{sgn}(\tau) = -1$.
- (ii) Ist σ als Produkt von r Transpositionen darstellbar, dann gilt $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^r$.

Beweis von Satz 12.12

zu ii) Die Transposition (12) besitzt genau einen
Fehlstand, nämlich $11,27 \rightarrow \operatorname{sgn}((12)) = (-1)^1 = -1$.

Sei nun τ eine beliebige Transposition. (128)

$$\Rightarrow \exists \sigma \in S_n \text{ mit } \tau = \sigma \circ (12) \circ \sigma^{-1} \Rightarrow$$

$$\text{Prop. 12.10} \Rightarrow \operatorname{sgn}(\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot (-1) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma^{-1})$$

$$= \operatorname{sgn}(\sigma)^2 \cdot (-1) = -1$$

zu iii) folgt mit Prop. 12.10 durch vollst. Induktion
über r □

Zur Eindeutigkeit der Determinantenfunktion

Folgerung (12.13)

Sei $d : \mathcal{M}_{n,K} \rightarrow K$ eine Determinantenfunktion. Dann gilt

$$d(P_\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma) \quad \text{für alle } \sigma \in S_n.$$

Folgerung (12.14)

Sei $d : \mathcal{M}_{n,K} \rightarrow K$ eine Determinantenfunktion und $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,K}$. Dann gilt

$$d(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Beweis von Folgerung 12.13

Sei $\sigma \in S_n$. z.zg. $d(P_\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma)$

Bereits bekannt: σ ist als Produkt von r Transpositionen darstellbar, mit $r \in \mathbb{N}_0$. Beweise die Aussage durch Vollst.

Induktion über r .

Ind.-Anf. Dann ist $\sigma = \operatorname{id} \Rightarrow P_\sigma = E_n \Rightarrow d(P_\sigma) = d(E_n) = 1$ (nach Def von d).

Ind.-schritt $r \mapsto r+1$: Sei σ ein Produkt von $r+1$ Transpositionen. Schreibe $\sigma = \tilde{\sigma} \circ \tau$, wobei $\tau = (kl)$ Transposition, $\tilde{\sigma}$ Produkt von r Transpositionen.

positionen. Schreibe $\sigma = \tilde{\sigma} \circ \tau$, wobei $\tau = (kl)$ Transposition. $\tilde{\sigma}$ Produkt von r Transpositionen

$$\text{Ind - V.} \Rightarrow d(P_{\tilde{\sigma}}) = \text{sgn}(\tilde{\sigma}) = (-1)^r$$

$$\text{Zeilen von } P_{\tilde{\sigma}} : e_{\tilde{\sigma}(1)}, \dots, e_{\tilde{\sigma}(n)}$$

$$\text{Zeilen von } P_{\sigma} : e_{\tilde{\sigma}(\tau(1))}, \dots, e_{\tilde{\sigma}(\tau(n))}$$

Die Matrix P_{σ} entsteht also durch Vertauschung der k -ten und der l -ten Zeile von $P_{\tilde{\sigma}}$. Lemma 12.5 $\Rightarrow$
 $d(P_{\sigma}) = -d(P_{\tilde{\sigma}}) = -(-1)^r = (-1)^{r+1} = \text{sgn}(\sigma)$ $\square$

Definition (12.15)

Sei $A = (a_{ij})_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}_{n,K}$. Dann nennen wir

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

die **Determinante** der Matrix A .

Man bezeichnet die Summe rechts als **Leibniz-Formel** für die Determinante. Ein wichtiger Spezial ist die **Sarrus-Regel** für $n = 3$. Zu beachten: Das Analogon zur Sarrus-Regel für $n = 4$ bestehend aus acht Summanden ist **falsch**.

Beispiel: Determinante einer 2×2 -Matrix:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \sum_{\sigma \in S_2} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)}$$

$$= \operatorname{sgn}(\operatorname{id}) a_{1\operatorname{id}(1)} a_{2\operatorname{id}(2)} + \operatorname{sgn}((12)) a_{12} a_{21}$$

$$= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

