§ 12. Determinanten

Geometrischer Zugang zur Determinante

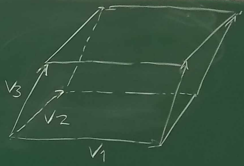
Gesucht wird eine Abbildung $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bzw. $d : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) Für bel. $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ soll $|d(v_1, v_2)|$ der Flächeninhalt des von v_1 und v_2 aufgespannten Parallelogramms sein.

Für $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ soll $|d(v_1, v_2, v_3)|$ das Volumen des von v_1, v_2, v_3 aufgespannten Parallelotops sein.

(2) $d(v_1, v_2)$ bzw. $d(v_1, v_2, v_3)$ soll genau dann positiv sein,

wenn das System (v_1, v_2) bzw. (v_1, v_2, v_3) linear unabh. und rechtshändig ist (negativ, falls das System lin. unabh. und linkshändig ist)



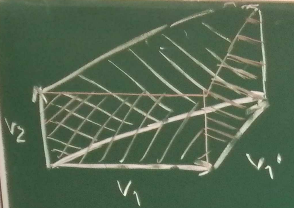
Rechtshändigkeit im 2-Dimensionalen: Zwischen v_1 und v_2 existiert ein gerichteter Winkel α mit $0 < \alpha < \pi$.

Rechtshändigkeit im 3-Dim.: Die Finger der rechten Hand, genauer Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger können in Richtung der Vektoren v_1, v_2, v_3 zeigen.

Beobachtungen:

- Multipliziert man einen der Vektoren mit einem Wert $\lambda \in \mathbb{R}^+$, dann verändert sich der Wert von d (der Flächeninhalt bzw. das Volumen) mit dem Wert λ.
- Es gilt $d(v_1 + v_1', v_2) = d(v_1, v_2) + d(v_1', v_2)$ und $d(v_1, v_2 + v_2') = d(v_1, v_2) + d(v_1, v_2')$ für $v_1, v_2, v_1', v_2' \in \mathbb{R}^2$. Entsprechendes gilt auch im 3-Dimensionalen.

Korrektur: ersetze „mit dem Wert λ“ durch „um den Faktor λ“



$= d(v_1+v_1', v_2)$

$= d(v_1, v_2)$

$= d(v_1', v_2)$

Es gilt $d(v_1+v_1', v_2) = d(v_1, v_2) + d(v_1', v_2)$

Diese beiden Eigenschaften werden als <u>Multilinearität</u> von d bezeichnet.

- Vertauscht man v_1, v_2, dann wechselt d das Vorzeichen. Dasselbe gilt, wenn man zwei der drei Vektoren v_1, v_2, v_3 vertauscht.
  „alternierend"
- Das Einheitsquadrat hat Flächeninhalt 1, d.h. $d(e_1, e_2) = 1$ („normiert")

Multilineare und alternierende Abbildungen

Definition (12.1)

Sei $n \in \mathbb{N}$, seien V, W zwei K-Vektorräume, und sei $\phi : V^n \to W$ eine Abbildung. Für jedes $k \in \{1, ..., n\}$ und jedes Tupel

$$\mathrm{v} = (v_1, ..., v_{k-1}, v_{k+1}, ..., v_n) \in V^{n-1}$$

von Vektoren aus V können wir eine Abbildung $\phi_{\mathrm{v}}^{(k)} : V \to W$ definieren durch

$$\phi_{\mathrm{v}}^{(k)}(v) \quad = \quad \phi(v_1, ..., v_{k-1}, v, v_{k+1}, ..., v_n).$$

Man bezeichnet ϕ als multilinear, wenn $\phi_{\mathrm{v}}^{(k)}$ für jedes $k \in \{1, ..., n\}$ und jedes $\mathrm{v} \in V^{n-1}$ linear ist. Ferner bezeichnet man sie als alternierend, wenn $\phi(v_1, ..., v_n) = 0_W$ gilt, sobald zwei der Vektoren $v_1, ..., v_n$ übereinstimmen.

Im weiteren Verlauf identifizieren wir jede $A \in \mathscr{M}_{n,K}$ mit dem Tupel ihrer Zeilenvektoren

$$(a_{1\bullet}, a_{2\bullet}, ..., a_{n\bullet}).$$

Für $1 \leq k \leq n$ gilt $a_{k\bullet} \in K^n$. Der K-Vektorraum $\mathscr{M}_{n,K}$ kann also mit dem $(K^n)^n$ gleichgesetzt werden.

Definition (12.2)

Eine Abbildung $d : \mathscr{M}_{n,K} \to K$ bezeichnet man als Determinantenfunktion, wenn sie, aufgefasst als Abbildung auf $(K^n)^n$, multilinear und alternierend ist und außerdem $d(E^{(n)}) = 1$ gilt, wobei $E^{(n)}$ die Einheitsmatrix bezeichnet.

Definition der symmetrischen Gruppen

Proposition (12.3)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $M_n = \{1, ..., n\}$ die Menge der Zahlen von 1 bis n. Dann bilden die bijektiven Abbildungen $\sigma : M_n \to M_n$ mit der Komposition von Abbildungen als Verknüpfung eine Gruppe. Wir nennen sie die symmetrische Gruppe in n Elementen und bezeichnen sie mit S_n.

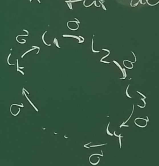
Die Elemente der symmetrischen Gruppe S_n können auf zwei verschiedene Arten dargestellt werden:

(1) als Tabelle: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ steht für die Abbildung $M_n \to M_n$, $k \mapsto i_k$. (Damit dies eine bijektive Abb., also tatsächlich ein Element aus S_n ist, muss $M_n = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ gelten.

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in S_4$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \notin S_4$

(2) als Komposition von Zykeln: Sei $k \in \{2, \dots, n\}$.

Ein k-Zykel in S_n ist eine Abb. $\sigma : M_n \to M_n$, für die $i_1, \dots, i_k \in M_n$ existieren, so dass $\sigma(i_j) = i_{j+1}$ für $1 \le j < k$ und $\sigma(i_k) = i_1$ gilt, und $\sigma(x) = x$ für alle x aus $M_n \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$.



Schreibweise für einen k-Zykel:

$(i_1\ i_2\ \dots\ i_k)$

Beispiel: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 4\ 2)$

umgekehrt: $(1\ 3\ 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

wichtiger Spezialfall: 2-Zykel = „Transpositionen"

$$(i\ j)(x) = \begin{cases} j & x = i \\ i & x = j \\ x & \text{sonst} \end{cases}$$ falls $\{i, j\} \subseteq M_n$ zweielementig

Für $n \geq 3$ ist S_n eine nicht-kommutative Gruppe. Betrachte z.B. $\sigma, \tau \in S_3$ geg. durch $\sigma = (1\ 2)$, $\tau = (1\ 3)$. Dann gilt

$$\sigma \circ \tau = (1\ 2) \circ (1\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 2) \qquad 1 \overset{\tau}{\mapsto} 3 \overset{\sigma}{\mapsto} 3$$

$$\tau \circ \sigma = (1\,3) \circ (1\,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\,2\,3)$$

$$(\sigma \circ \tau)(1) = 3 \neq 2 = (\tau \circ \sigma)(1) \Rightarrow \sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$$

Werte einer Determinantenfunktion als Summe

Proposition (12.4)

Sei $d : \mathscr{M}_{n,K} \to K$ eine Determinantenfunktion und $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,K}$. Dann gilt

$$d(A) \quad = \quad \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)} d(P_\sigma).$$

Dabei bezeichnet man für $\sigma \in S_n$ jeweils die Matrix

$$P_\sigma \quad = \quad (e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \ldots, e_{\sigma(n)})$$

als Permutationsmatrix zum Element σ.

Beispiele für die Eigenschaft „multilinear"

geg: $d : M_{3,\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}$

$$d\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix} = 2 \cdot d\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix}$$

$$= 4 \cdot d\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix} = 8 \cdot d\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$= 16 \cdot d\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5/2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} 16 & 32 & 48 \\ 2 & 5/2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \ldots$$

$$d\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&5&-3\\7&8&9\end{pmatrix} = d\begin{pmatrix}1&2&3\\3&10&3\\7&8&9\end{pmatrix}$$

__Frage:__ Welche Möglichkeiten gibt es für eine Determinantenfunktion $d: M_{n,K} \to K$, d.h. für eine Abbildung, die multilinear, alternierend und normiert ist?

__werden sehen:__ genau eine!

Sei $A \in M_{n,K}$, $A = (a_{1\bullet}, a_{2\bullet}, \dots, a_{n\bullet})$

Für $1 \le k \le n$ gilt jeweils $a_{k\bullet} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} e_i$

$$\Rightarrow d(A) = d(a_{1\bullet}, \dots, a_{n\bullet}) = d\left(\sum_{i_1=1}^{n} a_{1i_1} e_{i_1}, a_{2\bullet}, \dots\right)$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n} a_{1i_1} d(e_{i_1}, a_{2\bullet}, \dots, a_{n\bullet})$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n} a_{1i_1} \cdot d\left(e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} a_{2i_2} e_{i_2}, a_{3\bullet}, \dots, a_{n\bullet}\right)$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} a_{1i_1} a_{2i_2} d(e_{i_1}, e_{i_2}, a_{3\bullet}, \dots, a_{n\bullet}) =$$

$$\dots = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \dots \sum_{i_n=1}^{n} a_{1i_1} \cdot \dots \cdot a_{ni_n} d(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$$

Betrachte $k \mapsto i_k$ $(1 \le k \le n)$ jeweils als Abb. $M_n \to M_n$, wobei $M_n = \{1, \dots, n\}$. Dann können wir auch schreiben

$$d(A) = \sum_{\sigma \in Abb(M_n, M_n)} \prod_{k=1}^{n} a_{k\sigma(k)} \, d(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$$

Ist ein $\sigma \in Abb(M_n, M_n)$ nicht injektiv, dann stimmen zwei der Vektoren $e_{\sigma(i)}, e_{\sigma(j)}$ $(i<j)$ überein, und weil d alternierend ist, folgt $d(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = 0$. $\Rightarrow$ Nur die injektiven σ bleiben erhalten. Die injektiven Abb. $M_n \to M_n$ sind genau die bijektiven. $\to$ Es genügt, über die Menge $Per(M_n)$ der bijektiven Abb. $M_n \to M_n$ zu summieren, d. h.

$$d(A) = \sum_{\sigma \in Per(M_n)} \prod_{k=1}^{n} a_{k\sigma(k)} \, \underbrace{d(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})}_{\text{„Permutationsmatrix"}},$$

Vorzeichenwechsel bei Zeilenvertauschung

Lemma (12.5)

Sei $d : \mathscr{M}_{n,K} \to K$ eine Determinantenfunktion, und seien $A, B \in \mathscr{M}_{n,K}$. Entsteht B aus A durch Vertauschung zweier Zeilen, dann gilt $d(B) = -d(A)$.

Beweis von Lemma 12.5

Seien $A, B \in M_{n,K}$, wobei B aus A durch Vertauschung der k-ten und der l-ten Zeile entsteht, wobei $1 \leq k < l \leq n$ ist. Dann gilt

$$d(A) + d(B) = d(\ldots, a_{k\bullet}, \ldots, a_{l\bullet}, \ldots) + d(\ldots, a_{l\bullet}, \ldots, a_{k\bullet}, \ldots)$$

$$\overset{d \text{ alternierend}}{=} d(\ldots, a_{k\bullet}, \ldots, a_{k\bullet}, \ldots) + d(\ldots, a_{k\bullet}, \ldots, a_{l\bullet}, \ldots)$$

$$+ d(\ldots, a_{l\bullet}, \ldots, a_{k\bullet}, \ldots) + d(\ldots, a_{l\bullet}, \ldots, a_{l\bullet}, \ldots)$$

$$\overset{d \text{ multilinear}}{=} d(\ldots, a_{k\bullet}, \ldots, a_{k\bullet} + a_{l\bullet}, \ldots) + d(\ldots, a_{l\bullet}, \ldots, a_{k\bullet} + a_{l\bullet}, \ldots)$$

$\overset{\text{d multilinear}}{=}$ $d(\ldots, a_{k\circ} + a_{l\circ}, \ldots, a_{k\circ} + a_{l\circ}, \ldots) = 0$ $\uparrow$ d alternierend

$\Rightarrow d(B) = -d(A)$

$\square$