Definition der Koordinatenabbildungen

Folgerung (11.3)

Sei $n \in \mathbb{N}_0$, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $\mathscr{B} = (v_1, ..., v_n)$ eine geordnete Basis von V. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$\Phi_{\mathscr{B}} : V \to K^n$$

mit $\Phi_{\mathscr{B}}(v_j) = e_j$ für $1 \le j \le n$ (wobei e_j jeweils den j-ten Einheitsvektor bezeichnet). Wir nennen sie die Koordinatenabbildung zur geordneten Basis $\mathscr{B}$. Es handelt sich dabei um einen Isomorphismus von K-Vektorräumen.

Vorgehensweise zur Berechung von $\Phi_{\mathscr{B}}(v)$ für ein $v \in V$:
Stelle v als Linearkombination $v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j$ dar.
Dann ist $\Phi_{\mathscr{B}}(v) = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

Eindeutigkeit der Vektorräume bis auf Isomorphie

Folgerung (11.4)

Zwischen zwei beliebigen K-Vektorräumen derselben endlichen Dimension existiert ein Isomorphismus.

Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und jeden Körper K ist also der K^n bis auf Isomorphie der einzige n-dimensionale K-Vektoraum.

Die lineare Abbildung $\mathscr{L}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}}(A)$ zu einer Matrix

Definition (11.5)

Seien V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume und $\mathscr{A} = (v_1, ..., v_n)$, $\mathscr{B} = (w_1, ..., w_m)$ geordnete Basen von V bzw. W. Ferner sei $A = (a_{ij})$ eine Matrix aus $\mathscr{M}_{m \times n, K}$, mit $n = \dim V$ und $m = \dim W$. Dann gibt es nach Satz 11.2 eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$\phi : V \longrightarrow W \qquad \text{mit} \qquad \phi(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \quad \text{für} \quad 1 \leq j \leq n.$$

Wir bezeichnen diese Abbildung ϕ mit $\mathscr{L}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}}(A)$ und nennen sie die lineare Abbildung zur Matrix A bezüglich der Basen $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$.

Definition (11.6)

Seien V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume und $\mathscr{A} = (v_1, ..., v_n)$, $\mathscr{B} = (w_1, ..., w_m)$ geordnete Basen von V bzw. W. Sei $\phi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Für jedes $j \in \{1, ..., n\}$ stellen wir $\phi(v_j)$ als Linearkombination von $\mathscr{B}$ dar; es gilt

$$\phi(v_j) \quad = \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \qquad 1 \le j \le n$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $a_{ij} \in K$. Wir nennen $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{m \times n, K}$ die Darstellungsmatrix von ϕ bezüglich der Basen $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ und bezeichnen sie mit $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}}(\phi)$.

Wirkung der Darstellungsmatrix auf Koordinatenvektoren

Satz (11.7)

Seien die Bezeichungen wie in der Definition gewählt. Dann gilt

$$\Phi_{\mathscr{B}}(\phi(v)) \quad = \quad \mathscr{M}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}}(\phi)\Phi_{\mathscr{A}}(v) \qquad \text{für alle} \quad v \in V.$$

Darstellungsmatrix bezüglich der Einheitsbasen

Sei $\mathscr{E}_n = (e_1^{(n)}, ..., e_n^{(n)})$ die geordnete Einheitsbasis des K^n (bestehend aus Einheitsvektoren) und $\mathscr{E}_m = (e_1^{(m)}, ..., e_m^{(m)})$ die geordnete Einheitsbasis des K^m.

Proposition (11.8)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathscr{M}_{m \times n, K}$ und $\phi_A : K^n \to K^m$ die lineare Abbildung gegeben durch $\phi_A(v) = Av$ für alle $v \in K^n$. Dann gilt

$$\mathscr{M}^{\mathscr{E}_n}_{\mathscr{E}_m}(\phi_A) \quad = \quad A.$$

Beweis von Prop. 11.8

z.zg. $M^{\mathcal{E}_n}_{\mathcal{E}_m}(\phi_A)\, e_j = A\, e_j$ für $1 \leq j \leq n$

(Daraus folgt, dass die j-te Spalte von $M^{\mathcal{E}_n}_{\mathcal{E}_m}(\phi_A)$ mit der j-ten Spalte von A übereinstimmt, für $1 \leq j \leq n$, und somit die Matrizen übereinstimmen.)

Sei $j \in \{1, \dots, n\}$. bereits bekannt: Für jedes $v \in K^n$ gilt $\Phi_{\mathcal{E}_n}(v) = v$ (Grund: $v = \sum_{j=1}^{n} \underline{v_j}\, e_j$). erhalte:

$$M^{\mathcal{E}_n}_{\mathcal{E}_m}(\phi_A)\, e_j = M^{\mathcal{E}_n}_{\mathcal{E}_m}(\phi_A)\, \Phi_{\mathcal{E}_n}(e_j) \overset{(11.7)}{=} \Phi_{\mathcal{E}_m}(\phi_A(e_j))$$

$$= \phi_A(e_j) = A e_j$$

$\square$

1-zu-1-Korrespondenz Matrizen vs. lineare Abbildungen

Satz (11.9)

Seien V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume und $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ geordnete Basen von V bzw. W. Dann sind durch die beiden Abbildungen

$$\mathscr{M}_{m\times n,K} \to \mathrm{Hom}_K(V,W) \ , \ A \mapsto \mathscr{L}^{\mathscr{A}}_{\mathscr{B}}(A)$$

und

$$\mathrm{Hom}_K(V,W) \to \mathscr{M}_{m\times n,K} \ , \ \phi \mapsto \mathscr{M}^{\mathscr{A}}_{\mathscr{B}}(\phi)$$

zueinander inverse Isomorphismen von K-Vektorräumen definiert.

Folgerung (11.10)

Seien V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume. Dann gilt

$$\dim \ \mathrm{Hom}_K(V,W) \quad = \quad (\dim V)(\dim W).$$

Beweis von Satz 11.9:

geg.: endl.-dim. K-Vektorräume V, W

$n = \dim V$, $m = \dim W$

geordnete Basen $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V

und $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_m)$ von W.

zu zeigen:

(1) Die Abbildung $\mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} : M_{m\times n, K} \to \mathrm{Hom}_K(V, W)$
ist eine lineare Abbildung

(2) $\mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} \circ \mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} = \mathrm{id}_{M_{m\times n, K}}$

(3) $\mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} \circ \mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_K(V, W)}$

(2) $\mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} \circ \mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} = \mathrm{id}_{M_{m\times n,K}}$

zu (1) Seien $A, B \in M_{m\times n,K}$ und $\lambda \in K$.

z.zg: $\mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(A+B) = \mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(A) + \mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(B)$

und $\mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\lambda A) = \lambda \mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(A)$. Dafür muss überprüft werden, dass für jedes $v \in V$ gilt

(1.1) $\mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(A+B)(v) = \left(\mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(A) + \mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(B)\right)(v)$

(1.2) $\mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\lambda A)(v) = \left(\lambda \mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(A)\right)(v)$

Wegen Satz 11.2 reicht es, beide Gleichungen nur für v_j mit $1 \le j \le n$ zu überprüfen. Sei $j \in \{1, \dots, n\}$, außerdem $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$

zu (2)

$\in$

$\Phi($

von (

für

$(w_1, \dots$

d.h. A

$= A$

zu (3)

$(\mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$

$_K(V,W)$

<u>zu (1.1)</u> $\mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(A+B)(v_j) = \sum_{i=1}^{m} (a_{ij}+b_{ij})\, w_i$

$= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i + \sum_{i=1}^{m} b_{ij} w_i = \mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(A)(v_j) + \mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(B)(v_j) = \left(\mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(A) + \mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(B)\right)(v_j)$

Def. der punktweisen Addition auf dem K-Vektorraum der linearen Abb. $\mathrm{Hom}_K(V,W)$

<u>zu (1.2)</u> $\mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\lambda A)(v_j) = \sum_{i=1}^{m} (\lambda a_{ij})\, w_i = \lambda \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$

$= \lambda\, \mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(A)(v_j) = \left(\lambda \mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(A)\right)(v_j)$

Def. der punktweisen skalaren Mult. auf $\mathrm{Hom}_K(V,W)$

<u>zu (2)</u> zu überprüfen: Für jede Matrix $A \in \mathcal{M}_{m\times n,K}$ gilt $(\mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} \circ \mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}})(A) = A$. Sei $\phi = \mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(A)$

↳ Def. der punktweisen skalaren Mult. auf $\mathrm{Hom}_K(V,W)$)

zu (2) ...

uss

ilt

$)(v))$

$)$

hum-

ifen.

nd

$\in \mathrm{Hom}_K(V,W)$. Nach Def. von $\mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(A)$ gilt

$\phi(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$ für $1 \le j \le n$. Nach Def

von $\mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi) =: B$ gilt $\phi(v_j) = \sum_{i=1}^{m} b_{ij} w_i$

für $1 \le j \le n$ $\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i = \sum_{i=1}^{m} b_{ij} w_i$

$\xRightarrow{(w_1,\dots,w_m) \text{ ist Basis}}$ $a_{ij} = b_{ij}$ für $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$.

d.h. $A = B \Rightarrow (\mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} \circ \mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}})(A) = \mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi) = B$

$= A$

<u>zu (3)</u> Sei $\phi \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ z.zg.: $(\mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} \circ \mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}})(\phi) = \phi$. Sei $A = (a_{ij}) = \mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi)$. Es gilt

Nach Def. von $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\phi)$ gilt $\phi(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$ für $1 \leq j \leq n$. Sei $\psi = \mathcal{L}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(A)$. Nach Def. von $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(A)$ gilt $\psi(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$ für $1 \leq j \leq n$ $\Rightarrow$ erhalte $\phi(v_j) = \psi(v_j)$ für $1 \leq j \leq n$. $\xRightarrow[\text{von } V]{(v_1, \ldots, v_n) \text{ Basis}}$ $\phi = \psi$

$\Rightarrow (\mathcal{L}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \circ \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}})(\phi) = \mathcal{L}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(A) = \psi = \phi$ $\square$

Die Darstellungsmatrix der identischen Abbildung

Lemma (11.11)

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\mathscr{A}$ eine geordnete Basis von V. Dann gilt $\mathscr{M}_{\mathscr{A}}^{\mathscr{A}}(\mathrm{id}_V) = E^{(n)}$, d.h. die Darstellungsmatrix der identischen Abbildung ist die Einheitsmatrix.

Beweis von Lemma 11.11

geg.: endl.-dim. K-Vektorraum V, $n = \dim V$

$\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ geordnete Basis von V.

Beh.: $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V)\, e_j = E^{(n)} e_j$ für $1 \leq j \leq n$

(Daraus folgt, dass die Matrizen übereinstimmen.)

$$M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V)\, e_j = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V)\, \Phi_{\mathcal{A}}(v_j) = \Phi_{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V(v_j))$$

$$= \Phi_{\mathcal{A}}(v_j) = e_j = E^{(n)} e_j \qquad \square$$

Komposition linearer Abbildungen und Matrixprodukt

Satz (11.12)

Seien U, V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume mit geordneten Basen $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ und $\mathscr{C}$. Seien $\phi : U \to V$ und $\psi : V \to W$ lineare Abbildungen. Dann gilt

$$\mathscr{M}_{\mathscr{C}}^{\mathscr{A}}(\psi \circ \phi) \quad = \quad \mathscr{M}_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}(\psi)\mathscr{M}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}}(\phi).$$

Das Matrixprodukt entspricht also der Komposition linearer Abbildungen.

Beweis von Satz 11.12 $\underbrace{U, V, W}$

geg: endl.-dim. K-Vektorräume der Dimensionen p, n, m

$\mathcal{A} = (u_1, \dots, u_p)$, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$, $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$ geordnete Basen von U, V und W. Es genügt z. zg.:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\psi)\, M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi)\, e_j = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{C}}(\psi \circ \phi)\, e_j \quad \text{für } 1 \le j \le p$$

wobei $\phi: U \to V$, $\psi: V \to W$ lineare Abb. sind.

Sei $j \in \{1, \dots, p\}$. $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\psi)\, M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi)\, e_j = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\psi)\, M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi)\, \Phi_{\mathcal{A}}(u_j)$

$\overset{(11.7)}{=} M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\psi)\, \Phi_{\mathcal{B}}(\phi(u_j)) \overset{(11.7)}{=} \Phi_{\mathcal{C}}(\psi(\phi(u_j))) = \Phi_{\mathcal{C}}((\psi \circ \phi)(u_j))$

ebenso: $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{C}}(\psi \circ \phi)\, e_j = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{C}}(\psi \circ \phi)\, \Phi_{\mathcal{A}}(u_j) \overset{(11.7)}{=} \Phi_{\mathcal{C}}((\psi \circ \phi)(u_j))$

Umkehrabbildung und inverse Matrix

Satz (11.13)

Seien V, W beides n-dimensionale K-Vektorräume mit geordneten Basen $\mathscr{A}, \mathscr{B}$. Eine lineare Abbildung $\phi : V \to W$ ist genau dann bijektiv, wenn die Darstellungsmatrix $\mathscr{M}^{\mathscr{A}}_{\mathscr{B}}(\phi)$ invertierbar ist, und in diesem Fall gilt

$$\mathscr{M}^{\mathscr{B}}_{\mathscr{A}}(\phi^{-1}) \quad = \quad \mathscr{M}^{\mathscr{A}}_{\mathscr{B}}(\phi)^{-1}.$$

Beweis von Satz 11.13:

geg: endl.-dim. K-Vektorräume V, W

$n = \dim V = \dim W$, $\phi: V \to W$ lineare Abb.

$\mathcal{A}$ geordnete Basis von V, $\mathcal{B}$ geordn. Basis v. W

Sei $A = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi)$. Beh.

ϕ ist bijektiv $\iff$ A ist invertierbar

„$\Rightarrow$" ϕ bijektiv $\Rightarrow$ ϕ besitzt eine Umkehr-Abbildung $\psi: W \to V$. Sei $B = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\psi)$

$\Rightarrow BA = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\psi)\, M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi) \overset{(11.12)}{=}$

$$\mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(\psi \circ \phi) = \mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V) \overset{(11.11)}{=} E^{(n)}$$

"$\Rightarrow$" A ist invertierbar, und es gilt

$$\mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi)^{-1} = A^{-1} = B = \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\psi) = \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\phi^{-1})$$

"$\Leftarrow$" Vor.: A ist invertierbar. Sei $\psi = \mathcal{L}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(A^{-1})$. Beh.: $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_V$ und $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_W$

$$\mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(\psi \circ \phi) \overset{(11.12)}{=} \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\psi)\, \mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi) =$$

$$\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(A^{-1}))\, A = A^{-1} A = E^{(n)} =$$

$$\mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V) \xrightarrow[\text{angewendet auf beide Seiten}]{\mathcal{L}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}} \psi \circ \phi = \mathrm{id}_V$$

Der Beweis von $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_W$ läuft analog. $\square$

Definition der Transformationsmatrizen

Definition (11.14)

Seien V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, und seien $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ zwei geordnete Basen von V. Dann nennt man $\mathscr{T}^{\mathscr{A}}_{\mathscr{B}} = \mathscr{M}^{\mathscr{A}}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}_V)$ die Matrix des Basiswechsels von $\mathscr{A}$ nach $\mathscr{B}$ oder auch einfach eine Transformationsmatrix.

Proposition (11.15)

Seien Bezeichnungen wie in der Definition und $n = \dim V$.

(i) Für alle $v \in V$ gilt $\mathscr{T}^{\mathscr{A}}_{\mathscr{B}} \Phi_{\mathscr{A}}(v) = \Phi_{\mathscr{B}}(v)$.

(ii) Es gilt $\mathscr{T}^{\mathscr{A}}_{\mathscr{A}} = E^{(n)}$ und $\mathscr{T}^{\mathscr{B}}_{\mathscr{A}} = (\mathscr{T}^{\mathscr{A}}_{\mathscr{B}})^{-1}$.

Satz (11.16)

Seien V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume, $\mathscr{A}, \mathscr{A}'$ zwei Basen von V und $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ zwei Basen von W. Für jede lineare Abbildung $\phi : V \to W$ gilt dann

$$\mathscr{M}^{\mathscr{A}'}_{\mathscr{B}'}(\phi) \quad = \quad \mathscr{T}^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'} \, \mathscr{M}^{\mathscr{A}}_{\mathscr{B}}(\phi) \, \mathscr{T}^{\mathscr{A}'}_{\mathscr{A}} .$$

...ve Abb.

...sis v. W

...tzbar

...wkehr -

...(Ψ)

...12)

Beweis von Satz 11.16:

z. zg.: $$M^{A'}_{B'}(\phi) = T^{B}_{B'}\, M^{A}_{B}(\phi)\, T^{A'}_{A}$$

$$T^{B}_{B'}\, M^{A}_{B}(\phi)\, T^{A'}_{A} =$$

$$M^{B}_{B'}(id_W)\, M^{A}_{B}(\phi)\, M^{A'}_{A}(id_V) \overset{(11.12)}{=}$$

$$M^{B}_{B'}(id_W)\, M^{A'}_{B}(\phi \circ id_V) \overset{(11.12)}{=}$$

$$M^{A'}_{B'}(id_W \circ \phi \circ id_V) = M^{A'}_{B'}(\phi) \quad \square$$